

## 5.4 Corrigés n°5b

### Cor. 1 : Régulation d'une turbine

Sujet page 10

**Q1.** Déterminer la fonction de transfert  $H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)}$  sous forme canonique et déterminer, en justifiant votre réponse, si cette boucle de régulation est stable et précise. Déterminer l'expression littérale et numérique de  $K_I$  minimisant le temps de réponse à 5% de la boucle interne de régulation de puissance. En déduire ce temps de réponse à 5%. En comparant à la rapidité de la turbine seule, la boucle interne de régulation améliore-t-elle la rapidité?

Déterminons dans un premier temps la FTBO

$$\frac{\Delta P_m(p)}{\varepsilon_p(p)} = \frac{K_I}{p} \cdot \frac{K_S \cdot K_T}{1 + \tau \cdot p}$$

d'où la FTBF

$$\begin{aligned} H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)} &= \frac{\frac{K_I \cdot K_S \cdot K_T}{p(1 + \tau \cdot p)}}{1 + \frac{K_I \cdot K_S \cdot K_T}{p(1 + \tau \cdot p)}} \\ &= \frac{K_I \cdot K_S \cdot K_T}{K_I \cdot K_S \cdot K_T + p + \tau \cdot p^2} \end{aligned}$$

et sous forme canonique

$$H_p(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_I \cdot K_S \cdot K_T} + \frac{\tau}{K_I \cdot K_S \cdot K_T} \cdot p^2}$$

On reconnaît une fonction de transfert du second ordre avec

— un gain :  $G = 1$

— une pulsation propre :  $\omega_n = \sqrt{\frac{K_I \cdot K_S \cdot K_T}{\tau}}$

— un coefficient d'amortissement :

$$\xi = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\tau \cdot K_I \cdot K_S \cdot K_T}}$$

Tous les coefficients sont de même signe, ce qui est une condition suffisante de stabilité pour un second ordre.

Le temps réponse minimal s'obtient pour  $\xi = 0,7$  d'où

$$\xi = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\tau \cdot K_I \cdot K_S \cdot K_T}}$$

$$K_I = \frac{1}{\tau \cdot 4 \cdot \xi^2 \cdot K_S \cdot K_T} = 2,5 \times 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{MW}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

On déduit

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_I \cdot K_S \cdot K_T}{\tau}} = 0,119 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

À partir de l'abaque des temps de réponse, on déduit pour  $\xi = 0,7$  :

$$t_{r5\%} \cdot \omega_n \approx 3$$

soit

$$t_{r5\%} \approx 25 \text{ s}$$

La turbine se comporte comme un premier ordre de constante de temps  $\tau = 6 \text{ s}$  soit un temps des réponse de

$$T_{5\%} = 3 \cdot \tau = 18 \text{ s}.$$

La boucle interne n'améliore pas le temps de réponse, par contre le système est précis ( $G = 1$ ).

**Q2.** Déterminer la fonction de transfert  $H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)}$  sous forme canonique et déterminer, en justifiant votre réponse, si cette boucle de régulation est stable et précise. Que peut-on dire du temps de réponse?

Déterminons la FTBO

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P_m(p)}{\varepsilon_p(p)} &= K_p \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \cdot \frac{K_S \cdot K_T}{1 + \tau \cdot p} \\ &= \frac{K_S \cdot K_T \cdot K_p \cdot (1 + T_i \cdot p)}{T_i \cdot p \cdot (1 + \tau \cdot p)} \end{aligned}$$

d'où la FTBF

$$\begin{aligned} H_p(p) &= \frac{\frac{K_S \cdot K_T \cdot K_p \cdot (1 + T_i \cdot p)}{T_i \cdot p \cdot (1 + \tau \cdot p)}}{1 + \frac{K_S \cdot K_T \cdot K_p \cdot (1 + T_i \cdot p)}{T_i \cdot p \cdot (1 + \tau \cdot p)}} \\ &= \frac{K_I \cdot K_S \cdot K_T}{K_I \cdot K_S \cdot K_T + p + \tau \cdot p^2} \\ H_p(p) &= \frac{K_S \cdot K_T \cdot K_p \cdot (1 + T_i \cdot p)}{T_i \cdot p \cdot (1 + \tau \cdot p) + K_S \cdot K_T \cdot K_p \cdot (1 + T_i \cdot p)} \\ H_p(p) &= \frac{K_S \cdot K_T \cdot K_p \cdot (1 + T_i \cdot p)}{K_S \cdot K_T \cdot K_p \cdot (1 + T_i \cdot p) + T_i \cdot p + \tau \cdot T_i \cdot p^2} \\ H_p(p) &= \frac{(1 + T_i \cdot p)}{1 + T_i \cdot p \left( 1 + \frac{1}{K_S \cdot K_T \cdot K_p} \right) + \frac{\tau \cdot T_i}{K_S \cdot K_T \cdot K_p} \cdot p^2} \end{aligned}$$

On retrouve une fonction de transfert dont le numérateur est un premier ordre et le dénominateur un second ordre. Tous les coefficients du dénominateur sont positifs, le système est donc stable. Le gain est  $G = 1$ , le système est donc précis pour une entrée en échelon.

Le système possède maintenant deux paramètres  $K_p$  et  $T_i$  avec ces deux paramètres, il est maintenant possible de régler à la fois le temps de réponse sans trop dégrader la stabilité (oscillations).

**Q3.** Conclure par une synthèse, des avantages et inconvénients d'un fonctionnement en boucle fermée avec correction intégrale et en boucle fermée avec correction proportionnelle intégrale, sur les critères de précision, rapidité et stabilité de la régulation en puissance.

On a vu que la correction intégrale seule assure la précision mais ralentit le système, par contre avec un choix judicieux de  $T_i$  et  $K_p$  on doit pouvoir régler à la fois la précision et la rapidité.

**Q4.** Montrer que dans ces conditions, la fonction de transfert  $H_p(p)$  peut être approchée par une fonction de transfert simplifiée dont on précisera les paramètres.

On reprend la FTBO

$$\frac{\Delta P_m(p)}{\varepsilon_p(p)} = \frac{K_S \cdot K_T \cdot K_p \cdot (1 + T_i \cdot p)}{T_i \cdot p \cdot (1 + \tau \cdot p)}$$

On pose  $T_i \approx \tau = 6$  s et  $K_S \cdot K_T \cdot K_p \approx 1$

$$\frac{\Delta P_m(p)}{\varepsilon_p(p)} = \frac{K_S \cdot K_T \cdot K_p}{T_i \cdot p}$$

et la FTBF

$$H_p(p) = \frac{1}{1 + 6 \cdot p}$$

On constate que le système va alors se comporter comme un système du premier ordre avec un gain  $G = 1$  (le système est précis) et avec une constante de temps de  $T = 6$  s. Le temps de réponse sera alors voisin de  $T_{r5\%} = 18$  s.

**Q5.** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte

$$H_{fo}(p) = \frac{\Delta f(p)}{\varepsilon_f(p)} \text{ pour } \Delta P_c(p) \text{ et } \Delta P_{cht} \text{ nuls.}$$

$$H_{fo}(p) = \frac{\Delta f(p)}{\varepsilon_f(p)} = K_{ri} \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot \tau \cdot p^2 + 2 \cdot T_i \cdot p + 1} \cdot \frac{f_0}{P_{0t} \cdot T_a \cdot p}$$

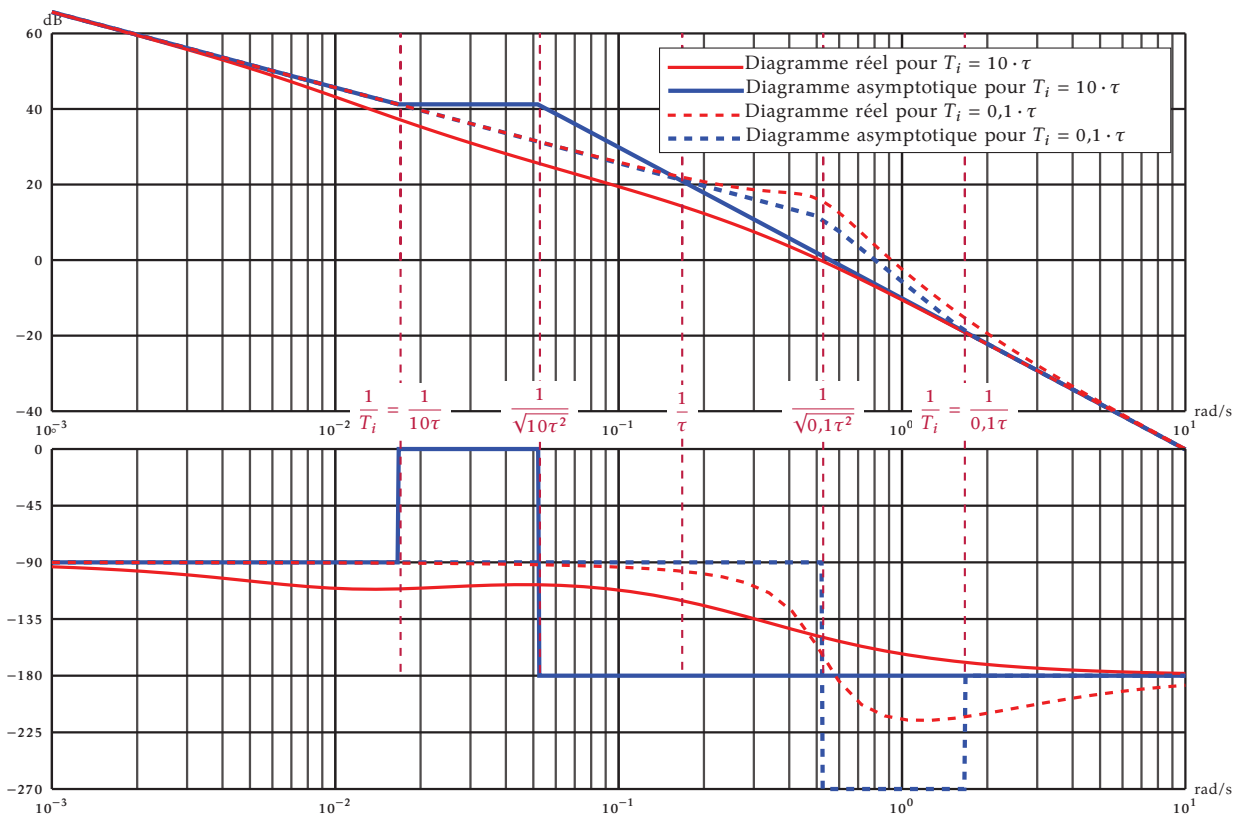
**Q6.** Pour ces deux fonctions de transfert, placer sur les diagrammes :

**Q6a.** Préciser la légende.

**Q6b.** Placer les pulsations  $\frac{1}{\tau}$ ,  $\frac{1}{T_i}$  et  $\frac{1}{\sqrt{T_i \cdot \tau}}$ .

**Q6c.** Est-il préférable de régler  $T_i > \tau$  ou  $T_i < \tau$ . Voir sur les diagrammes ci-dessous.

On constate qu'il est préférable de régler  $T_i > \tau$  (en trait continu), en effet, le système est alors toujours stable (l'argument ne descend pas en dessous de  $-180^\circ$ , alors que dans l'autre cas, le système peut être instable (c'est le cas du tracé proposé pour  $T_i = 0,1 \cdot \tau$ ).



**Q7.** Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de

$$H_{fo}(p) = \frac{\Delta f(p)}{\varepsilon_f(p)}$$

Pour  $T_i = 20$  s la FTBO devient

$$H_{fo}(p) = K_{ri} \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot \tau \cdot p^2 + 2 \cdot T_i \cdot p + 1} \cdot \frac{f_0}{P_{0t} \cdot T_a \cdot p} = \frac{1,92 \cdot (1 + 20 \cdot p)}{120 \cdot p^2 + 40 \cdot p + 1} \cdot p$$

La pulsation propre du second ordre est :  $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{120}} \approx 0,091 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et le coefficient d'amortissement  $\xi = 1,82 > 1$ .

La fonction de transfert peut donc se mettre sous la forme :

$$H_{fo}(p) \approx \frac{1,92 \cdot (1 + 20 \cdot p)}{(1 + 3,25 \cdot p) \cdot (1 + 36,74 \cdot p) \cdot p}$$

**Q8.** En assimilant le tracé de Bode réel du gain à son asymptote, calculer la marge de phase. Conclure sur les critères de stabilité et de précision du cahier des charges.

$$H_{fo}(j \cdot \omega) = \frac{K_{ri} \cdot f_0 \cdot (1 + T_i \cdot j \cdot \omega)}{(T_i \cdot \tau \cdot (j \cdot \omega)^2 + 2 \cdot T_i \cdot j \cdot \omega + 1) \cdot (P_{0t} \cdot T_a \cdot j \cdot \omega)}$$

## 5.4 Corrigés n°5b

Le module

$$|H_{fo}(j \cdot \omega)| = \frac{K_{ri} \cdot f_0 \cdot \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{(1 - T_i \cdot \tau \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot T_i^2 \omega^2 \cdot (P_{0t} \cdot T_a \cdot \omega)}}$$

en décibel

$$\begin{aligned} |H_{fo}(j \cdot \omega)|_{dB} &= 20 \log\left(\frac{K_{ri} \cdot f_0}{P_{0t} \cdot T_a}\right) + 10 \log(1 + T_i^2 \omega^2) \\ &\quad - 10 \log((1 - T_i \cdot \tau \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot T_i^2 \omega^2) \\ &\quad - 20 \log(\omega) \end{aligned}$$

déterminons l'équivalent lorsque  $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |H_{fo}(j \cdot \omega)|_{dB} &\rightarrow 20 \log\left(\frac{K_{ri} \cdot f_0}{P_{0t} \cdot T_a}\right) + 20 \log(T_i \omega) \\ &\quad - 20 \log(T_i \cdot \tau \cdot \omega^2) - 20 \log(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |H_{fo}(j \cdot \omega)|_{dB} &\rightarrow 20 \log\left(\frac{K_{ri} \cdot f_0}{P_{0t} \cdot T_a}\right) + 20 \log(T_i) \\ &\quad - 20 \log(T_i \cdot \tau) - 40 \log(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |H_{fo}(j \cdot \omega)|_{dB} &\rightarrow 20 \log\left(\frac{K_{ri} \cdot f_0}{P_{0t} \cdot T_a}\right) - 20 \log(\tau) \\ &\quad - 40 \log(\omega) \end{aligned}$$

$$|H_{fo}(j \cdot \omega)|_{dB} \rightarrow 20 \log\left(\frac{K_{ri} \cdot f_0}{P_{0t} \cdot T_a \cdot \tau}\right) - 40 \log(\omega)$$

On retrouve bien une asymptote avec une pente de  $-40 \text{ dB/dec}$ .

On cherche l'intersection avec l'axe des abscisses 0 dB.

$$\begin{aligned} 20 \log\left(\frac{K_{ri} \cdot f_0}{P_{0t} \cdot T_a \cdot \tau}\right) - 40 \log(\omega) &= 0 \\ \log\left(\frac{K_{ri} \cdot f_0}{P_{0t} \cdot T_a \cdot \tau}\right) &= 2 \log(\omega) \end{aligned}$$

d'où la pulsation  $\omega_{0dB}$

$$\omega_{0dB} = \sqrt{\frac{K_{ri} \cdot f_0}{P_{0t} \cdot T_a \cdot \tau}} \approx 0,57 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

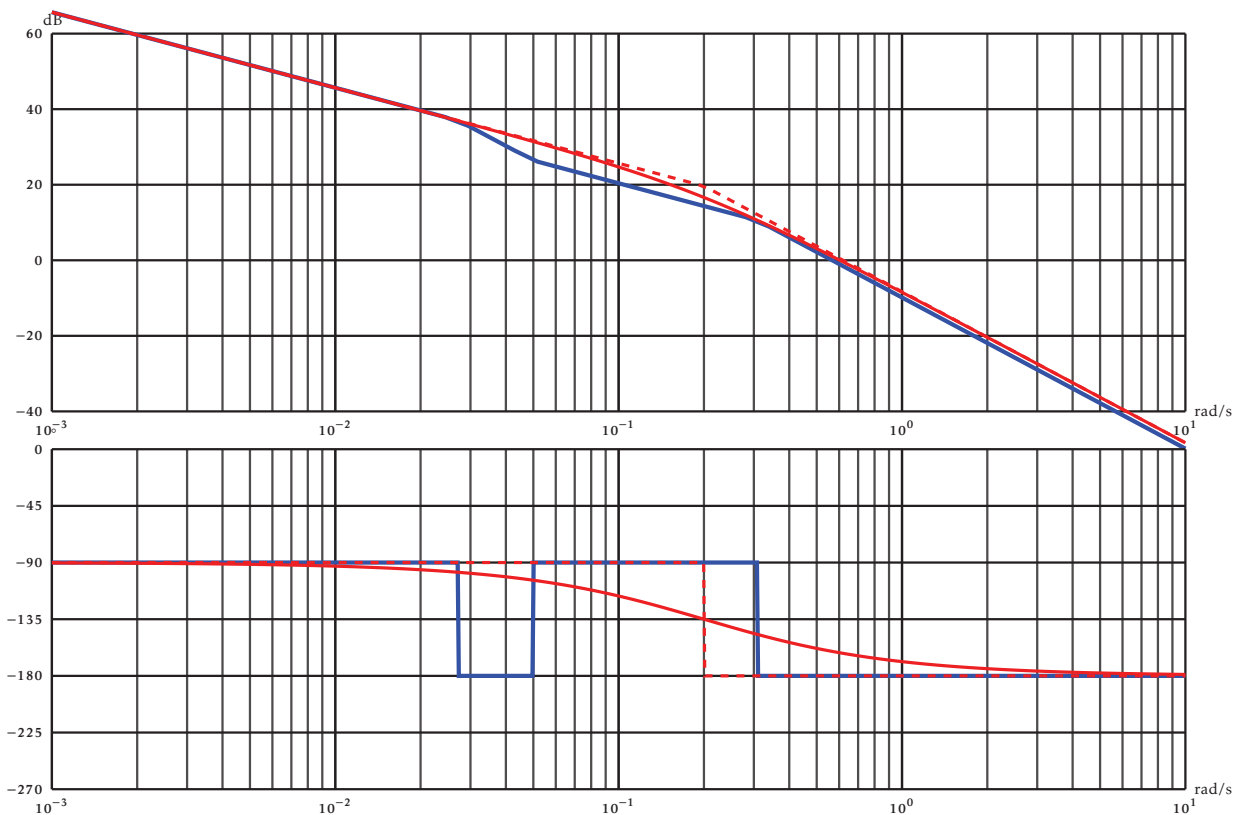
Déterminons l'argument de la FTBO pour  $\omega_{0dB}$ .

Il est plus facile, pour le calculer de prendre la forme avec la décomposition en premier ordre.

$$\begin{aligned} \arg(H_{fo}(j \cdot \omega)) &= \arctan(20\omega) - \arctan(3,25\omega) \\ &\quad - \arctan(36,74\omega) - 90^\circ \end{aligned}$$

$$\arg(H_{fo}(j \cdot \omega_{0dB})) = -154,5^\circ$$

La marge de phase est donc de  $M_\phi = 25,5^\circ > 20^\circ$  le cahier des charges est respecté. La marge de gain est aussi respectée, la courbe de phase ne coupant jamais l'ordonnée  $-180^\circ$ .



Q9. Déterminer la FTBO approchée.

$$\begin{aligned} H_{fo}(p) &= K_{ri} \cdot \frac{1}{1 + 6 \cdot p} \cdot \frac{f_0}{P_{0t} \cdot T_a \cdot p} \\ H_{fo}(p) &= \frac{1,92}{(1 + 6 \cdot p) \cdot p} \end{aligned}$$

**Q10.** Superposer aux diagrammes asymptotiques précédents les diagrammes réels et asymptotiques. Le modèle approché est-il valide?

Le modèle approché se superpose au modèle réel pour les asymptotes finales et initiale, la marge de phase en identique, comme la bande passante. Il diverge légèrement aux niveaux des cassures des diagrammes.

On peut considérer qu'il est valide.

**Q11.** Vérifier alors le critère de rapidité du cahier des charges.

La FTBF s'écrit alors

$$H_f(p) = \frac{\Delta f(p)}{\Delta f_c(p)} = \frac{1,92}{1,92 + p + 6 \cdot p^2}$$

$$H_f(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{1,92} + \frac{6}{1,92} \cdot p^2}$$

d'où

— la pulsation propre  $\omega_n = \sqrt{\frac{1,92}{6}} \approx 0,56 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

— le coefficient d'amortissement  $\xi \approx 0,15$

À partir de l'abaque (pas très précise pour une aussi petite valeur de  $\xi$ ) on lit  $t_{r5\%} \cdot \omega_n \approx 20$  soit  $t_{r5\%} \approx 35 \text{ s} < 40 \text{ s}$ , le cahier des charges est validé pour la rapidité.

## Cor. 2 : Précision et paramètres

Sujet page 12

**Q1.** Déterminer la fonction de transfert  $G(p)$ .

$$p^2 \cdot \Theta(p) + (4 + \alpha) \cdot p \cdot \Theta(p) + 4 \cdot \alpha \cdot \Theta(p) = 4 \cdot U(p)$$

$$G(p) = \frac{\Theta(p)}{U(p)} = \frac{4}{p^2 + (4 + \alpha) \cdot p + 4 \cdot \alpha}$$

$$= \frac{4}{(p + \alpha) \cdot (p + 4)} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{(1 + \frac{p}{\alpha}) \cdot (1 + \frac{p}{4})}$$

**Q2.** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée

$G_F(p) = \frac{\Theta(p)}{\Theta_e(p)}$ . Mettre sous forme canonique.

$$G_F(p) = \frac{K_p \cdot G(p)}{1 + K_p \cdot G(p)} = \frac{4 \cdot K_p}{p^2 + (4 + \alpha) \cdot p + 4 \cdot \alpha + 4 \cdot K_p}$$

$$= \frac{K_F}{1 + \frac{2 \cdot z_F}{\omega_{nF}} p + \frac{p^2}{\omega_{nF}^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_F = \frac{K_p}{K_p + \alpha} \\ \omega_{nF} = 2 \cdot \sqrt{K_p + \alpha} \\ z_F = \frac{4 + \alpha}{4 \cdot \sqrt{K_p + \alpha}} \end{cases}$$

**Q3.** Le système est-il stable?

Pour un système du second ordre, il faut et il suffit que tous les coefficients du dénominateur soient positifs, c'est le cas ici.

**Q4.** Déterminer  $K_p$  pour obtenir un coefficient d'amortissement  $z_F > 0,5$ .

$$z_F = \frac{4 + \alpha}{2 \cdot \sqrt{K_p + \alpha}} > 0,5 \Rightarrow K_p < 0,25 \cdot \alpha^2 + \alpha + 4$$

soit ici pour  $\alpha = 16$ ,  $K_p < 84$ .

**Q5.** Déterminer l'erreur indicielle pour un échelon de température de  $\Theta_0 = 20^\circ\text{C}$  en fonction du paramètre  $\alpha$ . Conclure sur la précision.

$$\varepsilon_i = \lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_e(t) - \theta_s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \Theta_e(p) - G_f(p) \cdot \Theta_e(p))$$

$$\varepsilon_i = \left(1 - \frac{K_p}{\alpha + K_p}\right) \Theta_0 = \frac{\alpha}{\alpha + K_p} \Theta_0$$

Pour  $K_p = 84$  et  $16 \leq \alpha \leq 20$

$$\frac{4}{25} \Theta_0 \approx 3,2^\circ\text{C} \leq \varepsilon_i \leq \frac{5}{26} \approx 3,84^\circ\text{C}$$

Pour diminuer  $\varepsilon_i$ , il faut augmenter  $K_p$  mais cela va rendre le système plus oscillant (diminution de  $z_F$ ).

**Q6.** Déterminer la FTBO pour les valeurs suivantes de  $T_i$  et  $\alpha$ :

—  $T_i = 1/20$ ,  $T_i = 1/16$

—  $\alpha = 20$ ,  $\alpha = 16$

La FTBO devient :

$$BO(p) = C(p) \cdot G(p) = \frac{K_p}{\alpha} \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p \cdot (1 + \frac{p}{\alpha}) \cdot (1 + \frac{p}{4})}$$

—  $T_i = \frac{1}{20}$

—  $\alpha = 20$  :

$$BO_1(p) = \frac{K_p}{p \cdot (1 + \frac{p}{4})}$$

—  $\alpha = 16$  :

$$BO_2(p) = \frac{20 \cdot K_p}{16} \frac{1 + \frac{1}{20} \cdot p}{p \cdot (1 + \frac{p}{16}) \cdot (1 + \frac{p}{4})}$$

—  $T_i = \frac{1}{16}$

—  $\alpha = 20$  :

$$BO_3(p) = \frac{16 \cdot K_p}{20} \frac{1 + \frac{1}{16} \cdot p}{p \cdot (1 + \frac{p}{20}) \cdot (1 + \frac{p}{4})}$$

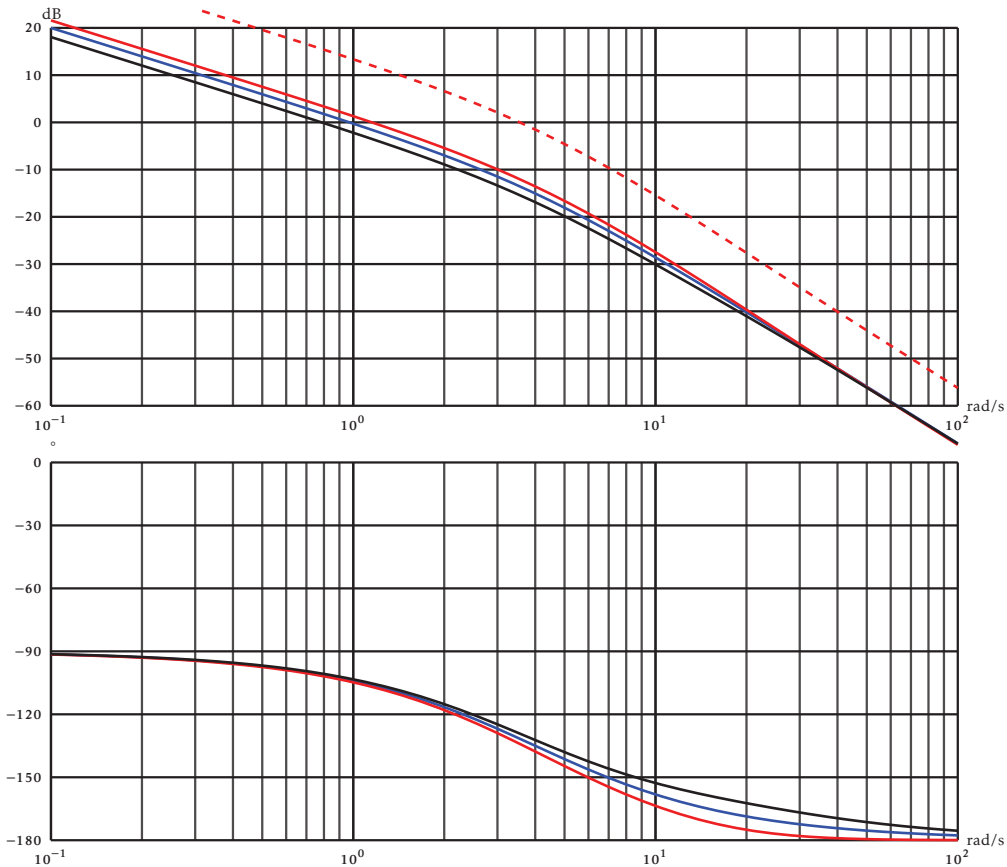
—  $\alpha = 16$  :

$$BO_4(p) = \frac{K_p}{p \cdot (1 + \frac{p}{4})} = BO_1(p)$$

**Q7.** À partir du tracé des diagrammes de Bode de la FTBO pour chacun des cas (on prend  $K_p = 1$ ), déterminer le couple  $(T_i, K_p)$  tel que la marge de phase ( $M_p$ ) soit supérieure à  $45^\circ$  pour toutes les valeurs de  $\alpha$ .

À partir des tracés de  $BO_1(p) = BO_4(p)$ ,  $BO_2(p)$  et  $BO_3(p)$  sur la figure ci-dessous, on constate que la courbe à prendre en compte (la plus « haute ») est le lieu de  $BO_2(p)$  obtenue avec  $T_i = \frac{1}{20}$ . Pour obtenir une marge de phase de  $M_p = 45^\circ$  on peut décaler la courbe vers le haut de 12 dB, d'où  $K_p = 10^{\frac{12}{20}} \approx 4$  (tracé corrigé en pointillé).

**Q8.** La FTBO comporte un intégrateur, le système est donc précis pour une entrée en échelon.



**Cor. 3 : Précision et stabilité**

*Sujet page 13*

**Q1.** Déterminer la fonction de transfert  $O(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$  puis

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} .$$

$$O(p) = H_2(p) \cdot H_3(p) = \frac{15 \cdot k}{p(1+p)} \cdot \frac{1}{1+0.1 \cdot p}$$

$$F(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_2(p) \cdot H_3(p)}$$

$$F(p) = \frac{\frac{15 \cdot k}{p(1+p)}}{1 + \frac{15 \cdot k}{p(1+p)} \cdot \frac{1}{1+0.1 \cdot p}}$$

$$F(p) = \frac{15 \cdot k \cdot (1+0.1 \cdot p)}{(1+0.1 \cdot p) \cdot (p(1+p)) + 15 \cdot k}$$

$$F(p) = \frac{15 \cdot k \cdot (1+0.1 \cdot p)}{0.1 \cdot p^3 + 1.1 \cdot p^2 + p + 15 \cdot k}$$

**Q2.** Déterminer la fonction de transfert  $G(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$  .

$$G(p) = H_1(p) \frac{H_2(p)}{1 + H_2(p) \cdot H_3(p)} = H_1(p) \cdot F(p)$$

$$G(p) = \frac{5}{(1+16p)(1+33p)} \frac{15k(1+0.1p)}{0.1p^3 + 1.1p^2 + p + 15k}$$

**Q3.** Déterminer la valeur finale de  $Y(t)$  pour  $k = 0,5$  et  $k = 5$ .

On ne peut utiliser le théorème de la valeur finale que si le système est stable, vérifions la stabilité.

$G(p)$  est le produit de deux fonctions. Le système est stable si chacune des deux fonctions est stable.

- $H_1(p)$  est un second ordre avec deux racines réelles négatives, il est donc stable.

- $F(p)$  est une fonction du troisième ordre, on ne peut pas répondre directement, il faut étudier la stabilité à partir des diagrammes de Bode de la FTBO (ici  $O(p)$ ).

$O(p)$  est le produit de deux premiers ordres et d'une intégration :

$$O(p) = \frac{15 \cdot k}{p(1+p)} \cdot \frac{1}{1+0.1 \cdot p}$$

Il est possible de calculer les marges de gain et de phase directement.

On sait que la pulsation  $\omega_n$  du second ordre équivalent au produit des deux premiers ordres est :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}} = \sqrt{\frac{1}{0,1}} = \sqrt{10} .$$

Pour cette pulsation  $\omega_n$  le déphasage du second ordre est de  $-90^\circ$ . À ce déphasage s'ajoute le déphasage apporté par l'intégration  $-90^\circ$ , finalement on a

$$\arg(O(j \cdot \omega_n)) = -180^\circ$$

La pulsation  $\omega_{180} = \omega_n = \sqrt{10} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Le module pour cette pulsation est :

$$|O(j \cdot \omega)| = \frac{15 \cdot k}{\omega \cdot \sqrt{1 + \omega^2} \cdot \sqrt{1 + 0,1^2 \cdot \omega^2}}$$

$$|O(j \cdot \omega_{180})| = \frac{15 \cdot k}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{1,1}} = \frac{15}{11} \cdot k$$

Le système est stable si la marge de gain est positive :

$$M_G = -20 \cdot \log(O(j \cdot \omega_{180})) > 0$$

$$O(j \cdot \omega_{180}) < 1$$

$$\frac{15}{11} \cdot k < 1$$

soit

$$k < \frac{11}{15}$$

Le système est stable si  $k < \frac{1,1}{1,5} \approx 0,73$ . On ne peut donc calculer la valeur finale que dans les cas  $k = 0,1$  et  $k = 0,5$ , pour les autres valeurs, le système est instable.

Pour  $k = 0,1$  et  $k = 0,5$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot Y(p))$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \cdot H_1(p) \frac{H_2(p)}{1 + H_2(p) \cdot H_3(p)} \cdot \frac{Y_0}{p} \right)$$

$$= 5 \cdot Y_0$$

Lorsqu'elle existe, la valeur finale ne dépend pas de  $k$ .

#### Cor. 4 : Exosquelette pour le manieement de charges

Sujet page 13

Q1. Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$  en fonction de  $J, K_2$  et  $p$ .

$$H_\Omega(p) = \frac{C_\Omega(p) \cdot M_c(p) \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}{1 + C_\Omega(p) \cdot M_c(p) \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}} \text{ avec } M_c(p) = 1$$

$$H_\Omega(p) = \frac{C_\Omega(p) \frac{1}{J \cdot p + f}}{1 + C_\Omega(p) \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}$$

$$H_\Omega(p) = \frac{K_2 \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}{1 + K_2 \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}} \text{ avec } T_i = \frac{J}{f}$$

$$H_\Omega(p) = \frac{K_2 \frac{1 + \frac{J}{f} \cdot p}{\frac{J}{f} \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}{1 + K_2 \frac{1 + \frac{J}{f} \cdot p}{\frac{J}{f} \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}$$

$$H_\Omega(p) = \frac{K_2 \frac{f + J \cdot p}{J \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}{1 + K_2 \frac{f + J \cdot p}{J \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}} = \frac{K_2}{1 + \frac{K_2}{J \cdot p}}$$

$$H_\Omega(p) = \frac{K_2}{K_2 + J \cdot p}$$

soit sous forme canonique

$$H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + \frac{J}{K_2} \cdot p}$$

Q2. Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\Theta_{mc}(p), H_\Omega(p), K_1$  et  $p$ .

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mc}(p) - \Theta_m(p)$$

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mc}(p) - K_1 \cdot \frac{1}{1 + \frac{J}{K_2} \cdot p} \cdot \frac{1}{p} \cdot \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mc}(p) - \Theta_m(p)$$

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mc}(p) - K_1 \cdot H_\Omega(p) \cdot \frac{1}{p} \cdot \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) \left( 1 + K_1 \cdot H_\Omega(p) \cdot \frac{1}{p} \right) = \Theta_{mc}(p)$$

soit

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + K_1 \cdot H_\Omega(p) \cdot \frac{1}{p}} \cdot \Theta_{mc}(p)$$

Q3. Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Avant de déterminer l'erreur de position, il faut vérifier que le système est stable.

Nous avons déjà déterminé la fonction de transfert en boucle ouverte.

$$B_o(p) = \frac{\Theta_m(p)}{\varepsilon(p)} = K_1 \cdot H_\Omega(p) \cdot \frac{1}{p}$$

d'où la FTBF

$$\frac{\Theta_m(p)}{\Theta_{mc}(p)} = \frac{K_1 \cdot H_\Omega(p) \cdot \frac{1}{p}}{1 + K_1 \cdot H_\Omega(p) \cdot \frac{1}{p}}$$

$$\frac{\Theta_m(p)}{\Theta_{mc}(p)} = \frac{K_1}{\frac{J}{K_2} \cdot p^2 + p + K_1}$$

On a une fonction de transfert du second ordre, elle est stable

## 5.4 Corrigés n°5b

si tous les coefficients du dénominateur sont de même signe, soit ici,  $K_1 > 0$  et  $K_2 > 0$ .

On peut donc utiliser le théorème de la valeur finale.

— Erreur de position :

$$\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \cdot \frac{1}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p)} \cdot \frac{1}{p} \cdot \Theta_{mC}(p) \right)$$

$$\text{avec } \Theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p}{p + K_1 \cdot H_{\Omega}(p)} \right)$$

on a

$$\lim_{p \rightarrow 0} (H_{\Omega}(p)) = 1$$

finalemet

$$\varepsilon_p = 0$$

**Remarque :** On aurait pu répondre directement, la classe de la FTBO étant de 1 (une intégration dans la boucle), on sait que l'erreur pour un échelon est nulle.

— Erreur de traînage.

L'entrée est une rampe unitaire  $\theta_{mC}(t) = t \cdot \mathcal{H}(t)$  ce qui donne pour  $\Theta_{mC}(p) = \frac{1}{p^2}$ .

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \cdot \frac{1}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p)} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p)} \cdot \frac{1}{p} \right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{1}{p + K_1 \cdot H_{\Omega}(p)} \right) = \frac{1}{K_1}$$

On souhaite une erreur de traînage relative de 1%, il faut donc

$$K_1 \geq 100$$

**Q4.** Déterminer l'erreur en accélération  $\varepsilon_a$  et conclure quant au respect du cahier des charges.

On montre de la même manière, que  $\varepsilon_a$  tend vers  $+\infty$ .

Le critère d'erreur en accélération n'est pas respecté.

**Q5.** Déterminer  $H_{2\Theta}(p) = \frac{\Theta_m(p)}{\Theta_{mC}(p)}$ . La fonction de transfert est-elle stable ?

$$\Theta_m(p) = \frac{1}{p \cdot (1 + T \cdot p)} \cdot \left( K_1 \cdot (\Theta_{mC}(p) - \Theta_m(p)) + K_3 \cdot p \cdot \Theta_{mC}(p) \right)$$

$$\Theta_m(p) = \frac{1}{p \cdot (1 + T \cdot p)} \cdot \left( (K_1 + K_3 \cdot p) \cdot \Theta_{mC}(p) - K_1 \cdot \Theta_m(p) \right)$$

$$\Theta_m(p) \left( 1 + \frac{K_1}{p \cdot (1 + T \cdot p)} \right) = \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p)} \cdot \Theta_{mC}(p)$$

$$\Theta_m(p) = \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \cdot \Theta_{mC}(p)$$

La fonction de transfert a un dénominateur du second ordre et un numérateur du premier ordre, le système est stable si les coefficients du dénominateur sont de même signe, c'est le cas.

**Q6.** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction  $\Theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mC}(p) - \Theta_m(p)$$

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mC}(p) - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \cdot \Theta_{mC}(p)$$

$$\varepsilon(p) = \left( 1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \Theta_{mC}(p)$$

**Q7.** Le modèle par anticipation a-t-il une influence sur l'erreur de position  $\varepsilon_p$  ?

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \cdot \left( 1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \Theta_{mC}(p) \right)$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \cdot \left( 1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \frac{1}{p} \right)$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{K_1}{K_1} \right) = 0$$

Le modèle par anticipation n'a pas d'influence sur l'erreur de position.

**Q8.** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant d'annuler cette erreur.

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \cdot \left( 1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \Theta_{mC}(p) \right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \cdot \left( 1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \left( 1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \frac{1}{p} \right)$$