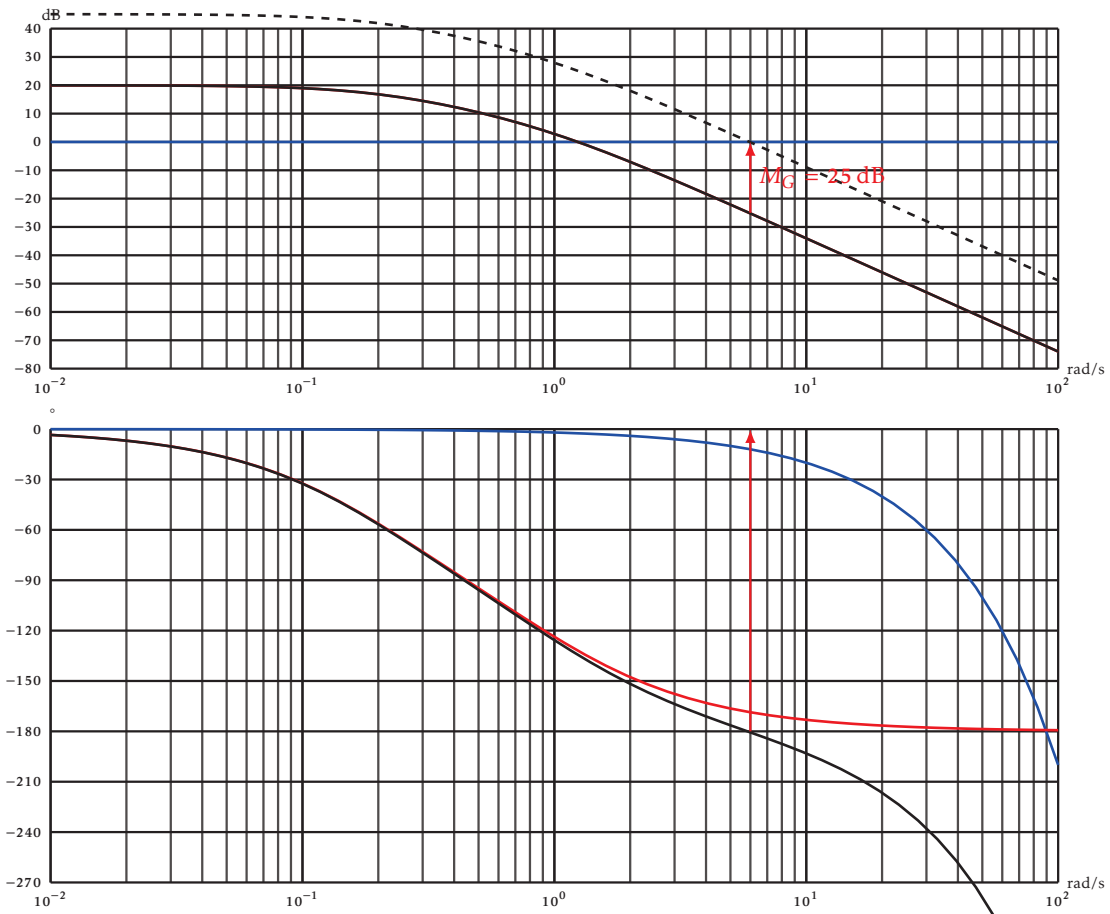


6.4 Corrigés n°6a

Cor. 1 : Stabilité d'un système à retard

Sujet page 14

Q1. Tracer les diagrammes de Bode de $H_p(p)$ puis de la fonction $T(p)$ en utilisant l'approximation de Padé sur les diagrammes précédents pour $K = 1$.



Q2. Déterminer la valeur limite de K à partir de cette approximation.

La courbe de phase intercepte -180° pour $\omega_1 80 = 6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On note une marge de gain de 25 dB La valeur maxi de $K = 10^{\frac{25}{20}} \approx 18$ (courbe en tirets).

Q3. Que pensez-vous de la modélisation retenue?

La modélisation retenue est valide jusqu'à $\approx 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q4. Pour cette modélisation le système est toujours stable, elle est donc à utiliser avec précaution.

Cor. 2 : Stabilité d'un système bouclé

Sujet page 14

Q1. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte : par identification : $BO(p)$.

On calcule dans un premier temps la boucle interne, à l'aide la formule de Black, $BF(p) = \frac{CD(p)}{1 + BO(p)}$, soit ici :

$$BF(p) = \frac{\frac{10}{(1 + 0,1 \cdot p)^2}}{1 + \frac{10}{(1 + 0,1 \cdot p)^2}} = \frac{10}{10 + (1 + 0,1 \cdot p)^2}$$

soit sous forme canonique :

$$BF(p) = \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{1 + \frac{0,2}{11}p + \frac{0,01}{11}p^2}$$

$$- K_1 = \frac{10}{11}$$

$$- \omega_{n1} = \sqrt{\frac{11}{0,01}} = 10\sqrt{11} \approx 33 \text{ rad/s}$$

$$- z_1 = \frac{0,2}{11} \frac{\omega_{n1}}{2} \approx 0,3$$

La FTBO s'écrit finalement :

$$BO(p) = \frac{10 \cdot K_p}{11 \cdot p \cdot (1 + 0,1 \cdot p) \cdot \left(1 + \frac{0,2}{11}p + \frac{0,01}{11}p^2\right)}$$

Q2. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée : $BF(p)$. Préciser le gain statique, l'ordre et la classe.

6.4 Corrigés n°6a

$$BF(p) = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)} \text{ soit ici}$$

$$BF(p) = \frac{10 \cdot K_p}{10 \cdot K_p + 11 \cdot p \cdot (1 + 0,1 \cdot p) \cdot \left(1 + \frac{0,2}{11} p + \frac{0,01}{11} p^2\right)}$$

$$BF(p) = \frac{1}{\frac{p^4}{10\,000 \cdot K_p} + \frac{3 \cdot p^3}{1\,000 \cdot K_p} + \frac{13 \cdot p^2}{100 \cdot K_p} + \frac{11 \cdot p^2}{10 \cdot K_p} + 1}$$

On reconnaît une fonction de transfert du 4^e ordre, de gain statique 1 et de classe 0.

Q3. Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la FTBO pour $K_p = 1$. Préciser les marges de phase M_ϕ et de gain M_G . Conclure sur la stabilité.

Le diagramme est le produit de trois fonctions de transfert :

Un intégrateur $\frac{1}{p}$

- diagramme d'amplitude : une droite de pente -20dB/dec passant par l'origine
- diagramme de phase : une droite d'ordonnée -90° .

Un premier ordre $\frac{K_p}{1 + 0,1 \cdot p}$ de constante de temps $\tau = 0,1\text{ s}$ de gain $K_p = 1$

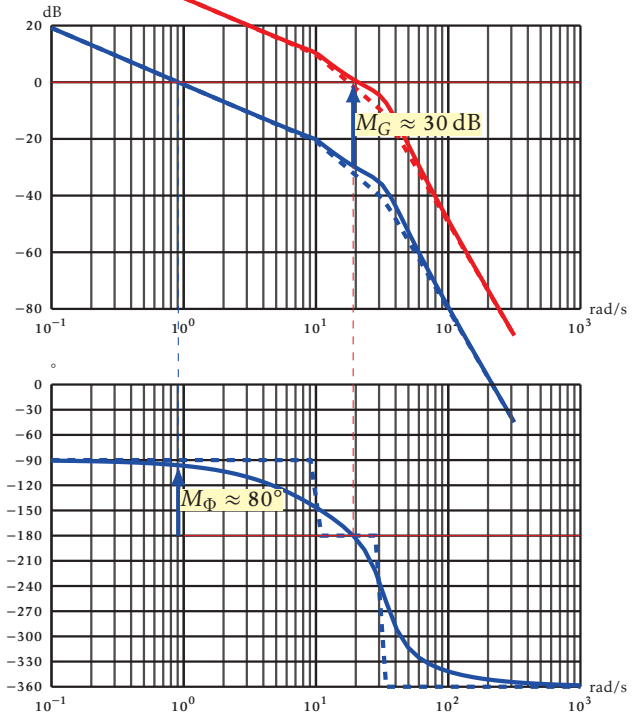
- diagramme d'amplitude : une asymptote horizontale passant par $20 \log K_p = 0\text{dB}$ une asymptote de pente -20dB/dec à partir de la pulsation $\omega_c = \frac{1}{\tau} = 10$
- diagramme de phase : une asymptote horizontale d'ordonnée 0° jusqu'à ω_c , une asymptote horizontale -90° au-delà.

Un second ordre : $\frac{10}{11} \cdot \frac{1}{1 + \frac{0,2}{11} p + \frac{0,01}{11} p^2}$ de pulsation ω_{n1} , de gain K_1 , de coefficient d'amortissement z_1 .

- diagramme d'amplitude : une asymptote horizontale passant par $20 \log \frac{10}{11} = 0,82$ jusqu'à ω_{n1} puis une asymptote de pente -40dB/dec .

La courbe de module présente un maximum car $z_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, pour la pulsation $\omega_{r1} = \omega_{n1} \sqrt{1 - 2 \cdot z_1^2} \approx 30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, avec un facteur de résonance de $Q = \frac{1}{2 \cdot z_1 \sqrt{1 - z_1^2}} = 1,74$ soit en dB $Q_{\text{dB}} = 4,8\text{dB}$

- diagramme des phases, une asymptote horizontale d'ordonnée 0° jusqu'à ω_{n1} puis une asymptote horizontale passant par -180° .



Q4. Pour quelle valeur de K_p , le système est-il juste instable? Tracer les diagrammes de Bode pour la juste instabilité.

Il faut remonter la courbe de gain d'environ 30 dB donc $K_p = 10^{\frac{30}{20}} \approx 34$.

La courbe de gain pour la juste instabilité est tracée en rouge au-dessus. La courbe de phase est inchangée.

Cor. 3 : Étude de l'asservissement de force

Sujet page 15

Q1. On identifie la servo-valve à un modèle de système continu du premier ordre. Préciser la fonction transfert $Sv(p)$.

Justifier ce choix en vous aidant des diagrammes fournis par le constructeur. Évaluer la constante de temps de la servo-valve et le gain statique de la servo-valve.

En quoi ce choix est-il critiquable?

$$Sv(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_b}{1 + T_b \cdot p}$$

La caractéristique est proportionnelle (figure 6.11) on peut en déduire

$$K_b = \frac{369 \text{ cm}^3/\text{s}}{13,6 \text{ mA}} = 0,027 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ A}^{-1}$$

Pour déterminer la constante temps, on peut utiliser la ré-

ponse fréquentielle. On sait que $\omega_c = \frac{1}{T_b}$, le déphasage pour cette pulsation est de -45° et l'atténuation de -3 dB . On peut donc déduire des deux courbes

- à partir du diagramme phase $\omega_c = 80 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- à partir du diagramme d'amplitude $\omega_c = 70 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On choisit la plus petite $\omega_c = 70 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

soit $T_b = \frac{1}{70} = 0,014 \text{ s}$

Il est évident en regardant la courbe de phase que le modèle est d'un ordre supérieur à 1, en effet, le déphasage dépasse -90° alors qu'un premier ordre tend asymptotiquement vers -90° .

Q2. Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{\Delta P(p)}{Q(p)}$ en

fonction de B, V, r, rh, M, f avec $rh = \frac{2 \cdot B \cdot S^2}{V}$ la raideur hydraulique du vérin. Montrez que $H_1(p)$ s'écrit :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

avec $N_1(p)$ et $D_1(p)$ deux polynômes en p avec $N_1(0) = 0$ et $D_1(0) = 0$.

$$Q(p) = S \cdot p \cdot X(p) + \frac{V}{2 \cdot B} \cdot p \cdot \Delta_p(p)$$

$$\begin{aligned} S \cdot \Delta_p(p) &= M \cdot p^2 \cdot X(p) + f \cdot p \cdot X(p) + r \cdot X(p) \\ &= (M \cdot p^2 + f \cdot p + r) \cdot X(p) \end{aligned}$$

$$X(p) = \frac{S}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r} \cdot \Delta_p(p)$$

$$Q(p) = S \cdot p \cdot \frac{S}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r} \cdot \Delta_p(p) + \frac{V}{2 \cdot B} \cdot p \cdot \Delta_p(p)$$

$$Q(p) = \left(\frac{S^2}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r} + \frac{V}{2 \cdot B} \right) \cdot p \cdot \Delta_p(p)$$

$$Q(p) = \left(\frac{2 \cdot B \cdot S^2 + V \cdot (M \cdot p^2 + f \cdot p + r)}{(M \cdot p^2 + f \cdot p + r) \cdot 2 \cdot B} \right) \cdot p \cdot \Delta_p(p)$$

$$H_1(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{V} \cdot \frac{M \cdot p^2 + f \cdot p + r}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r + \frac{2 \cdot S^2 \cdot B}{V}}$$

$$H_1(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{V} \cdot \frac{M \cdot p^2 + f \cdot p + r}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r + rh}$$

Q3. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte

$$B_o(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$$

$$B_o(p) = K_a \cdot Sv(p) \cdot H_1(p) \cdot K_c$$

$$B_o(p) = K_a \cdot K_c \cdot \frac{K_b}{1 + T_b \cdot p} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{V} \cdot \frac{M \cdot p^2 + f \cdot p + r}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r + rh}$$

Q4. Indiquez sur le graphe à quelles courbes correspondent chacune des fonctions de transfert.

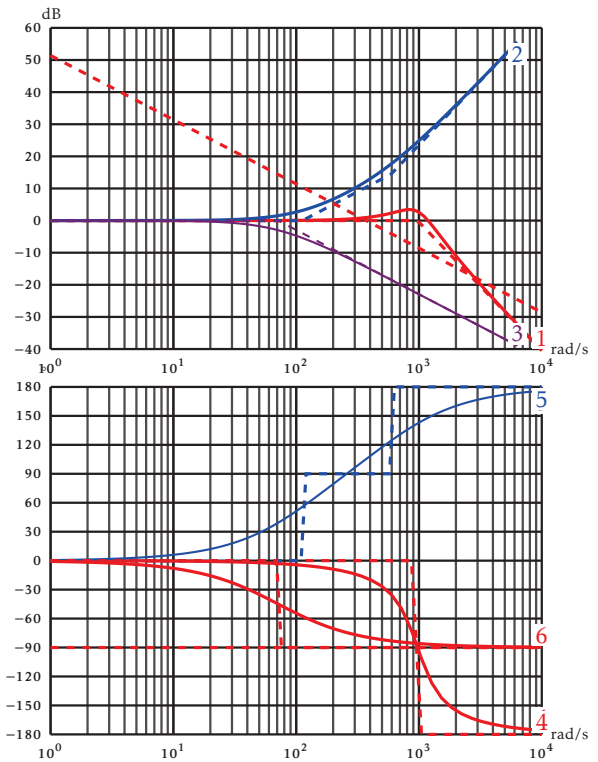
- 1 et 4 respectivement le module et l'argument de $\frac{1}{D_1(p)}$.
- 2 et 5 le module et l'argument de $N_1(p)$.
- 3 et 6 le module et l'argument de $\frac{1}{1 + T_b \cdot p}$.

Les asymptotes sont tracées sur la figure ci-dessous.

On remarque que le coefficient d'amortissement du numérateur est supérieur à 1, on peut donc le décomposer en deux premiers ordres et tracer les asymptotes correspondantes.

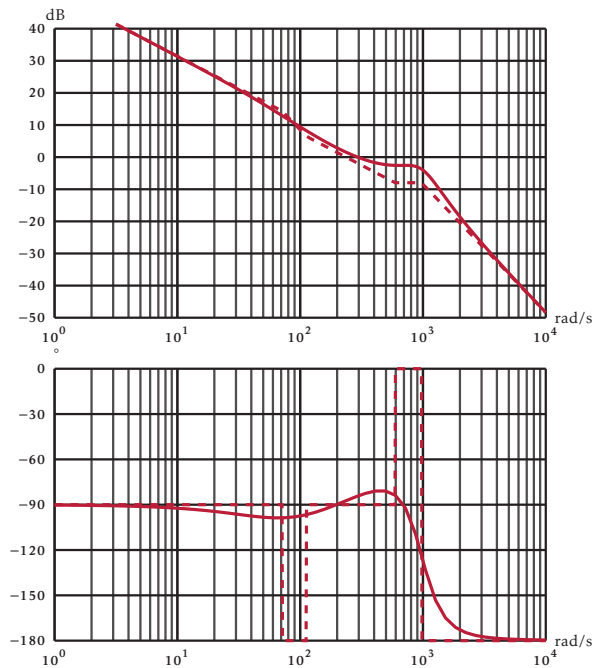
Q5. Compléter les diagrammes en ajoutant l'intégrateur de fonction de transfert $\frac{372}{p}$.

Voir sur la figure ci-dessous.



Q6. Tracer les diagrammes de Bode de la FTBO.

Il suffit d'additionner graphiquement les courbes.



Q7. Préciser la condition de stabilité en fonction de K_a .

Le déphasage n'est jamais inférieur à -180° , le système est stable pour tout K_a .

Q8. Justifier que dans le domaine de fonctionnement la FTBO peut être modélisée par $B'_o(p) = \frac{K'}{p}$. Préciser K' .

Jusqu'à environ $300 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ la modélisation par $B'_o(p) = \frac{K'}{p}$ est parfaitement valide au delà la modélisation n'est plus aussi juste. La courbe de phase au-delà de $800 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ tend vers un déphasage de -180° et la courbe de gain présente une inflexion de la courbe vers le « haut ».

On a bien $B'_o(p) = \frac{K'}{p}$ avec $K' = 372$.

6.4 Corrigés n°6a

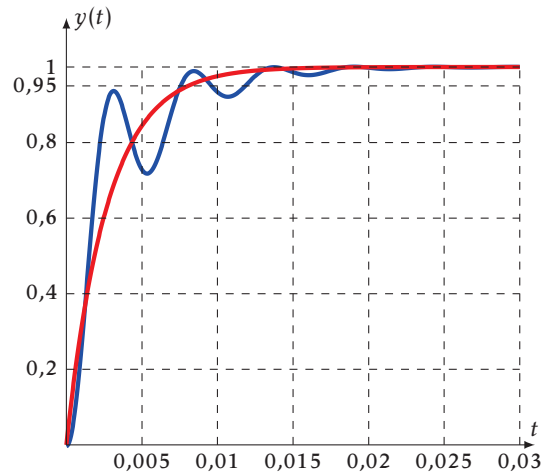
Q9. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée simplifiée $B'_f(p)$ puis la réponse temporelle pour une entrée en échelon.

$$B''_f(p) = \frac{B'_o(p)}{1 + B'_o(p)} = \frac{372}{372 + p} = \frac{1}{1 + \frac{p}{372}}$$

On reconnaît une fonction de transfert du premier ordre, on a donc :

$$s(t) = 1 - e^{-372 \cdot t}$$

Q10. Tracer la réponse temporelle sur la figure 6.14. Que pensez-vous du modèle simplifié ?



La réponse temporelle de la fonction de transfert simplifiée ne présente pas les oscillations de la réponse du système réel, mais l'allure générale est relativement proche. On peut utiliser cette fonction simplifiée pour avoir un ordre de grandeur du temps de réponse.

Cor. 4 : Certification d'un atterrisseur.tex

Sujet page 18

Q1. Montrer que la caractéristique élastique de l'amortisseur peut être mise sous la forme $F = \frac{a}{b-l}$ et donner les expressions de a et b .

On a les relations suivantes :

$$P_o \cdot V_{g0} = P \cdot V_g \text{ (isotherme)}$$

$$P_o \cdot V_{g0} = P \cdot (V_{g0} - s \cdot l) \Rightarrow P = \frac{P_o \cdot V_{g0}}{V_{g0} - s \cdot l}$$

$$F = \frac{P_o \cdot V_{g0}}{\frac{V_{g0}}{s} - l}$$

$$a = P_o \cdot V_{g0} \text{ et } b = \frac{V_{g0}}{s}$$

Q2. On appelle raideur équivalente locale K la pente locale de la fonction $F(l)$. Donner l'expression de cette raideur au voisinage d'une élongation l_0 . Calculer cette raideur pour $a = 35\,250 \text{ N} \cdot \text{m}$, $b = 0,47 \text{ m}$ et $l_0 = 0,4 \text{ m}$.

On calcule la différentielle de F par rapport à l :

$$\frac{dF}{dl} = \frac{a}{(b-l)^2} = K(l)$$

Compte tenu des valeurs numériques :

$$K_0 = K(l_0) \approx 7\,200 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$$

Q3. Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et donner l'expression correspondante de ses paramètres (gain statique k , constante de temps τ , coefficient d'amortissement réduit ξ et pulsation propre non amortie ω_n).

$$\begin{aligned} \frac{Z_a(p)}{Z_b(p)} &= \frac{K + F_v \cdot p}{K + F_v \cdot p + M_e \cdot p^2} \\ &= \frac{1 + \frac{F_v}{K} \cdot p}{1 + \frac{F_v}{K} \cdot p + \frac{M_e}{K} \cdot p^2} \end{aligned}$$

$$- k = 1,$$

$$- \text{constante de temps : } \tau = \frac{F_v}{K}$$

$$- \text{pulsation propre non amortie } \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M_e}}$$

$$- \text{coefficient d'amortissement réduit } \xi = \frac{1}{2} \frac{F_v}{\sqrt{K \cdot M_e}}$$

Q4.

Q4a. Donner la valeur numérique de ces paramètres canoniques pour $M_e = 50\,000 \text{ kg}$, $K = 7\,106 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $F_v = 60\,000 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$.

$$- k = 1,$$

$$- \tau = 8,6 \text{ ms}$$

$$- \omega_n = 11,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

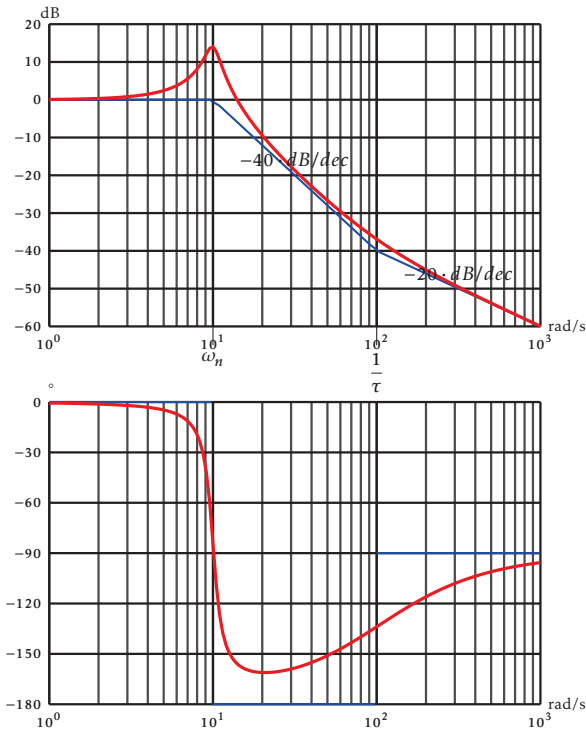
$$- \xi = 0,05$$

Q4b. Quelle valeur de F_v aurait-il fallu pour que le coefficient d'amortissement réduit du mode complexe soit de $\xi = 0,5$?

$$\text{Pour } \xi = 0,5 \text{ alors } F_v = 2 \cdot \xi \cdot \sqrt{K \cdot M_e} = 592 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\frac{Z_a(p)}{Z_b(p)} = \frac{1 + 0,01 \cdot p}{1 + 2 \frac{0,1}{10} \cdot p + \frac{p^2}{10^2}}$$

Q5. Tracer le lieu de Bode et les asymptotes de cette fonction de transfert en indiquant avec précision les pulsations, les valeurs et les pentes caractéristiques.



Q6. Quelle est la relation liant z_a et z_p aux très faibles vitesses ($\dot{y}_0 \approx 0$)? Que se passe-t-il donc physiquement sur l'avion?

Aux faibles vitesses, la fréquence des oscillations est très faible ($\omega \rightarrow 0$) donc le déphasage est nul et le gain est unitaire.

Les vibrations sont intégralement transmises à la carlingue.

Q7. Que se passe-t-il à une vitesse telle que $\dot{y}_0 = \frac{\omega_n}{c}$ où ω_n est la pulsation propre non amortie du second ordre de la fonction de transfert $\frac{Z_a(p)}{Z_b(p)}$? On étayera la réponse par l'évaluation rapide du rapport d'amplitude $\frac{Z_a}{Z_b}$ à cette fréquence (la pulsation résonance est proche de la pulsation propre non amortie).

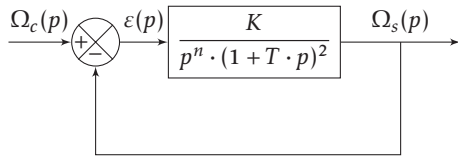
L'amortisseur est sollicité par une fonction sinusoïdale de pulsation ω_n , à cette pulsation, la sortie est déphasée de 90° et le gain est proche du gain de la résonance du second ordre, le coefficient de résonance est $Q = \frac{1}{2 \cdot z \sqrt{1 - z^2}} \approx \frac{1}{2 \cdot z} = 50$.

La carlingue entre en résonance, l'amplitude de la sortie est 50 fois plus grande que l'entrée et déphasée de 90° .

Cor. 5 : Caractérisation d'une fonction de transfert

Sujet page 21

Q1. Tracer le schéma bloc de l'asservissement, l'entrée est une consigne de vitesse $\Omega_c(p)$ et la sortie $\Omega_s(p)$.



Q2. Déterminer K , n et T pour que le système en boucle fermée réponde aux exigences suivantes :

- le signal de consigne étant une rampe de $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, l'erreur de traînage est de $\varepsilon_t = \frac{1}{50} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,
- la marge de gain est de 6 dB

Déterminons l'erreur de traînage ε_t .

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= \Omega_c(p) - \Omega_s(p) \\ \varepsilon(p) &= \Omega_c(p) - H_{BO}(p) \cdot \varepsilon(p) \\ (1 + H_{BO}(p)) \cdot \varepsilon(p) &= \Omega_c(p) \end{aligned}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_{BO}(p)} \Omega_c(p)$$

avec

$$\Omega_c(p) = \frac{1}{p^2}$$

finalement

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_{BO}(p)} \frac{1}{p^2}$$

On suppose le système stable, on peut donc utiliser le théorème de la valeur finale.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t)) \\ \varepsilon_t &= \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p)) \\ \varepsilon_t &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{1}{1 + H_{BO}(p)} \frac{1}{p^2} \right) \\ \varepsilon_t &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^n \cdot (1 + T \cdot p)^2}} \frac{1}{p^2} \right) \\ \varepsilon_t &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{p^n \cdot (1 + T \cdot p)^2}{p^n \cdot (1 + T \cdot p)^2 + K} \frac{1}{p^2} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{n-1}}{K} \right)$$

On veut

$$\varepsilon_t = \frac{1}{50}$$

Il faut donc $n = 1$ et $K = 50$.

$H_{BO}(p)$ devient.

$$H_{BO}(p) = \frac{50}{p \cdot (1 + T \cdot p)^2}$$

Déterminons le module et l'argument de $H_{BO}(j \cdot \omega)$.

$$H_{BO}(j \cdot \omega) = \frac{50}{j \cdot \omega \cdot (1 + j \cdot T \cdot \omega)^2}$$

6.4 Corrigés n°6a

La fonction de transfert est le produit d'une intégration et d'un premier ordre au carré, on peut donc rapidement écrire le module et l'argument.

$$|H_{BO}(j \cdot \omega)| = \frac{50}{\omega \cdot (1 + (T \cdot \omega)^2)}$$

$$\arg(H_{BO}(j \cdot \omega)) = -90 - 2 \cdot \arctan(T \cdot \omega)$$

puis le gain en décibel.

$$|H_{BO}(j \cdot \omega)|_{dB} = 20 \cdot \log(50) - 20 \cdot \log(\omega) - 20 \cdot \log(1 + T^2 \cdot \omega^2)$$

On détermine la marge de gain pour la pulsation ω_{180} telle que $\arg(H_{BO}(j \cdot \omega_{180})) = -180^\circ$.

Soit

$$2 \cdot \arctan(T \cdot \omega_{180}) = 90^\circ \Rightarrow \omega_{180} = \frac{1}{T}$$

Déterminons $|H_{BO}(j \cdot \omega_{180})|$

$$|H_{BO}(j \cdot \omega_{180})| = \frac{K}{\omega_{180} \cdot (1 + (T \cdot \omega_{180})^2)}$$

$$|H_{BO}(j \cdot \omega_{180})| = \frac{K}{\frac{1}{T} \cdot \left(1 + \left(T \cdot \frac{1}{T}\right)^2\right)}$$

$$|H_{BO}(j \cdot \omega_{180})| = \frac{K \cdot T}{2}$$

On veut $M_G = 10$ dB, donc :

$$20 \cdot \log\left(\frac{K \cdot T}{2}\right) = -10 \text{ dB}$$

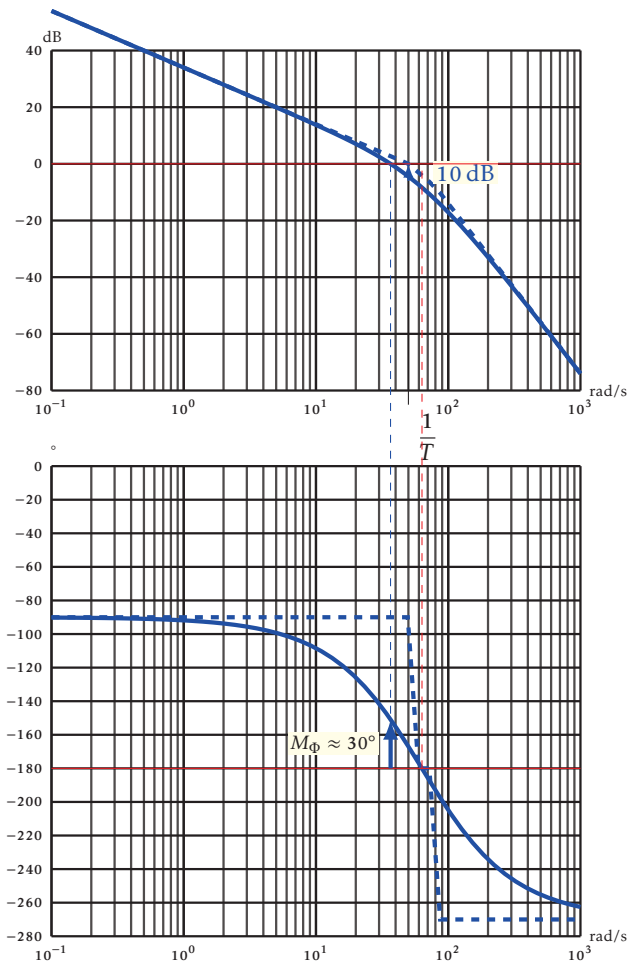
soit

$$T = \frac{2 \cdot 10^{\frac{-10}{20}}}{K} \approx 0,0125 \text{ s}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est donc :

$$H_{BO}(p) = \frac{50}{p \cdot (1 + 0,02 \cdot p)^2}$$

Q3. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels de $H_{BO}(p)$, préciser les marges de phase et de gain.



Q4. Quelle est alors l'erreur indicielle?

La FTBO est de classe 1, donc l'erreur indicielle est nulle $\varepsilon_i = 0$.

Q5. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

$$\frac{\Omega_s(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{\frac{50}{p \cdot (1 + 0,02 \cdot p)^2}}{1 + \frac{50}{p \cdot (1 + 0,02 \cdot p)^2}}$$

Compte tenu des valeurs numériques :

$$\frac{\Omega_s(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{50}{p \cdot (1 + 0,02 \cdot p)^2 + 50}$$

$$\frac{\Omega_s(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{50}{50 + p + 0,04 \cdot p^2 + 0,0004 \cdot p^3}$$

et sous forme canonique

$$\frac{\Omega_s(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{50} + \frac{0,04}{50} \cdot p^2 + \frac{0,0004}{50} \cdot p^3}$$