

# Feuille n°4 : dynamique

## Exercice 1 - Cellule de découpe de verre

Corrigé page 9

Le dispositif étudié permet le basculement d'une table chargée d'une vitre de la position de prise de vitre à la position horizontale en vue du transfert vers une table de découpe (figure 1). On se propose de déterminer les caractéristiques des vérins. Le modèle d'étude est présenté sur la figure 2a.

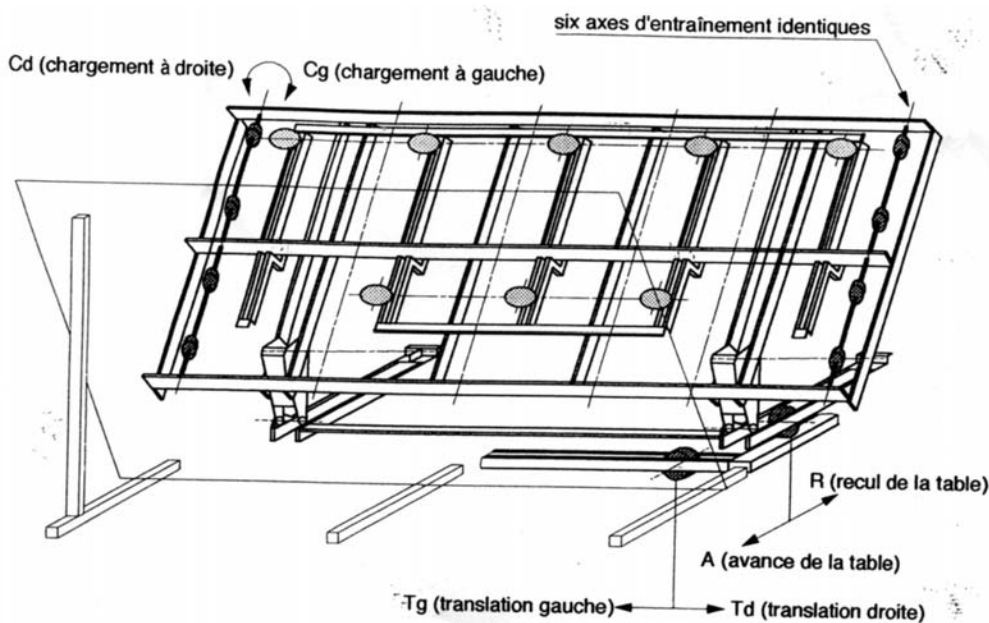


FIGURE 1 – Poste de basculement

On admettra que le mouvement de la table basculante est uniformément varié (figure 2b) et que le moment d'inertie de l'ensemble mobile  $S = \{ \text{table, ventouse, plaque de verre, ...} \}$  autour de l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  est noté  $J$  avec  $J = 670 \text{ kgm}^2$ . La masse de l'ensemble est  $m = 500 \text{ kg}$ . L'amplitude du mouvement est de  $110^\circ$  et s'effectue en 55 s.

Hypothèses complémentaires :

- les liaisons sont parfaites ;
- la liaison entre la tige et le corps du vérin est modélisée par une liaison pivot glissant (on notera  $2_C$  le corps du vérin et  $2_T$  la tige) ;
- le mécanisme est plan ;
- toutes les masses et inerties sont négligeables devant celle de l'ensemble  $S$ .

Q1. Tracer le graphe des liaisons du mécanisme.

Q2. Établir l'inventaire des efforts extérieurs au système  $S$ .

Q3. Montrer que l'action en A du vérin sur la table est de la forme  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = F \cdot \vec{x}_2$ .

Q4. On modélise l'ensemble mobile par une plaque rectangulaire d'épaisseur négligeable de longueur  $h$  (suivant  $\vec{z}_0$ ) et de largeur  $2 \cdot l$  (suivant  $\vec{x}_1$ ). Déterminer  $J$  en fonction de  $l$  et  $h$ .

Q5. Déterminer le moment dynamique de l'ensemble mobile  $S$  dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé au bâti 0.

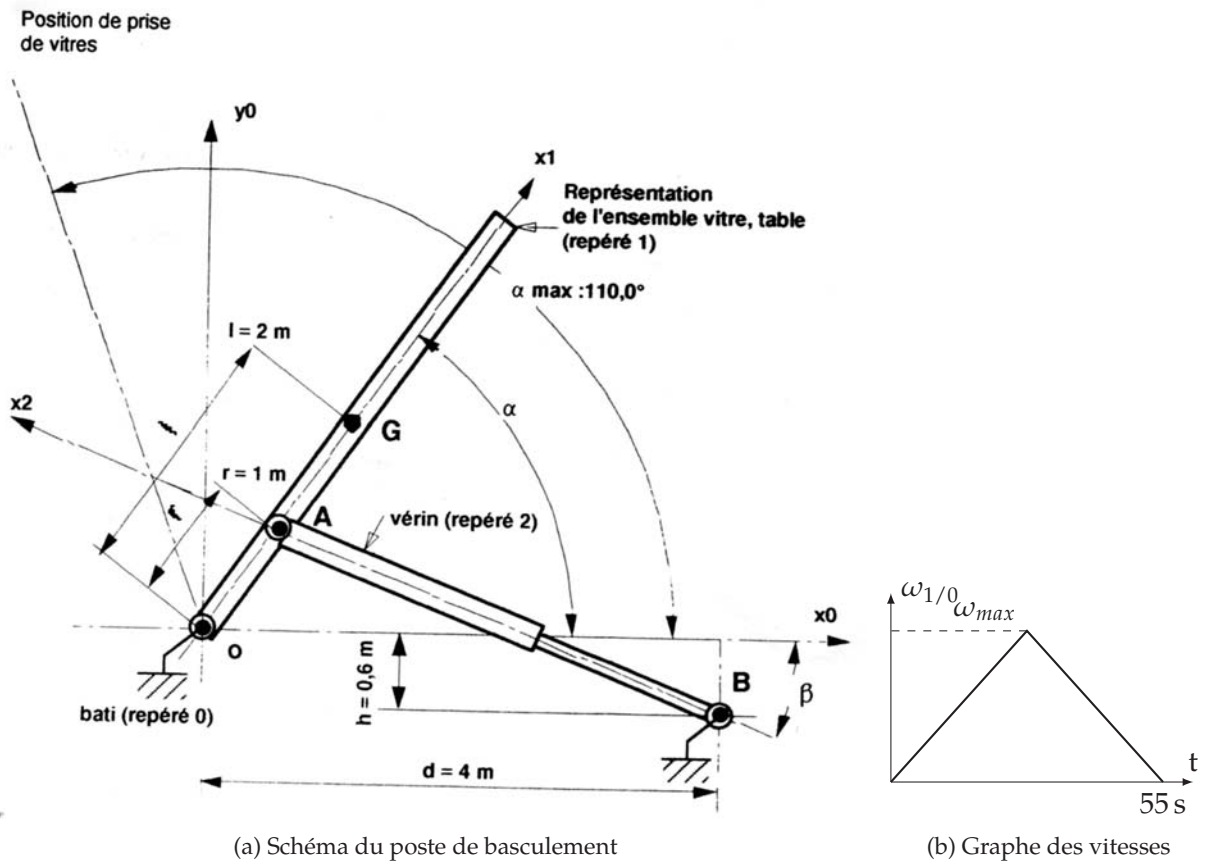


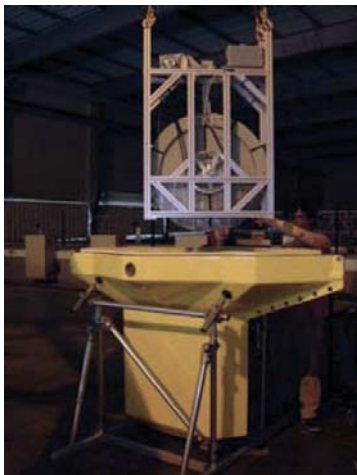
FIGURE 2

- Q6. Écrire le théorème du moment dynamique en O en projection sur  $\vec{z}_0$ .
- Q7. En déduire F en fonction des paramètres du mouvement  $\alpha$  et  $\beta$  et de leurs dérivées.
- Q8. Montrer que F est maximal pour  $\alpha = 0$ .

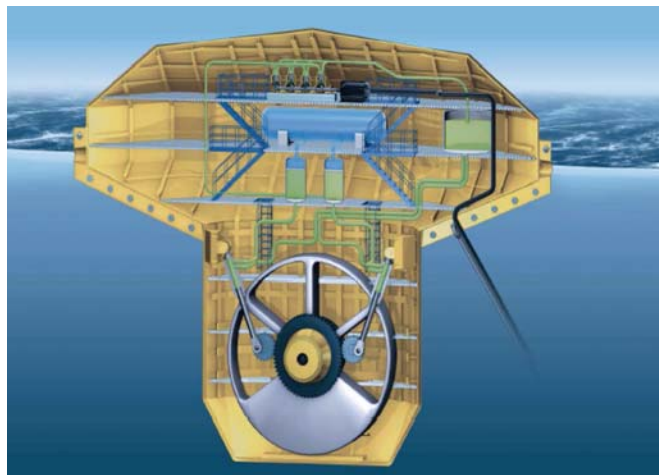
## A. Présentation

Les ressources en énergie fossile baissent inexorablement, et les scientifiques sont à la recherche de solutions de remplacement durables. La consommation annuelle d'énergie mondiale est de  $140 \times 10^{12}$  kWh ce qui représente environ 1/8000ème de l'énergie solaire arrivant sur terre.

La production mondiale d'électricité représente quant à elle  $17 \times 10^{12}$  kWh. L'énergie solaire est à l'origine de la formation de la houle qui représente une énergie nette disponible évaluée entre 140 et 700 TWh/an d'après le WEC (World Energy Council), soit 1 à 5% de la demande mondiale en électricité. La puissance moyenne par mètre de front de vague se situe entre 10 et  $100 \text{ kW m}^{-1}$ . Même si cette ressource reste limitée face à la demande globale en énergie, elle n'en reste pas moins exploitable, particulièrement en France où la façade maritime est l'une des plus importantes d'Europe. C'est pourquoi les laboratoires de recherche de l'École Centrale de Nantes, et de l'École Normale Supérieure de Rennes travaillent actuellement au développement d'un prototype de houlogénératrice (projet SEAREV – Système Électrique Autonome de Récupération de l'Énergie des Vagues–).



(a) Prototype SEAREV Centrale Nantes



(b) Image de synthèse du système SEAREV

FIGURE 3 – Système SEAREV

Il s'agit d'un flotteur ancré au large dans lequel est placé un pendule constituant le rotor d'une génératrice synchrone. L'énergie produite est adaptée afin d'être acheminée à la côte et injectée sur le réseau de transport EDF.

La structure de la chaîne de conversion électromécanique de la houlogénératrice est donnée figure 4. Elle s'inspire des solutions employées dans les éoliennes à génératrice synchrone à large plage de vitesse et vitesse variable.

L'adaptation de l'énergie électrique produite par la génératrice synchrone au réseau de transport s'effectue en deux étapes :

- un convertisseur alternatif continu assure le contrôle de la génératrice et en particulier le couple résistant qu'elle oppose au mouvement du balancier, à partir d'une loi de commande fixant le couple optimum en fonction de la vitesse du balancier ;
- un convertisseur continu-alternatif côté réseau maintient la tension du bus continu à la tension souhaitée en injectant de la puissance active sur le réseau en fonction de la puissance produite par la génératrice.

Pour que ce projet soit économiquement viable, et débouche sur une mise en œuvre industrielle rapide il est impératif de minimiser le coût du kWh produit. Pour cela on cherche à maximiser l'énergie récupérée de la houle

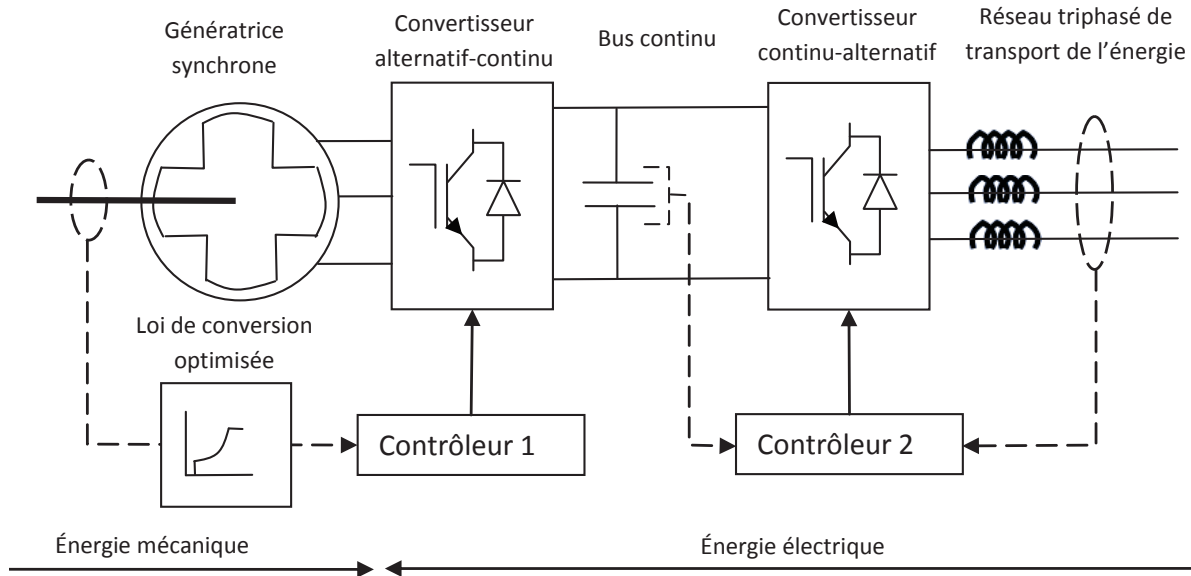


FIGURE 4 – Structure de la chaîne de conversion d'énergie

## B. Détermination de l'énergie récupérable par le flotteur

Objectif :

Dans cette partie nous allons déterminer la puissance moyenne récupérable par l'ensemble flotteur et pendule. Pour cela, on se propose à partir des équations du mouvement d'établir un modèle du convertisseur mécanique afin d'analyser son comportement et de choisir un point de fonctionnement permettant de maximiser l'énergie récupérable à l'aide d'une optimisation numérique.

### B.1. Description

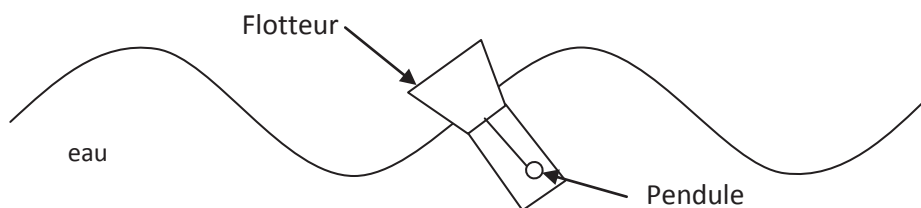


FIGURE 5 – Modélisation de la houle

Toute l'étude se fera en considérant un système plan, la surface de l'eau est modélisée par une sinusoïde fonction de l'espace et du temps, tous les mouvements ont lieu dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . On fait l'hypothèse forte que l'orientation du flotteur suit la tangente à la surface de l'eau, ce qui induit un mouvement de tangage (voir figure 5).

La houlogénératrice est constituée d'un flotteur 1 et d'un pendule 2 évoluant par rapport à la Terre 0 (figure 6). Les deux solides 1 et 2 sont en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z})$ . La génératrice synchrone placée sur l'axe de liaison permet de récupérer une partie de l'énergie des vagues.

### B.2. Paramétrage

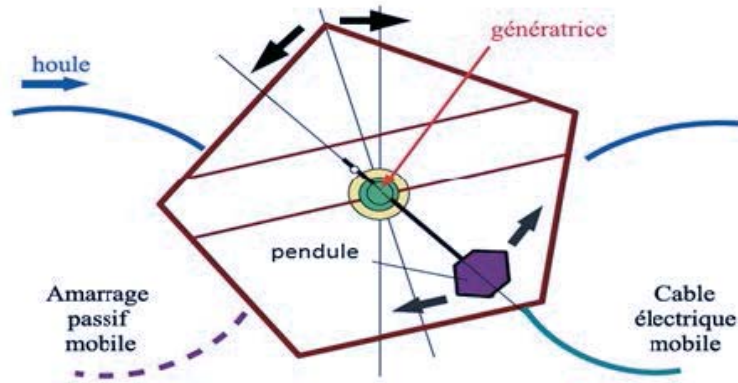
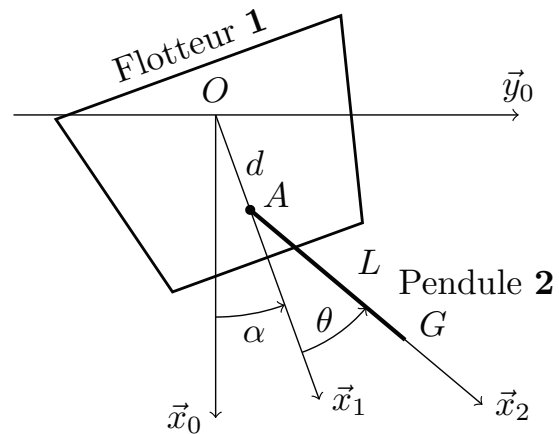


FIGURE 6 – Principe du fonctionnement de la houlogénératrice SEAREV sur l'eau

Le point  $O$  (figure 7), origine du repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ , est fixe par rapport à la terre et à l'altitude nulle. Le vecteur  $\vec{x}_0$  a pour direction la verticale, le vecteur  $\vec{y}_0$  a pour direction l'horizontale. La base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  est liée au flotteur 1 et la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  est liée au pendule 2. Le mouvement de tangage du flotteur induit par la houle se traduit ici par une rotation du flotteur 1 par rapport à la Terre 0 autour de l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ . Le paramètre angulaire est l'angle  $\alpha$ . L'axe de la liaison pivot entre le flotteur 1 et le pendule 2 est l'axe  $(A, \vec{z})$ , le point  $A$  est paramétré par  $\vec{OA} = d \cdot \vec{x}_1$ . Le paramètre angulaire est l'angle  $\theta$ . Le centre d'inertie du pendule 2 est le point  $G$  tel que  $\vec{AG} = L \cdot \vec{x}_2$ .



(a) Descriptif de la houlogénératrice

### B.3. Hypothèses

- Un référentiel lié à la Terre est supposé galiléen.
- Le flotteur est toujours à la surface de l'eau.
- Le flotteur est toujours incliné suivant la tangente à la surface de l'eau. On en déduit une variation de  $\alpha$  donnée par  $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$  en ayant noté  $t$  le temps,  $\omega$  la pulsation de la houle et  $\alpha_0$  l'amplitude angulaire du mouvement de tangage du flotteur.
- Le couple que la génératrice applique sur le pendule 2 est de la forme  $\vec{C}_r = C_r \cdot \vec{z} = -\lambda \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}$
- L'ensemble flottant est soumis :
  - à l'action de la pesanteur ;
  - à l'action de l'eau.

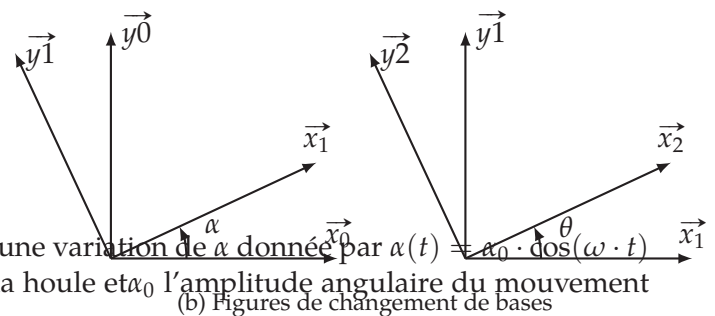


FIGURE 7 – paramétrage

### B.4. Caractéristiques d'inertie du flotteur et du pendule

### B.5. Modélisation du pendule

Le pendule est un solide cylindrique évidé (voir figure 3 et figure 20). Sa masse est de 272 tonnes. Il est en acier. La distance entre l'axe de la liaison pivot flotteur-pendule et le centre de gravité  $G$  du pendule est de  $L = 1,35$  m.

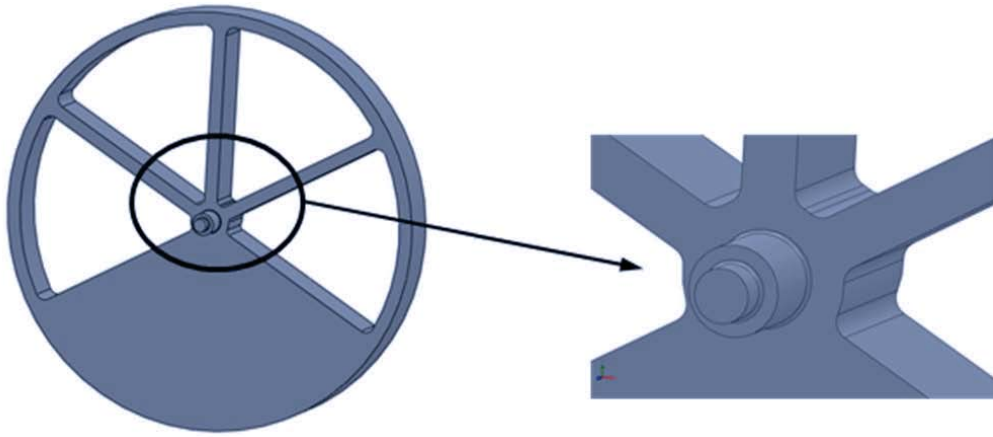
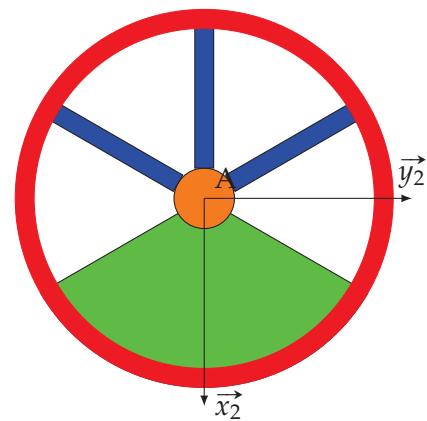


FIGURE 8 – Pendule

On modélise le pendule par :

- une couronne de rayon  $R_e$  de largeur  $e$ , de hauteur  $h$ ;
- un moyeu central de rayon  $R_i$  de hauteur  $2 \cdot h$ ;
- un secteur angulaire de  $120^\circ$ , de rayon extérieur  $R_e - e$  de rayon intérieur  $R_i$  et de hauteur  $h$ ;
- de trois bras rectangulaires à  $60^\circ$ , de largeur  $e$  de hauteur  $h$  entre le moyeu central et la couronne.



**Q1.** Donner la forme de la matrice.

**Q2.** Déterminer le moment d'inertie autour de l'axe  $(A, \vec{z})$ .

**Q3.** Déterminer la position du entre d'inertie  $G$ .

### B.6. Équation du mouvement

La masse du flotteur 1 est notée  $m_1$ , la masse du pendule 2 est notée  $m_2$ . Le moment d'inertie du pendule 2 autour de l'axe  $(A, \vec{z})$  est noté  $J$ . Les produits d'inertie relatifs à la direction  $\vec{z}$  du pendule 2 sont nuls.

**Q4.** Déterminer la vitesse du point A du flotteur 1 dans son mouvement par rapport à la Terre 0 :  $\vec{V}_{A \in 1/0}$ .

**Q5.** Déterminer la vitesse du point G du pendule 2 dans son mouvement par rapport à la Terre 0 :  $\vec{V}_{G \in 2/0}$ .

**Q6.** Déterminer le moment cinétique du pendule 2 dans son mouvement par rapport à la Terre 0 au point A :  $\vec{\sigma}_{A,2/0}$ .

**Q7.** Déterminer le moment dynamique du pendule 2 dans son mouvement par rapport à la Terre 0 au point A :  $\vec{\delta}_{A,2/0}$ .

**Q8.** Déterminer les moments au point A des actions extérieures s'appliquant sur le pendule 2.

**Q9.** Écrire l'équation du mouvement qui régit l'évolution de  $\theta$ , en fonction de  $\alpha$  et des constantes du problème.

**Q10.** Linéariser l'équation précédente (en supposant les variations d'angles petites et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur ou égal à 2) et la mettre sous la forme  $f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = g(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$  avec  $f$  et  $g$  des fonctions à déterminer.

**Exercice 3 - Hydro-nettoyeur**

d'après Centrale TSI99

Corrigé page 11

**A. Mise en situation – paramétrage**

Le schéma technologique (figure 9) représente la pompe hydraulique d'un hydro-nettoyeur (figure 10). Cet hydro-nettoyeur assure lui-même la production d'eau chaude et la mise sous pression de l'eau grâce à la pompe hydraulique. La pompe comporte 5 pistons répartis régulièrement. L'arbre moteur entraîne dans sa rotation un plateau dont l'axe est incliné d'un angle  $\alpha = 10^\circ$ , le mouvement oscillant du plateau entraîne les pistons en translation.

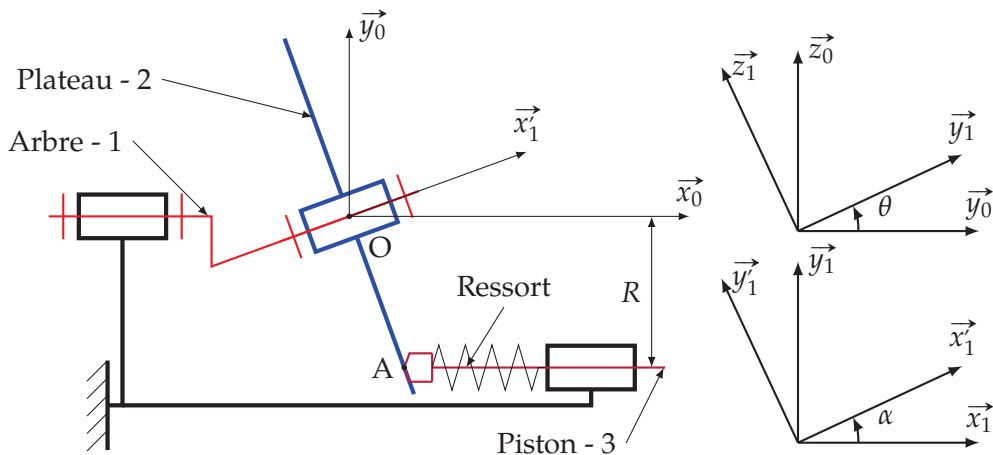


FIGURE 9 – Schéma technologique

—  $R = 18 \text{ mm}$ ,—  $\alpha = 10^\circ$ — masse du piston :  $m = 100 \text{ g}$ 

— vitesse de rotation du moteur

 $N = 3\,000 \text{ tr/min}$ **B. Modélisation cinématique**

**Q1.** On modélise dans un premier temps la liaison entre le piston et le plateau par une liaison ponctuelle.

**Q1a.** Tracer le graphe de structure du mécanisme pour un seul piston.

**Q1b.** Après avoir donné le degré de mobilité (en détaillant les divers mouvements correspondants), calculer le degré d'hyperstatisme du mécanisme.

On modélise maintenant la liaison entre le piston et le plateau par une liaison cylindre plan plus conforme avec la réalisation réelle.

**Q2.** Le degré de mobilité est-il modifié? Calculer le degré d'hyperstatisme. Pourquoi a-t-on réalisé un contact linéaire entre le piston et le plateau?

**C. Détermination du ressort de rappel**

On se propose dans cette partie de déterminer la raideur  $k$  minimale pour que le contact soit toujours maintenu entre le piston et le plateau.

— Pendant la phase de refoulement la pression appliquée sur la face avant du piston est de 100 bar l'effort développé par le ressort est négligeable devant les efforts dus à la pression.

— Pendant la phase d'aspiration, on ne prendra en compte que l'effort développé par le ressort.

— Le ressort de raideur  $k$ , est écrasé de la valeur  $e = 20 \text{ mm}$  lorsque le piston est en position point mort droit (fin de refoulement, début d'aspiration). L'écrasement total  $e$  est supérieur à la course du piston.

— Le poids des différentes pièces est négligeable devant les autres actions mécaniques.

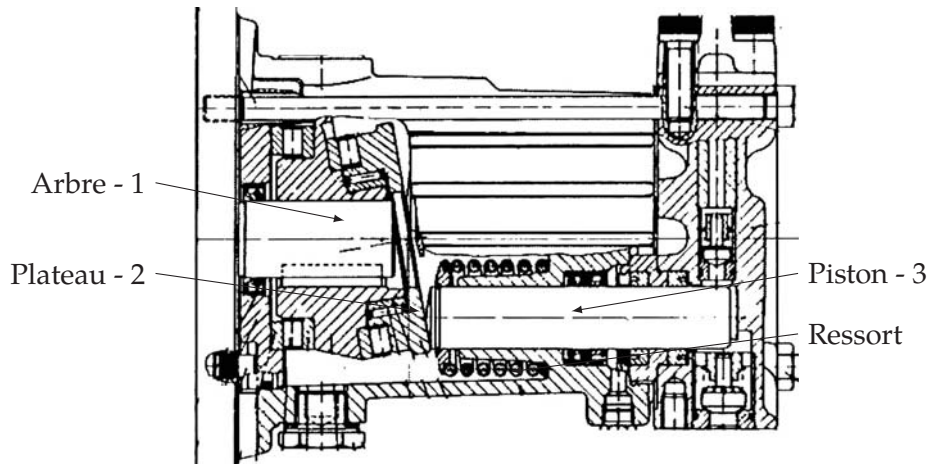


FIGURE 10 – Hydronettoyeur

— Les liaisons sont supposées parfaites.

On supposera dans cette partie que le contact en A est ponctuel.

**Q3.** Étude cinématique préalable

**Q3a.** Justifier que pour le point A, on peut écrire,

$$\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{x}_0 - R \cdot \vec{y}_0 \text{ et } \overrightarrow{OA} \cdot \vec{x}_1 = 0;$$

**Q3b.** En déduire  $x_A = R \cdot \tan \alpha \cdot \cos \theta$ ;

**Q3c.** Déterminer  $\overrightarrow{V_{G \in 3/0}}$ , la vitesse du centre d'inertie G du piston, puis  $\overrightarrow{\Gamma_{G \in 3/0}}$ .

**Q4.** Inventaire des efforts extérieurs au piston

**Q4a.** Écrire le torseur des actions transmissibles par la liaison entre le plateau et le piston en A, d'abord dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  puis dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Écrire le torseur des actions transmissibles par la liaison entre le piston et le bâti.

**Q4b.** Donner l'expression de l'action exercée par le ressort sur le piston en fonction de  $k, e, \theta, \alpha$  et les autres paramètres géométriques.

**Q5.** Écrire l'équation de la résultante suivant  $\vec{x}_0$  issue de l'application du principe fondamental de la dynamique appliqué au piston.

**Q6.** À quelle condition n'y a-t-il pas rupture de contact en A? En déduire la valeur minimale de la raideur  $k$  du ressort.