Chapitre 11

Principe fondamental de la statique

Le principe fondamental de la statique (P.F.S.) exprime les conditions d'équilibre d'un système matériel dans un référentiel.

11.1 Définitions préalables

11.1.1 Système matériel - Système matériel isolé

On appelle système matériel tout ensemble constitué de solides et de fluides.

Un système isolé, est un système matériel que l'on rend distinct de son environnement. Le système isolé peut être une pièce mécanique, un ensemble de pièces, une partie de pièce, un fluide. L'isolement consiste à couper l'espace en deux parties disjointes afin de séparer, le système isolé (Σ) de son environnement ($\overline{\Sigma}$).

On nomme frontière d'isolement la limite entre les deux milieux.

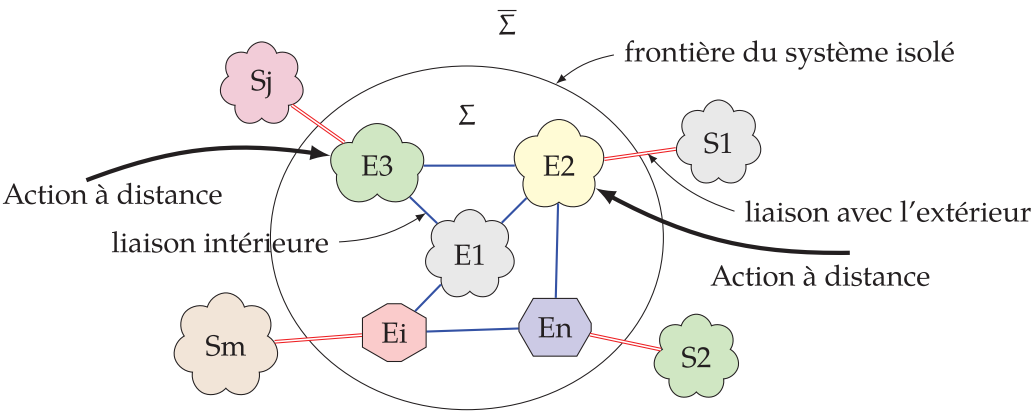


Figure 11.1 – Système isolé

11.1.2 Équilibre d'un système matériel

On dit qu'un système est en équilibre par rapport à un repère $\mathcal{R}0$ entre deux dates t_1 et t_2 si tous les points du système isolé sont invariants dans $\mathcal{R}0$.

11.1.3 Équilibre d'un ensemble de solide

Pour qu'un système composé d'un ensemble de solides soit en équilibre, il faut et il suffit que :

- il soit en équilibre à l'instant de l'étude,
- chacun des solides qui le composent soit en équilibre.

11.1.4 Actions mécaniques extérieures

On appelle action mécanique extérieure appliquée à un système matériel isolé, toutes les actions mécaniques agissant sur ce système, dont l'origine est à l'extérieur du système. Ces actions sont : soit des actions mécaniques de contact, soit des actions à distance (gravité).

$$\{\mathcal{A}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{P,\overline{\Sigma}\to\Sigma}} \end{Bmatrix}_P$$

11.1.5 Actions mécaniques intérieures

Les actions mécaniques intérieures sont les actions mécaniques que s'exercent mutuellement les différents constituants du système isolé.

Remarque : la notion d'actions mécaniques extérieures et intérieures ne dépend que de la frontière du système isolé.

11.2 Principe fondamental de la statique - P.F.S.

11.2.1 Énoncé

Il existe au moins un repère galiléen tel que pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à ce repère, le torseur représentatif des actions extérieures qui lui sont appliquées est égal au torseur nul :

$$\{\mathcal{A}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\} = \{0\}$$

soit

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{P,\overline{\Sigma}\to\Sigma}} \end{Bmatrix}_P = \{0\}$$

En décomposant le torseur des actions extérieures chaque action extérieure on peut écrire :

$$\{\mathcal{A}_{S_1\to E_1}\} + \{\mathcal{A}_{S_2\to E_2}\} + \{\mathcal{A}_{S_i\to E_j}\} + \cdots = \{0\}$$

puis en sommant chaque torseur au même point :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{S_1\to E_1}} \\ \overrightarrow{M_{P,S_1\to E_1}} \end{Bmatrix}_P + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{S_2\to E_2}} \\ \overrightarrow{M_{P,S_2\to E_2}} \end{Bmatrix}_P + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{S_i\to E_j}} \\ \overrightarrow{M_{P,S_i\to E_j}} \end{Bmatrix}_P + \ldots = \{0\}$$

$$\sum_i \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{S_i\to E_j}} \\ \overrightarrow{M_{P,S_i\to E_j}} \end{Bmatrix}_P = \{0\}$$

Remarque : le principe fondamental de la statique est énoncé dans un repère galiléen, compte tenu des mécanismes étudiés et dans la mesure ou la durée de l'étude est courte, un repère lié à la terre est une bonne approximation. La notion de repère galiléen sera approfondi en seconde année et dans le cours de physique.

Remarque : la condition

$$\left\{\mathcal{A}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\right\} = \left\{0\right\}$$

appliquée à un ensemble de solides n'implique pas que l'ensemble est en équilibre. Il est nécessaire de vérifier que chaque solide constituant l'ensemble est lui-même en équilibre.

11.2.2 Théorèmes généraux

À partir de

$$\sum_{i,j} \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_{S_i\to E_j}} \\ \overrightarrow{M_{P,S_i\to E_j}} \end{matrix} \right\}_P = \left\{0\right\}$$

soit

$$\left\{ \begin{matrix} \sum_{i,j} \overrightarrow{R_{S_i\to E_j}} \\ \sum_{i,j} \overrightarrow{M_{P,S_i\to E_j}} \end{matrix} \right\}_P = \left\{0\right\}$$

on déduit les deux théorèmes généraux de la statique.

a) Théorème de la résultante statique

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un repère galiléen, la résultante du torseur représentatif des actions extérieures appliquées à (E) est un vecteur nul.

$$\overrightarrow{R_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}} = \vec{0}$$
$$\sum_{i,j} \overrightarrow{R_{S_i\to E_j}} = \vec{0}$$

b) Théorème du moment statique

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un repère galiléen, le moment du torseur représentatif des actions extérieures appliquées à (E) est un vecteur nul.

$$\overrightarrow{M_{P,\overline{\Sigma}\to\Sigma}} = \vec{0}$$
$$\sum_{i,j} \overrightarrow{M_{P,S_i\to E_j}} = \vec{0}$$

c) Écriture scalaire du principe fondamental de la statique

L'équilibre d'un ensemble matériel Σ est décrit par un système linéaire de 6 équations, 3 équations pour traduire le théorème de la résultante statique et 3 pour le moment statique.

$$\begin{cases} \sum_i X_i = 0 \\ \sum_i Y_i = 0 \\ \sum_i Z_i = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sum_i L_i = 0 \\ \sum_i M_i = 0 \\ \sum_i N_i = 0 \end{cases}$$

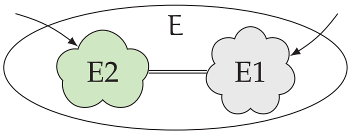
avec X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i et N_i les composantes des actions mécaniques extérieures à Σ.

11.2.3 Théorème des actions réciproques

L'action mécanique du système (E1) sur le système (E2) est opposée à l'action mécanique de (E2) sur (E1).

$$\{\mathcal{A}_{2\to 1}\} = -\{\mathcal{A}_{1\to 2}\}$$

Pour le démontrer, considérons un système matériel (E) composé de deux systèmes matériels $E = \{E1 + E2\}$.



On applique le P.F.S. successivement à (E1) , (E2) et (E).

— On isole E1, le P.F.S. s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{\overline{1}\to 1}\} = \{0\} \quad \text{or } \overline{1} = 2 + \overline{E}$$

$$\{\mathcal{A}_{2\to 1}\} + \{\mathcal{A}_{\overline{E}\to 1}\} = \{0\}$$

— On isole E2, le P.F.S. s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{\overline{2}\to 2}\} = \{0\} \quad \text{or } \overline{2} = 1 + \overline{E}$$

$$\{\mathcal{A}_{1\to 2}\} + \{\mathcal{A}_{\overline{E}\to 2}\} = \{0\}$$

— On isole E, le P.F.S. s'écrit en faisant apparaître les solides 1 et 2 :

$$\{\mathcal{A}_{\overline{E}\to E}\} = \{\mathcal{A}_{\overline{E}\to\{E_1+E_2\}}\} = \{0\}$$

On obtient :

$$\{\mathcal{A}_{\overline{E}\to E_1}\} + \{\mathcal{A}_{\overline{E}\to E_2}\} = \{0\}$$

Finalement on trouve en ajoutant les trois égalités $(a) + (b) - (c)$, la relation recherchée.

$$\{\mathcal{A}_{2\to 1}\} = -\{\mathcal{A}_{1\to 2}\}$$

11.2.4 Principe fondamental de la statique pour un ensemble de solides

Pour un système composé de N solides, ce système est en équilibre si chaque solide le composant est en équilibre.

Il est donc nécessaire d'écrire le P.F.S. sur $(N-1)$ solides ou ensemble de solide. Il n'est pas utile d'écrire le P.F.S. sur le dernier solide, celui-ci peut s'obtenir par combinaison linéaire des autres équilibres.

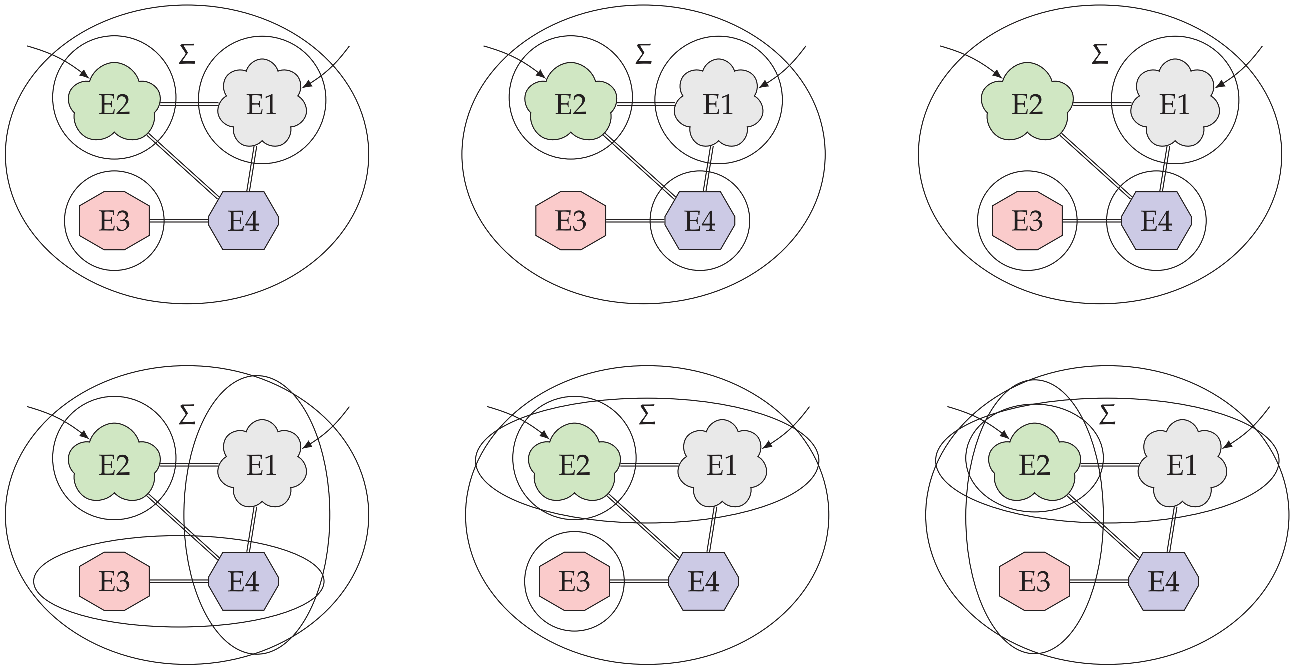


Figure 11.2 – Quelques isolements possibles de 4 solides

La figure 11.2 présente quelques possibilités d'isolement d'un mécanisme de 4 solides. Chaque solide peut être isolé seul, ou associé à d'autres.

Tous ces isolements vont donner le même résultat mais pas nécessairement la même quantité de calcul. Il faut donc s'attacher lors d'une résolution à limiter le nombre d'équations et d'inconnues en choisissant judicieusement les isolements.

Pour les cas de la figure 11.2 l'étude complète comprend : $E_s = 6 \cdot (N-1) = 18$ équations avec $I_s = \sum_i ns_i$ inconnues (avec ns_i le nombre d'inconnues de liaison de chaque liaison).

11.3 Résolution d'un problème de statique

11.3.1 Mécanismes spatiaux - Cas général

On peut classer les problèmes de statique dans deux familles, suivant que l'on s'intéresse à la relation entre les efforts « extérieurs » appliqués sur le système ou aux efforts dans les liaisons en fonction des efforts extérieurs connus.

Dans le premier cas on essaiera d'identifier les équations extraites du P.F.S. juste nécessaires pour obtenir le résultat cherché, dans l'autre cas il sera souvent nécessaire de tout écrire.

a) Domaine d'utilisation du P.F.S.

Le P.F.S. est utilisé pour déterminer les actions mécaniques d'un mécanisme immobile. Il peut aussi être utilisé lorsque les vitesses des solides sont constantes (en translation) et/ou que les masses et inerties des solides sont négligeables.

b) Procédure de résolution du problème

Analyser le mécanisme, c'est-à-dire :

— Caractérisation du mécanisme :
  — préciser les classes d'équivalence cinématique,
  — définir les liaisons (torseurs des actions transmissibles),
  — établir le graphe de structure,
  — faire le bilan des inconnues de liaison,
  — préciser si nécessaire les liaisons parfaites ou non.

— Identifier les efforts appliqués sur le mécanisme :
  — action à distance (poids),
  — efforts extérieurs, moteur, vérin, ressort, etc,
  — efforts intérieurs,
  — placer ces efforts sur le graphe de structure.

— Définir les ensembles à isoler (pièce seule ou ensemble de pièces) :
  — choisir les ensembles en fonction du nombre d'inconnues par isolement, essayer de ne faire que des isolements que l'on peut résoudre (6 inconnues au maximum) ou qui donne rapidement des informations pour la suite des calculs, commencer par :
    — solide ou ensemble de solides soumis à 2 glisseurs (voir chapitre 11.3.2),
    — solide ou ensemble de solides soumis à 3 glisseurs (voir chapitre 11.3.3).

— Résoudre progressivement le système :
  — écrire le P.F.S. sur chaque sous-système isolé du moins complexe vers le plus complexe,
  — intégrer les résultats des isolements précédents avant de poursuivre l'application du P.F.S.

11.3.2 Solide soumis à 2 glisseurs

Soit un solide soumis à deux actions mécaniques une en A, l'autre en B représentables par des torseurs glisseurs.

$$\left\{\mathcal{T}_{A_{ext\to1}}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_A}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A \quad \text{et} \quad \left\{\mathcal{T}_{B_{ext\to1}}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_B}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_B$$

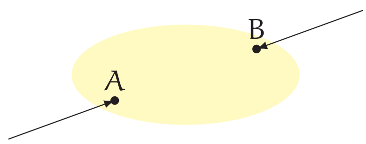


FIGURE 11.3 – Solide soumis à 2 glisseurs

Alors les deux résultantes :

— ont même norme $\|\overrightarrow{R_A}\| = \|\overrightarrow{R_B}\|$,

— et sont de direction opposée $\overrightarrow{R_A} = -\overrightarrow{R_B}$ portées par $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.

Remarque : par abus de langage on dira « solide soumis à deux glisseurs » pour « solide soumis à deux actions mécaniques représentables par des torseurs glisseurs ».

Pour vérifier, il suffit d'appliquer le P.F.S. au solide en A.

$$\left\{\mathcal{T}_{A_{ext\to1}}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{B_{ext\to1}}\right\} = \left\{0\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_A}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_B}\\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_B}\end{matrix}\right\}_A = \left\{0\right\}$$

On a bien

$$\overrightarrow{R_A} = -\overrightarrow{R_B} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_B} = \vec{0}$$

Le produit vectoriel est nul si $\overrightarrow{R_B}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

11.3.3 Solide soumis à 3 glisseurs

Soit un solide soumis à l'action de 3 torseurs glisseurs, en A, B et C,

$$\left\{\mathcal{T}_{A_{ext\to 1}}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_A}\\ \overrightarrow{0}\end{matrix}\right\}_A, \quad \left\{\mathcal{T}_{B_{ext\to 1}}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_B}\\ \overrightarrow{0}\end{matrix}\right\}_B \quad \text{et} \quad \left\{\mathcal{T}_{B_{ext\to 1}}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_C}\\ \overrightarrow{0}\end{matrix}\right\}_C$$

- alors les trois droites supports sont coplanaires et
  - soit les trois droites supports des résultantes sont concourantes en I ;
  - soit les trois résultantes sont parallèles.

Montrons dans un premier temps la coplanarité :
Le P.F.S. en A s'écrit :

$$\left\{\mathcal{T}_{A_{ext\to 1}}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{B_{ext\to 1}}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{B_{ext\to 1}}\right\} = \left\{0\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_A}\\ \overrightarrow{0}\end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_B}\\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_B}\end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_C}\\ \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{R_C}\end{matrix}\right\}_A = \left\{0\right\}$$

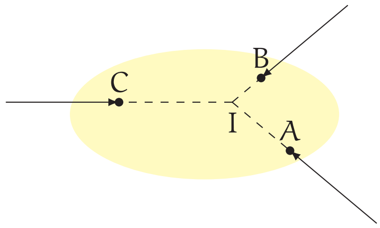


FIGURE 11.4 – Solide soumis à 3 glisseurs

Le théorème de la résultante statique s'écrit :

$$\overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_C} + \overrightarrow{R_C} = \overrightarrow{0}$$

La somme vectorielle est nulle.
Le théorème du moment s'écrit :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{R_C} = \overrightarrow{0}$$

pour que cette somme soit nulle, il faut que les deux vecteurs soient opposés :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_B} = -\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{R_C}$$

Ces vecteurs sont donc perpendiculaires au plan $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{R_B}\right)$ et au plan $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{R_C}\right)$. Le point A étant commun aux deux plans, les vecteurs $\overrightarrow{R_B}$ et $\overrightarrow{R_C}$ sont dans le plan (A,B,C).
On montre de la même manière que $\overrightarrow{R_A}$ est aussi dans le plan (A,B,C).
Montrons maintenant que soit les résultantes sont soit concourantes, soit parallèles.

Résultantes concourantes : Soit I le point d'intersection des deux droites supports de $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{R_B}$. Les torseurs de l'action mécanique en A et B s'écrivent en I :

$$\left\{\mathcal{T}_{A_{ext\to 1}}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_A}\\ \overrightarrow{0}\end{matrix}\right\}_I \quad \text{et} \quad \left\{\mathcal{T}_{B_{ext\to 1}}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_B}\\ \overrightarrow{0}\end{matrix}\right\}_I$$

Le P.F.S. s'écrit donc en I :

$$\left\{\mathcal{T}_{A_{ext\to 1}}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{B_{ext\to 1}}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{B_{ext\to 1}}\right\} = \left\{0\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_A}\\ \overrightarrow{0}\end{matrix}\right\}_I + \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_B}\\ \overrightarrow{0}\end{matrix}\right\}_I + \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_C}\\ \overrightarrow{IC}\wedge\overrightarrow{R_C}\end{matrix}\right\}_I = \left\{0\right\}$$

Du théorème du moment, on déduit :

$$\overrightarrow{IC}\wedge\overrightarrow{R_C} = \overrightarrow{0}$$

Ce vecteur n'est nul que si $\overrightarrow{IC}//\overrightarrow{R_C}$. Les trois résultantes sont donc concourantes.

Résultantes parallèles : Soit $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{R_B}$ les résultantes de deux actions mécaniques avec $\overrightarrow{R_A}//\overrightarrow{R_B}$.
Le théorème de la résultante s'écrit :

$$\overrightarrow{R_A}+\overrightarrow{R_C}+\overrightarrow{R_C}=\overrightarrow{0}$$

$\overrightarrow{R_C}=-\left(\overrightarrow{R_A}+\overrightarrow{R_C}\right)$ est donc aussi parallèle aux deux autres. Le théorème du moment s'écrit :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_B}+\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{R_C}=\overrightarrow{0}$$

11.3.4 Mécanismes plans

Hypothèses spécifiques

On peut modéliser un système par un système « plan », si :

- la géométrie des liaisons d'un système matériel présente un plan de symétrie,
  - tous les mouvements de rotations sont perpendiculaires à ce plan,
  - tous les mouvements de translations sont parallèles à ce plan ;
- les actions mécaniques extérieures exercées sur ce système sont symétriques par rapport à ce plan,
  - les résultantes des actions mécaniques extérieures sont parallèles au plan de symétrie,
  - les moments des actions mécaniques extérieures sont perpendiculaires au plan de symétrie.

Les torseurs des actions mécaniques se mettent alors sous la forme :

$$\{\mathcal{A}_{ext\to S}\}=\left\{\begin{array}{cc} X & [0] \\ Y & [0] \\ [0] & N \end{array}\right\}_{\substack{P \\ (\vec{?},\vec{?},\vec{z})}}$$

avec P un point du plan de symétrie et $\left(\vec{?},\vec{?},\vec{z}\right)$ une base avec $\vec{z}$ la normale au plan.

Nous avons déjà vu la notion de mécanisme plan du point de vue de la cinématique, cela correspond à des mécanismes dont les seuls mouvements possibles sont des translations parallèles au plan d'étude, etou des rotations perpendiculaires à ce plan.

La notion de mécanisme plan du point de vue de statique complète cette notion en imposant une répartition spatiale symétrique des efforts par rapport au plan d'étude.

Remarque : dans ce manuel, la notation [0], correspond à une valeur nulle pour la composante du torseur par le choix de l'hypothèse « mécanisme plan ».

Le tableau 11.1 présente les 3 liaisons utilisables pour modéliser un mécanisme plan.

11.4 Notion d'hyperstaticité

Le P.F.S. permet, à priori, de déterminer les composantes du torseur des actions transmissibles par une liaison. On nomme ces composantes, les inconnues statiques de la liaison.

Lorsque l'on étudie l'équilibre d'un mécanisme comportant N solides et L liaisons, chaque liaison comportant n_{si} inconnues $(0<n_{si}<6)$, on doit résoudre un système d'équation comportant :

- $E_s=6\cdot(N-1)$ équations,
- $I_s=\sum_{i=1}^{L}n_{si}$ inconnues.

Ce système ne peut être résolu que si $I_s=r_s$ avec r_s le rang du système d'équation :

- si $I_s>r_s$, il n'est pas possible de tout déterminer, le mécanisme est dit alors **hyperstatique**. On nomme $h=I_s-r_s$ le degré d'hyperstaticité.

— si $r_s = I_s$, toutes les inconnues de liaison sont déterminables en fonction des efforts « extérieurs » appliqués sur le mécanisme. Le mécanisme est dit **isostatique**, alors $h = 0$.

On peut aussi déduire de cette étude le degré de mobilité du mécanisme, c'est-à dire, le nombre de mouvements indépendant du mécanisme.

On nomme $m = E_s - I_s$ le degré de mobilité du mécanisme.

— Si $m = 0$ le mécanisme est immobile.

— Si $=> 0$, le mécanisme est alors dit mobile de degré m.

Ces notions de mobilité et d'hyperstaticité sont approfondies en deuxième année.

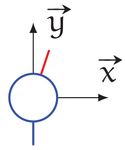
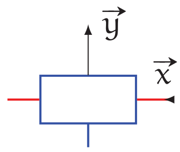
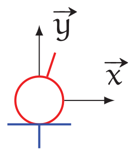
Liaison Pivot plane ou articulation : liaison pivot plane d'axe $(O, \vec{z})$		
Torseur cinématique	Torseur des actions transmissibles	Symbole
$\left\{\begin{array}{cc} [0] & 0 \\ [0] & 0 \\ \omega_z & [0] \end{array}\right\}_{\substack{\forall P\in(O,\vec{z}) \\ (?,?,\vec{z})}}$	$\left\{\begin{array}{cc} X & [0] \\ Y & [0] \\ [0] & 0 \end{array}\right\}_{\substack{\forall P\in(O,\vec{z}) \\ (?,?,\vec{z})}}$	
1 inconnue cinématique	3 inconnues de liaisons	
Liaison Glissière plane : Glissière plane de direction $\vec{x}$		
$\left\{\begin{array}{cc} [0] & V_x \\ [0] & 0 \\ 0 & [0] \end{array}\right\}_{\substack{\forall P\in(O,\vec{z}) \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$	$\left\{\begin{array}{cc} 0 & [0] \\ Y & [0] \\ [0] & N \end{array}\right\}_{\substack{\forall P\in(O,\vec{z}) \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$	
1 inconnue cinématique	3 inconnues de liaisons	
Liaison ponctuelle plane : Ponctuelle plane de normale $(I, \vec{y})$		
$\left\{\begin{array}{cc} [0] & V_x \\ [0] & 0 \\ \omega_z & [0] \end{array}\right\}_{\substack{\forall P\in(O,\vec{z}) \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$	$\left\{\begin{array}{cc} 0 & [0] \\ Y & [0] \\ [0] & 0 \end{array}\right\}_{\substack{\forall P\in(O,\vec{z}) \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$	
1 inconnue cinématique	3 inconnues de liaisons	

TABLEAU 11.1 – Liaisons planes