

A. Présentation

Cette machine permet d'obtenir un allongement réglable pour un produit donné. La bande d'acier est déroulée à partir du poste de déroulement, la vitesse de déroulement V_e étant imposée par le bloc d'entrée. La vitesse qu'impose le bloc de sortie V_s est supérieure à V_e , d'où un allongement de la bande entre ces deux postes. La bande est récupérée sur un mandrin récepteur au poste d'enroulement.

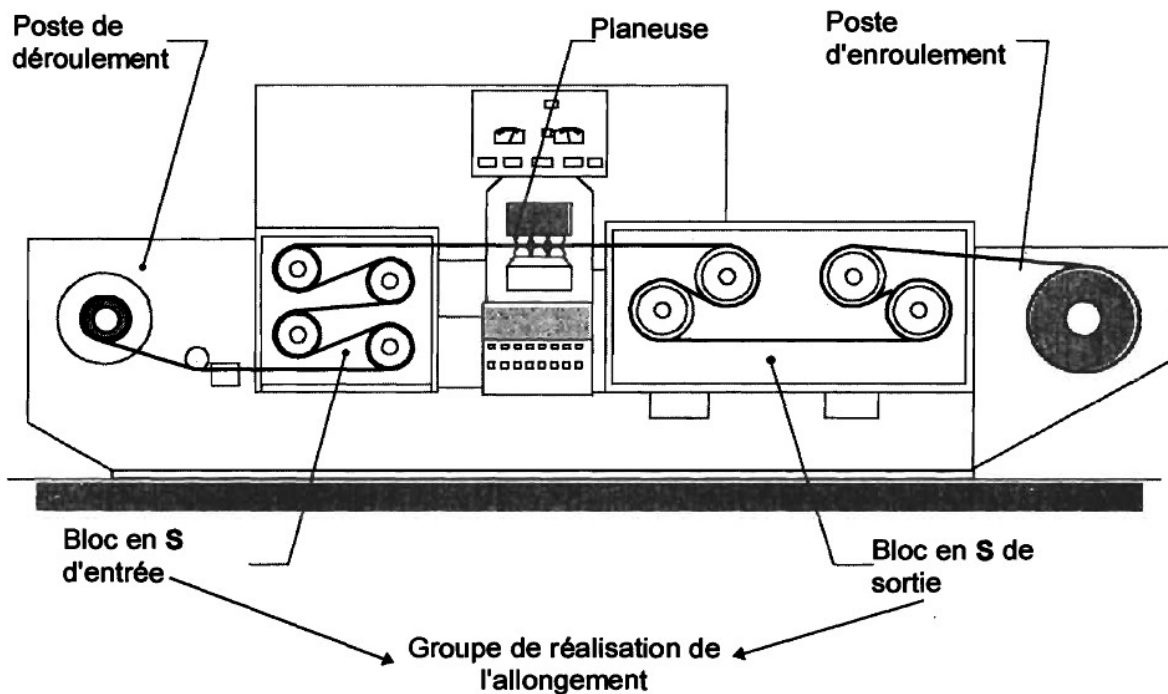


FIGURE 1 – Planeuse

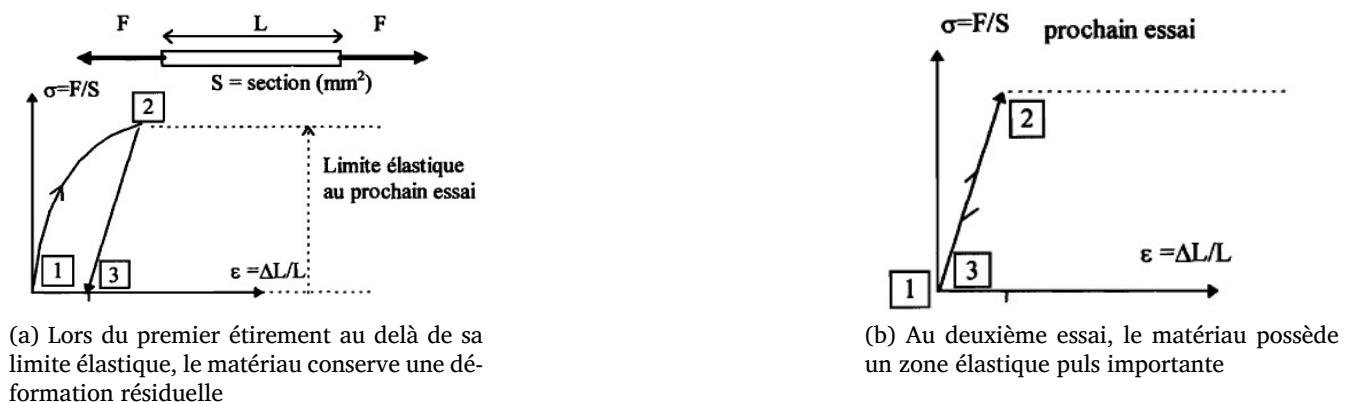


FIGURE 2 – Principe de l'écrouissage

L'intérêt de cet allongement qui est de l'ordre quelques % est, pour un matériau comme l'acier inoxydable, d'étendre son domaine de comportement élastique linéaire (figure 2). En effet, lorsque la bande passe le bloc de sortie, elle est relâchée, ne reprend plus sa longueur initiale; mais lors d'un effort de

traction ultérieure cette bande se comportera de manière élastique linéaire plus loin que lors de son traitement.

La vitesse de production est de l'ordre de $60 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$.

Ce système utilise principalement deux moteurs, l'un pour le mouvement principal et l'autre pour maîtriser l'allongement de la bande; un différentiel permet d'obtenir ce découplage (Cf. figure 3) . La puissance du moteur qui réalise l'allongement est bien inférieure à la puissance du moteur réalisant le mouvement principal, ce qui facilite la réalisation de l'asservissement.

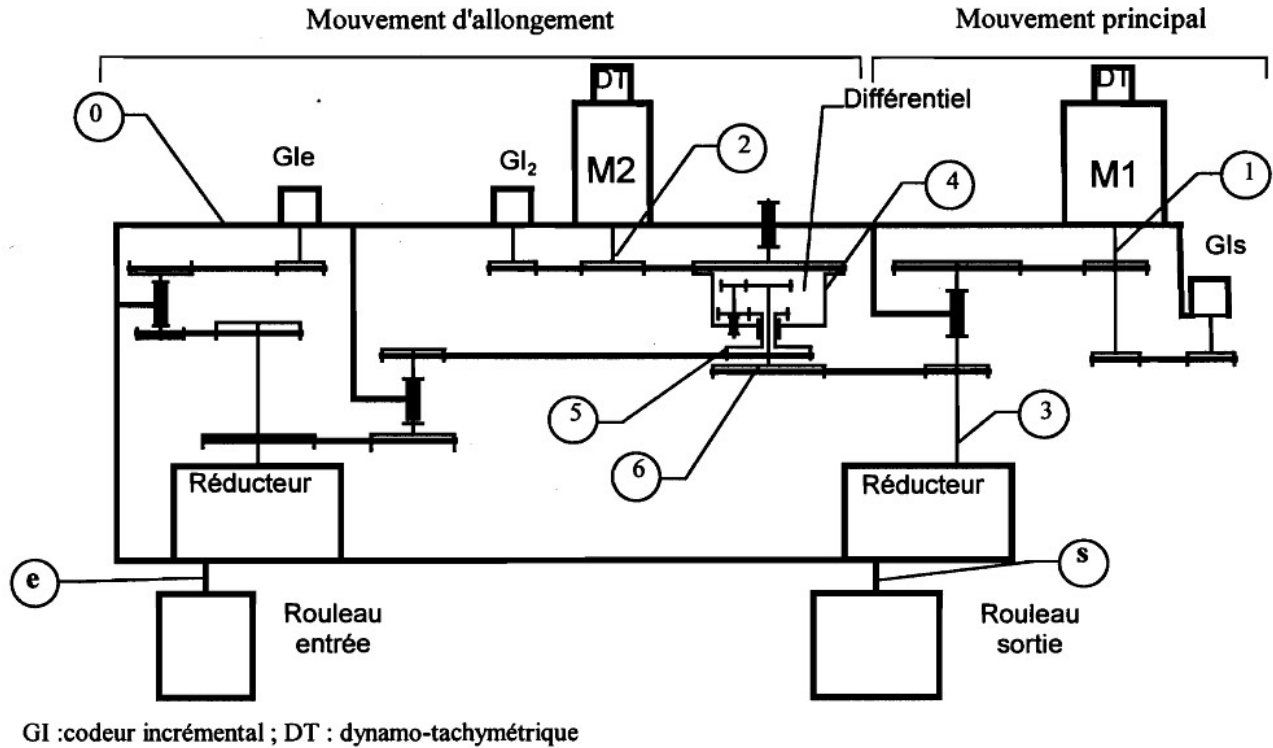


FIGURE 3 – cinématique de la transmission

B. Étude du différentiel

L'élément central de la transmission est le différentiel, celui-ci est décrit sur la figure 11.

Les mouvements des solides I, II, III par rapport au bâti 0 de la machine sont des rotations autour de l'axe (O, \vec{y}) .

Pour les calculs on utilisera les notations suivantes :

- $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 sont les vitesses de rotation respectives des solides I, II, III, IV par rapport au bâti de la machine, $\omega_{1/2}$ est la vitesse de rotation du solide 1 par rapport au solide II;
- les nombres de dents des différentes roues sont α, β, γ et δ avec $\alpha = 38, \beta = 26, \gamma = 23$ et $\delta = 35$
- on rappelle que le mouvement relatif entre deux roues dentées cylindriques 1 et 2, de nombre de dents Z_1 et Z_2 est un roulement sans glissement sur des cercles primitifs de diamètres D_1 et D_2 tels que : $D_1 = m \cdot Z_1$ et $D_2 = m \cdot Z_2$ (m est le module);

Q1. Exprimer $\vec{V}_{J \in IV / I}$ et $\vec{V}_{J \in II / I}$, puis exploiter le non glissement de IV par rapport à II en J.

Q2. Exprimer $\vec{V}_{K \in III / I}$ et $\vec{V}_{K \in IV / I}$ puis exploiter le non glissement de IV par rapport à III en K.

Q3. Exprimer l'équation du train épicycloïdal sous la forme $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0$. On utilisera la raison ρ du train épicycloïdal, pour laquelle on aura donné une expression claire en fonction des nombres de dents.

Q4. Identifier les correspondances entre I, II, III et les solides repérés 4, 5 et 6 du schéma de la machine 3).

Q5. Exprimer la vitesse de rotation ω_5 en fonction des vitesses de rotation ω_4, ω_6 .

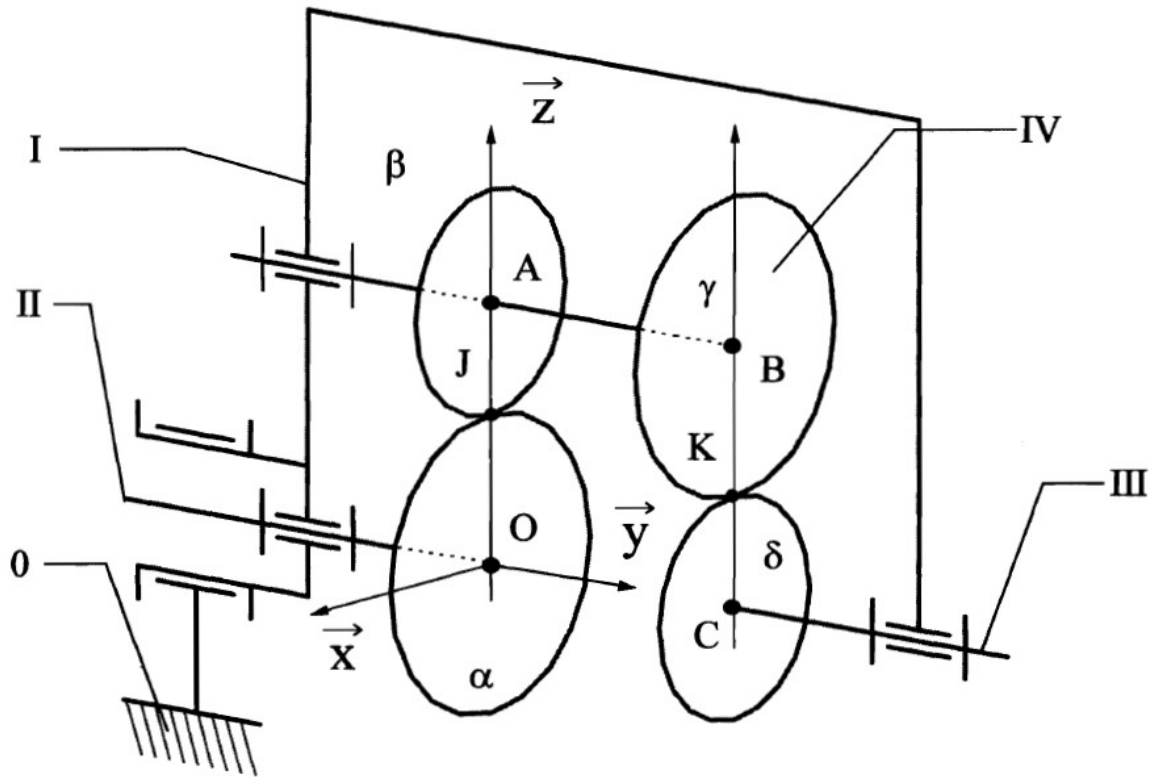


FIGURE 4 – Schéma cinématique du différentiel

C. Limiteur de couple

La machine comporte dans sa transmission un limiteur de couple sur l'arbre du moteur 1 pour protéger l'installation d'une défaillance éventuelle. Le limiteur de couple a pour fonctions de transmettre le moment du couple moteur en conditions normales, de signaler une augmentation excessive du moment du couple, et dans cette situation, de ne plus transmettre le couple moteur tant qu'un technicien n'intervient pas pour réenclemer le limiteur.

Le limiteur est décrit en annexe.

C.1. Étude statique : Déclenchement du limiteur de couple

On se place dans la situation suivante : le couple transmis a dépassé la valeur MI de début de décalage et les billes 14 sont en contact sphère-plan avec 2 et avec 3 (les billes roulent sans glisser sur 2 et 3 et sont en train de sortir des évidements de fonctionnement normal). On ne prend pas en compte la cage à billes 5.

On fait des hypothèses qui permettent de réaliser le graphe des liaisons (figure 5) et le schéma cinématique (figure 6) suivants :

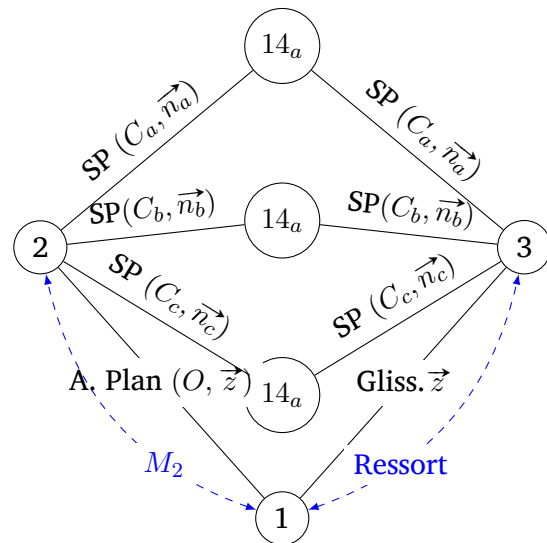


FIGURE 5 – Graphe de structure

- le poids des pièces est négligé;
- on se place à l'équilibre;
- les liaisons sont parfaites sans frottement; les contacts 14a - 2 et 14a -3 se font selon la normale (C_a, \vec{n}_a) ; \vec{n}_a fait un angle θ avec \vec{z} et $\vec{n}_a \perp \vec{u}_a$; idem pour les billes 14b, 14c;
- l'action d'un récepteur sur 2 est modélisée par un couple de moment $M_2 \cdot \vec{z}$;
- l'action du ressort sur 3 est modélisée par un glisseur de résultante $F \cdot \vec{z}$ et d'axe central (O, \vec{z}) ; $F = F_0 + K \cdot \Delta\alpha$ (où F_0 est la précharge du ressort, K la raideur du ressort, $\Delta\alpha$ le décalage angulaire de 2 par rapport à 3);
- On note respectivement N_a , N_b et N_c la norme de l'action normale des billes 14a, 14b et 14c sur le solide 2. On admet que $N_a = N_b = N_c = N$.

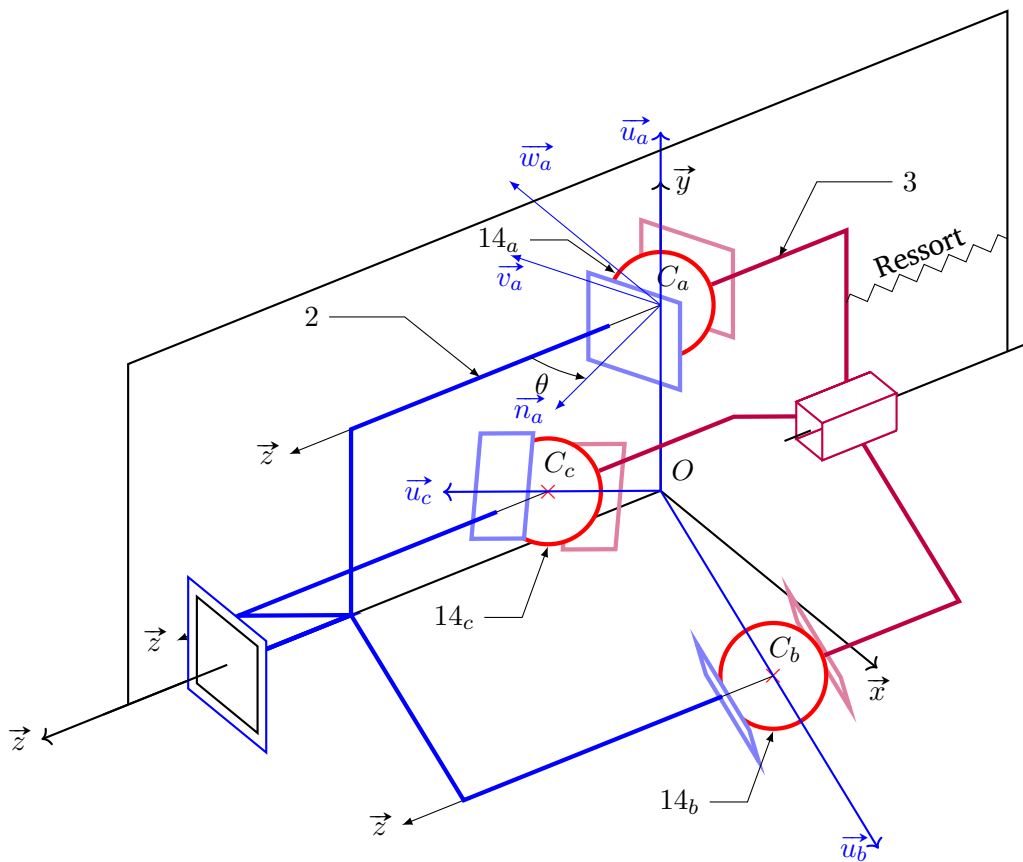


FIGURE 6 – Schéma cinématique

On considère les bases suivantes

- $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ la base associée au solide (1).
- $B_a = (\vec{u}_a, \vec{w}_a, \vec{z})$ associé à la bille 14a avec :

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{OC}_a}{\|\vec{OC}_a\|}$$
 et $\beta_a = (\vec{x}, \vec{u}_a) = (\vec{y}, \vec{w}_a)$ et $\beta_a = 90^\circ$.
- $B_b = (\vec{u}_b, \vec{w}_b, \vec{z})$ associé à la bille 14b avec :

$$\vec{u}_b = \frac{\vec{OC}_b}{\|\vec{OC}_b\|}$$
 et $\beta_b = (\vec{x}, \vec{u}_b) = (\vec{y}, \vec{w}_b)$ et $\beta_b = \beta_a - 120^\circ$.
- $B_c = (\vec{u}_c, \vec{w}_c, \vec{z})$ associé à la bille 14c avec :

$$\vec{u}_c = \frac{\vec{OC}_c}{\|\vec{OC}_c\|}$$
 et $\beta_c = (\vec{x}, \vec{u}_c) = (\vec{y}, \vec{w}_c)$ et $\beta_c = \beta_b + 120^\circ$.

— On pose avec $i \in [a, b, c]$ $(\vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{n}_i)$ avec \vec{n}_i la normale au plan de contact et $\theta = (\vec{w}_i, \vec{v}_i) = (\vec{z}, \vec{n}_i)$.

Q6. Tracer les figures de changement de base pour passer de la base $(\vec{u}_a, \vec{w}_a, \vec{z})$ à $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et de la base $(\vec{u}_a, \vec{v}_a, \vec{n}_a)$ et $(\vec{u}_a, \vec{w}_a, \vec{z})$.

Q7. Isoler le système $S = \{2, 3, 14_a, 14_b, 14_c\}$;

— faire le bilan des actions extérieures appliquées à S ;

— appliquer le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{z} : équation (1)

Q8. Isoler 2 :

Q8a. Exprimer les éléments de réduction du torseur $\{\mathcal{A}_{14_a \rightarrow 2}\}$ au point O et dans la base $(\vec{u}_a, \vec{w}_a, \vec{z})$ puis les torseurs $\{\mathcal{A}_{14_b \rightarrow 2}\}$ et $\{\mathcal{A}_{14_c \rightarrow 2}\}$.

Q8b. Faire le bilan des actions extérieures appliquées à 2 .

Q8c. Dédire du théorème de la résultante statique en projection sur \vec{z} et du moment résultant en projection sur \vec{z} les équations (2) et (3).

Q9. Dédire du système constitué des équations (1), (2), (3) l'expression de F en fonction de M_2 .

D. Étude de l'asservissement du système

Dans un premier temps, on étudie l'interaction des deux moteurs sur le mouvement et donc son influence sur l'asservissement du système puis on étudie l'asservissement de vitesse du moteur 2.

D.1. Interaction des deux moteurs : étude des fonctions de transfert

On considère le système non asservi pour lequel les sorties sont les vitesses de rotation des deux moteurs et les entrées, les tensions d'alimentation de ceux-ci.



Le schéma blocs de pilotage des deux moteurs sur la figure 7.

La variation de la tension U_1 modifie Ω_1 , mais entraîne aussi une perturbation de Ω_2 et réciproquement pour U_2 .

Les deux moteurs sont caractérisés par :

— inductances des induits négligées,

— résistances R_1 et R_2 ,

— constantes de couple Kt_1 et Kt_2 ,

— constantes de f.e.m. Kv_1 et Kv_2 ;

— en unités S.I. on a : $Kt_1 = Kv_1 = K_1$ et $Kt_2 = Kv_2 = K_2$

L'étude du mécanisme en dynamique permet de conduire au schéma-bloc suivant au voisinage du point de fonctionnement correspondant à une vitesse de défilement de $60 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$.

La vitesse de rotation du moteur 2 peut se mettre sous la forme :

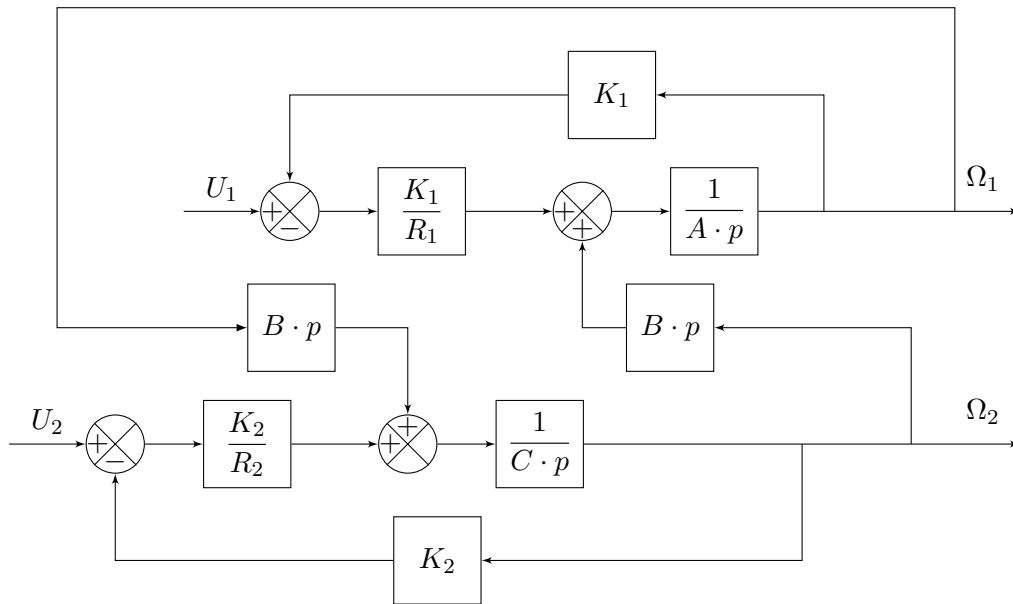
$$\Omega_2(p) = H_1(p) \cdot U_1(p) + H_2(p) \cdot U_2(p)$$

Q10. Déterminer l'expression de $H_1(P)$ et $H_2(P)$

Pour alléger les écritures on omettra les « (p) »; ainsi on écrira l'équation précédente : $\Omega_2 = H_1 \cdot U_1 + H_2 \cdot U_2$.

Q11. Caractériser $H_2(p)$. Mettre sous forme canonique.

Q12. Tracer les diagrammes de Bode de $H_2(p)$.

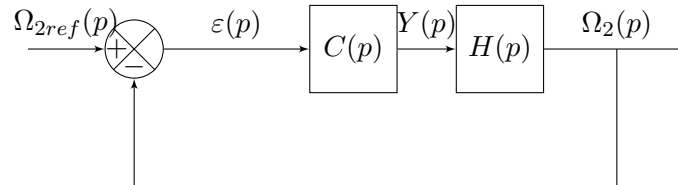


A, B, C sont des constantes qui valent respectivement : $A = 9 \times 10^{-3} S.I.$; $B = 1,5 \times 10^{-3} S.I.$; $C = 2 \times 10^{-3} S.I.$; $R_1 = 0,3 \Omega$; $R_2 = 0,5 \Omega$; $K_1 = 1 S.I.$; $K_2 = 0,3 S.I.$

FIGURE 7 – Schéma blocs de pilotage des deux moteurs

D.2. Asservissement de vitesse du moteur 2

On considère le schéma-bloc suivant qui permet l'étude du suivi de consigne de vitesse : on ne prend pas en compte les perturbations dues au moteur 1 ou au processus de déroulement-allongement-planage-enroulement.



avec $C(p)$ le correcteur de la fonction de transfert.

La fonction de transfert $H(p)$ en boucle ouverte sans correction est donnée par :

$$H(p) = 0,33 \cdot \frac{1 + 4 \times 10^{-3} \cdot p + 2 \times 10^{-5} \cdot p^2}{1 + 1,31 \times 10^{-2} \cdot p + 9,42 \times 10^{-5} \cdot p^2 + 2,86 \times 10^{-7} \cdot p^3 + 6,50 \times 10^{-10} \cdot p^4}$$

Les racines approchées du dénominateur sont :

$$\begin{aligned} r_{1a} &= -120 + 250 \cdot i \text{ et } r_{1b} = -120 - 250 \cdot i \\ r_{2a} &= -100 + 100 \cdot i \text{ et } r_{2b} = -100 - 100 \cdot i \end{aligned}$$

Le système est sollicité par un échelon $\omega_2(t) = 1 \cdot \mathcal{H}(t)$ (avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside)

Q13. Mettre sous forme canonique la fonction de transfert $H(p)$. Préciser les différents paramètres.

Les diagrammes de Bode de $H(p)$ sont représentés sur la figure 8.

Q14. Tracer les asymptotes des diagrammes de Bode de $H(p)$, préciser les différents éléments caractéristiques.

Q15. Correction proportionnelle : $C(p) = K_p$

Q15a. Déterminer l'erreur statique

Q15b. Justifier l'utilisation d'un correcteur P.I.

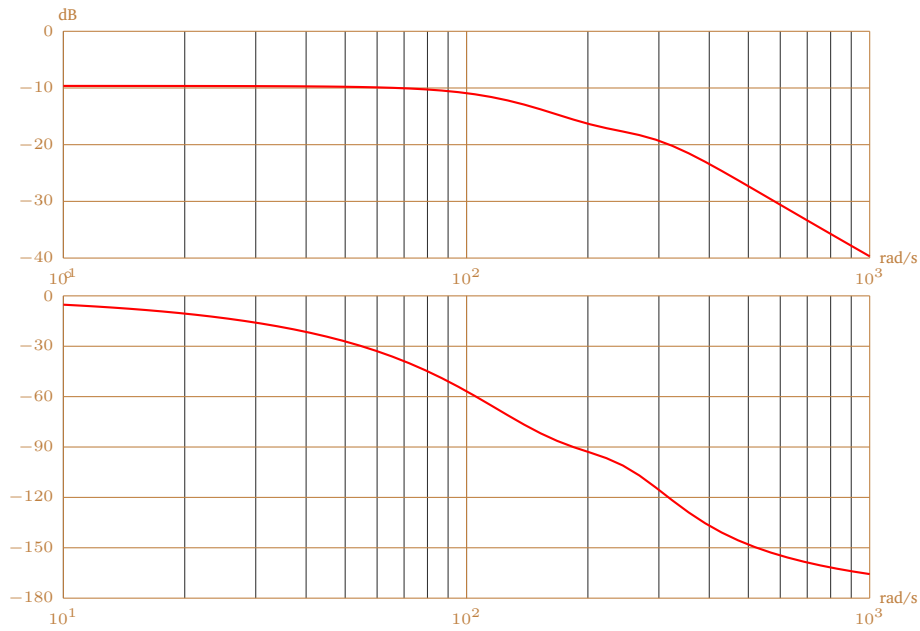


FIGURE 8 – Diagrammes de Bode de $H(p)$

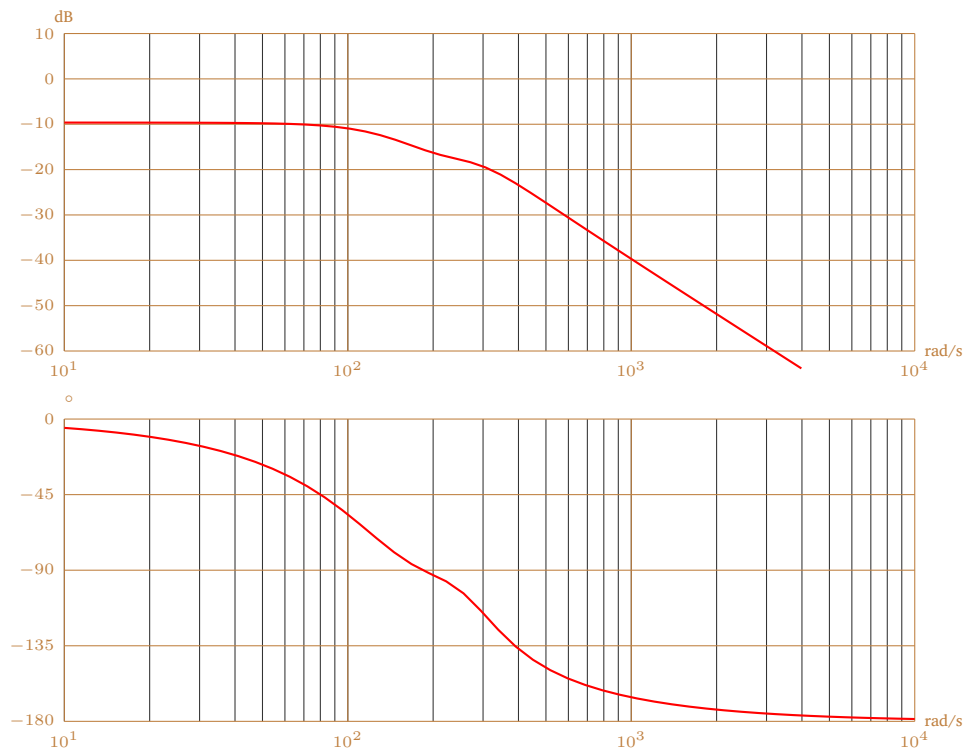


FIGURE 9 – Diagrammes de Bode à compléter avec la correction P.I

Q16. Correction proportionnelle intégrale : $C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$ avec $T_i = 0,008 \text{ s}$

Q16a. Compléter les diagrammes de Bode de $H(p)$ (figure 9) en ajoutant le correcteur P.I (pour $K_p = 1$).

Q16b. Tracer les diagrammes de Bode du système corrigé.

Q16c. Déterminer les marges de phase et de gain.

Q16d. Déterminer la valeur maximale que peut prendre la constante K_p tout en conservant une marge de gain supérieure à 10 dB et une marge de phase supérieure à 45° .

Q16e. Conclure sur la précision pour une entrée en échelon.

On souhaite pour aller plus loin, déterminer un modèle approché de la fonction de transfert corrigée avec le correcteur P.I. Les diagrammes de Bode de cette fonction sont tracés sur la figure 10.

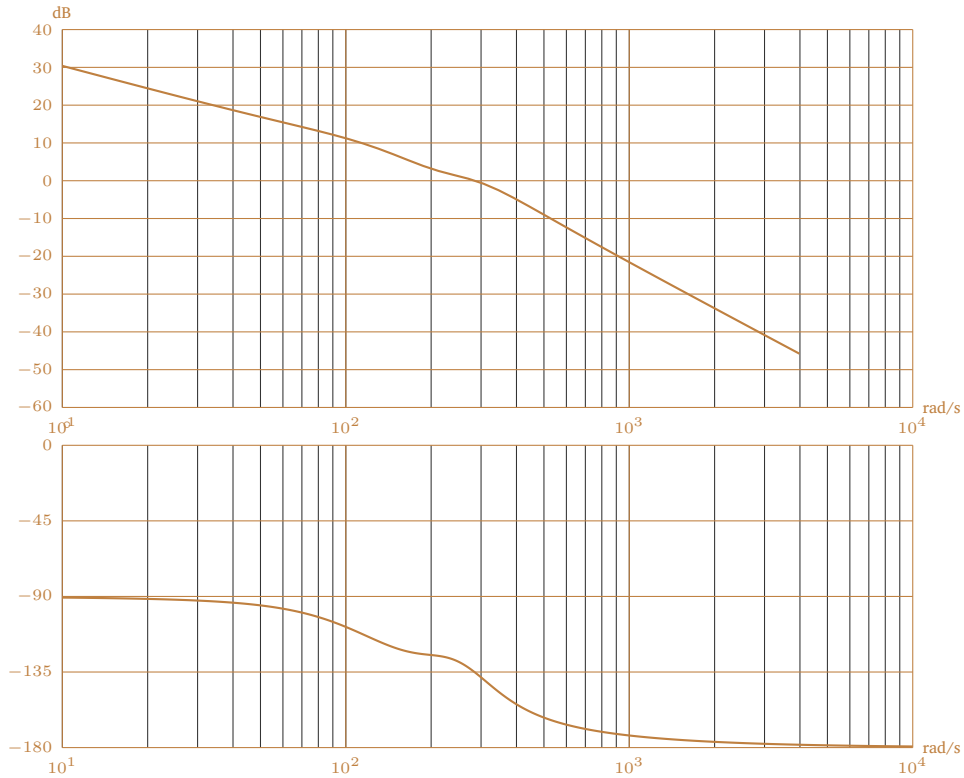


FIGURE 10 – Diagrammes de Bode de la FTBO corrigée avec le correcteur P.I

On propose $H_s(p) = \frac{K_s}{p \cdot (1 + \tau_s \cdot p)}$.

Q17. Déterminer les deux paramètres K_s et τ_s . Tracer les diagrammes de Bode de cette fonction simplifiée. Conclure sur cette modélisation.

Q18. Déterminer à partir de ce modèle approché, la fonction de transfert en boucle fermée. mettre sous forme canonique, préciser les différents paramètres.

Q19. À partir de l'abaque des dépassements et des temps de réponses, tracer l'allure de la réponse temporelle. Préciser les caractéristiques de la réponse temporelle.

0.0.1 Corrections

Cor. 1 : Engees2000 - Planeuse de traction à froid

Sujet page 1

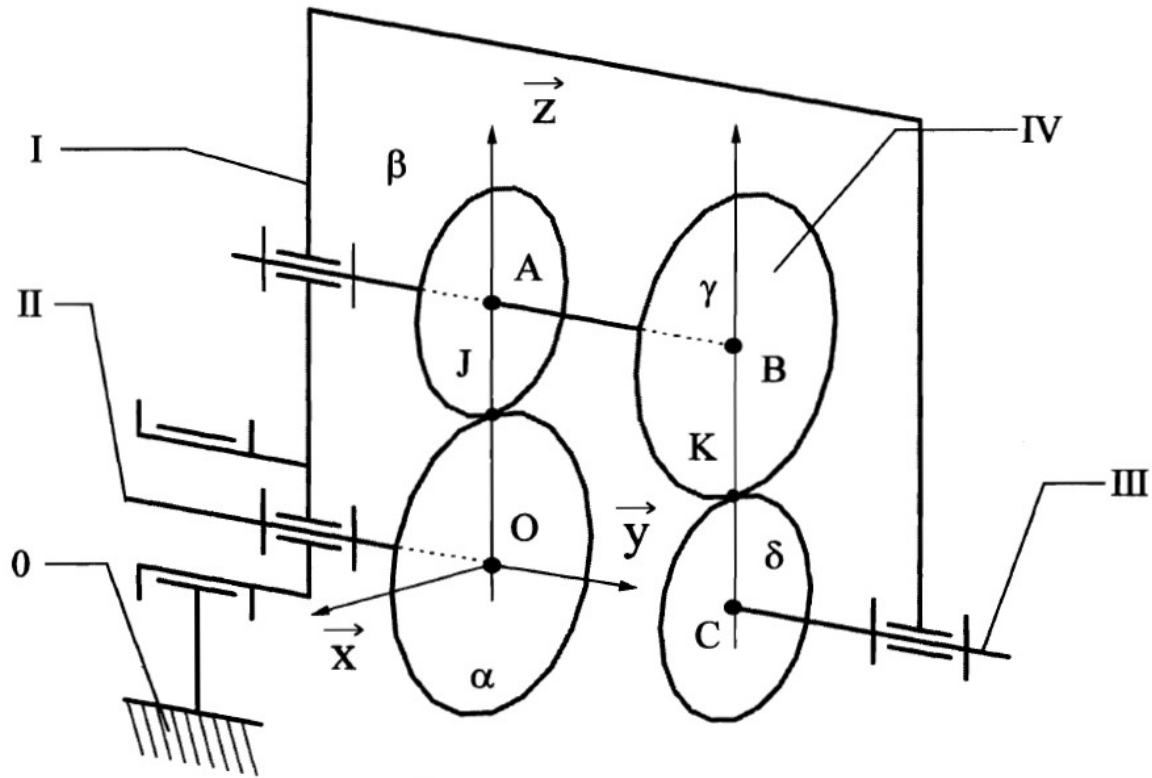


FIGURE 11 – Schéma cinématique du différentiel

Q1.

$$\begin{aligned} \vec{V}_{J \in IV/I} &= \vec{V}_{A \in IV/I} + \omega_{4/1} \cdot \vec{y} \wedge \vec{AJ} \\ &= \vec{0} + (\omega_{4/0} - \omega_{1/0}) \cdot \vec{y} \wedge \left(-\frac{m \cdot \beta}{2} \vec{z} \right) \\ &= -\frac{m \cdot \beta}{2} \cdot (\omega_{4/0} - \omega_{1/0}) \cdot \vec{x} \\ \vec{V}_{J \in II/I} &= \vec{V}_{O \in II/I} + \omega_{2/1} \cdot \vec{y} \wedge \vec{OJ} \\ &= \vec{0} + (\omega_{2/0} - \omega_{1/0}) \cdot \vec{y} \wedge \frac{m \cdot \alpha}{2} \cdot \vec{y} \\ &= \frac{m \cdot \alpha}{2} \cdot (\omega_{2/0} - \omega_{1/0}) \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

s'il y a roulement sans glissement en J alors $\vec{V}_{J \in IV/II} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{J \in IV/II} &= \vec{0} \\ \vec{V}_{J \in IV/I} - \vec{V}_{J \in II/I} &= \vec{0} \\ \frac{m \cdot \beta}{2} \cdot (\omega_{4/0} + \omega_{1/0}) + \frac{m \cdot \alpha}{2} \cdot (\omega_{2/0} - \omega_{1/0}) &= 0 \\ \beta \cdot (\omega_{4/0} + \omega_{1/0}) + \alpha \cdot (\omega_{2/0} - \omega_{1/0}) &= 0 \end{aligned}$$

Q2. de la même manière

$$\begin{aligned} \vec{V}_{K \in IV/I} &= -\frac{m \cdot \gamma}{2} \cdot (\omega_{4/0} - \omega_{1/0}) \cdot \vec{x} \\ \vec{V}_{K \in III/I} &= \frac{m \cdot \delta}{2} \cdot (\omega_{3/0} - \omega_{1/0}) \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

d'où

$$\gamma \cdot (\omega_{4/0} + \omega_{1/0}) + \delta \cdot (\omega_{3/0} - \omega_{1/0}) = 0$$

Q3.

$$\begin{aligned} \beta \cdot (\omega_{4/0} + \omega_{1/0}) + \alpha \cdot (\omega_{2/0} - \omega_{1/0}) = 0 &\Rightarrow \beta \cdot (\omega_{4/0} + \omega_{1/0}) = -\alpha \cdot (\omega_{2/0} - \omega_{1/0}) \\ \gamma \cdot (\omega_{4/0} + \omega_{1/0}) + \delta \cdot (\omega_{3/0} - \omega_{1/0}) = 0 &\Rightarrow \gamma \cdot (\omega_{4/0} + \omega_{1/0}) = -\delta \cdot (\omega_{3/0} - \omega_{1/0}) \end{aligned} \Rightarrow \frac{\beta \cdot \delta}{\alpha \cdot \gamma} = \frac{(\omega_{2/0} - \omega_{1/0})}{(\omega_{3/0} - \omega_{1/0})}$$

On pose $\rho = \frac{\beta \cdot \delta}{\alpha \cdot \gamma}$, la raison basique.

d'où $\rho \cdot (\omega_{3/0} - \omega_{1/0}) - (\omega_{2/0} - \omega_{1/0}) = 0$ soit

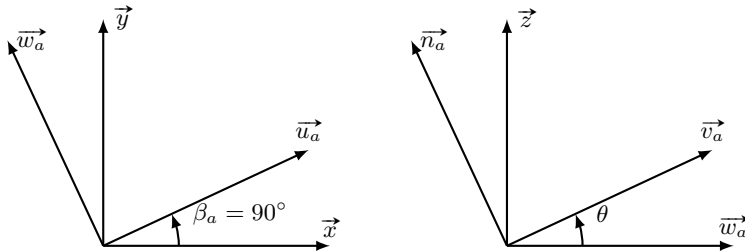
$$(1 - \rho) \cdot \omega_{1/0} + \rho \cdot \omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0$$

Q4. I = 4, II = 5, III = 6

Q5. d'où

$$\omega_{5/0} = (1 - \rho) \cdot \omega_{4/0} + \rho \cdot \omega_{6/0}$$

Q6. Tracer les figures de changement de base pour passer de la base $(\vec{u}_a, \vec{w}_a, \vec{z})$ à $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et de la base $(\vec{u}_a, \vec{v}_a, \vec{n}_a)$ et $(\vec{u}_a, \vec{w}_a, \vec{z})$.



Q7. Isoler le système $S = \{2, 3, 14_a, 14_b, 14_c\}$;

- faire le bilan des actions extérieures appliquées à S ;
- appliquer le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{z} : équation (1)

L'ensemble S est soumis :

- À l'action du ressort de 1 sur 3 $\{\mathcal{R}_{1 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1 \rightarrow 3} = F \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$.
- À l'action du récepteur sur 2 $\{\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{M}_{1 \rightarrow 2} = M_2 \cdot \vec{z} \end{matrix} \right\}_{\forall P}$.

— Aux deux liaisons

- glissière : $\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{13} & L_{13} \\ Y_{13} & M_{13} \\ 0 & N_{13} \end{matrix} \right\}_{\forall P}^{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
- appui plan : $\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \right\}_{\forall P}^{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Le PFS s'écrit :

$$\{\mathcal{R}_{1 \rightarrow 3}\} + \{\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 3}\} + \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

La projection du théorème de la résultante en projection sur \vec{z} donne donc :

$$\begin{aligned} F + Z_{12} &= 0 \\ F_0 + K \cdot \Delta\alpha + Z_{12} &= 0 \quad [1] \end{aligned}$$

Q8. Isoler 2 :

Q8a. Exprimer les éléments de réduction du torseur $\{\mathcal{A}_{14_a \rightarrow 2}\}$ au point O et dans la base $(\vec{u}_a, \vec{w}_a, \vec{z})$ puis les torseurs $\{\mathcal{A}_{14_b \rightarrow 2}\}$ et $\{\mathcal{A}_{14_c \rightarrow 2}\}$.

Q8b. Faire le bilan des actions extérieures appliquées à 2 .

Q8c. Dédire du théorème de la résultante statique en projection sur \vec{z} et du moment résultant en projection sur \vec{z} les équations (2) et (3).

Le torseur $\{\mathcal{A}_{14_a \rightarrow 2}\}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}_{14_a \rightarrow 2}\} &= \left\{ \begin{array}{c} N_a \cdot \vec{n}_a \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_a} \\ \{\mathcal{A}_{14_a \rightarrow 2}\} &= \left\{ \begin{array}{c} N_a \cdot \vec{n}_a \\ \overrightarrow{OC_a} \wedge N_a \cdot \vec{n}_a \end{array} \right\}_0 = \left\{ \begin{array}{c} N_a \cdot \vec{n}_a \\ R \cdot \vec{u}_a \wedge N_a \cdot \vec{n}_a \end{array} \right\}_0 \\ \{\mathcal{A}_{14_a \rightarrow 2}\} &= \left\{ \begin{array}{c} N_a \cdot \vec{n}_a \\ -R \cdot N_a \cdot \vec{v}_a \end{array} \right\}_0 \end{aligned}$$

dans la base $(\vec{u}_a, \vec{w}_a, \vec{z})$

$$\{\mathcal{A}_{14_a \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} N_a \cdot \vec{n}_a \\ -R \cdot N_a \cdot (\cos \theta \cdot \vec{w}_a + \sin \theta \cdot \vec{z}) \end{array} \right\}_0$$

Par analogie pour les deux autres torseurs

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}_{14_b \rightarrow 2}\} &= \left\{ \begin{array}{c} N_b \cdot \vec{n}_b \\ -R \cdot N_b \cdot (\cos \theta \cdot \vec{w}_b + \sin \theta \cdot \vec{z}) \end{array} \right\}_0 \\ \{\mathcal{A}_{14_c \rightarrow 2}\} &= \left\{ \begin{array}{c} N_c \cdot \vec{n}_c \\ -R \cdot N_c \cdot (\cos \theta \cdot \vec{w}_c + \sin \theta \cdot \vec{z}) \end{array} \right\}_0 \end{aligned}$$

On isole le solide 2 , le PFS s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{14_a \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{A}_{14_b \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{A}_{14_c \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

La projection du théorème de la résultante sur \vec{z} donne :

$$\begin{aligned} (N_a \cdot \vec{n}_a + N_b \cdot \vec{n}_b + N_c \cdot \vec{n}_c) \cdot \vec{z} + Z_{12} + 0 &= 0 \\ (N_a + N_b + N_c) \cdot \cos \theta + Z_{12} + 0 &= 0 \quad [2] \end{aligned}$$

De même le théorème du moment en O en projection sur \vec{z} s'écrit :

$$-R \cdot (N_a + N_b + N_c) \sin \theta + M_2 = 0 \quad [3]$$

Q9. Dédire du système constitué des équations (1), (2), (3) l'expression de F en fonction de M_2 .

$$\begin{cases} F + Z_{12} = 0 \\ (N_a + N_b + N_c) \cdot \cos \theta + Z_{12} = 0 \\ -R \cdot (N_a + N_b + N_c) \sin \theta + M_2 = 0 \end{cases}$$

d'où

$$M_2 = R \cdot F \cdot \tan \theta$$

Q10. Déterminer l'expression de $H_1(P)$ et $H_2(P)$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{1}{A \cdot p} \cdot \left(B \cdot p \cdot \Omega_2 + \frac{K_1}{R_1} \cdot (U_1 - K_1 \cdot \Omega_1) \right) \\ \Omega_2 &= \frac{1}{C \cdot p} \cdot \left(B \cdot p \cdot \Omega_1 + \frac{K_2}{R_2} \cdot (U_2 - K_2 \cdot \Omega_2) \right) \end{aligned}$$

On détermine dans un premier temps Ω_1 en fonction de U_1 et Ω_2

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \frac{1}{A \cdot p} \cdot B \cdot p \cdot \Omega_2 + \frac{1}{A \cdot p} \cdot \frac{K_1}{R_1} \cdot (U_1 - K_1 \cdot \Omega_1) \\
\Omega_1 &= \frac{1}{A \cdot p} \cdot B \cdot p \cdot \Omega_2 + \frac{1}{A \cdot p} \cdot \frac{K_1}{R_1} \cdot U_1 - \frac{1}{A \cdot p} \cdot \frac{K_1}{R_1} \cdot K_1 \cdot \Omega_1 \\
\left(1 + \frac{1}{A \cdot p} \cdot \frac{K_1}{R_1} \cdot K_1\right) \cdot \Omega_1 &= \frac{1}{A \cdot p} \cdot B \cdot p \cdot \Omega_2 + \frac{1}{A \cdot p} \cdot \frac{K_1}{R_1} \cdot U_1 \\
\left(1 + \frac{K_1^2}{A \cdot p \cdot R_1}\right) \cdot \Omega_1 &= \frac{B \cdot p}{A \cdot p} \cdot \Omega_2 + \frac{K_1}{A \cdot p \cdot R_1} \cdot U_1 \\
\frac{A \cdot p \cdot R_1 + K_1^2}{A \cdot p \cdot R_1} \cdot \Omega_1 &= \frac{B}{A} \cdot \Omega_2 + \frac{K_1}{A \cdot p \cdot R_1} \cdot U_1 \\
\Omega_1 &= \frac{B \cdot p \cdot R_1}{A \cdot p \cdot R_1 + K_1^2} \cdot \Omega_2 + \frac{K_1}{A \cdot p \cdot R_1 + K_1^2} \cdot U_1
\end{aligned}$$

que l'on substitue dans l'autre équation.

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \frac{1}{C \cdot p} \cdot \left(B \cdot p \cdot \left(\frac{B \cdot p \cdot R_1}{A \cdot p \cdot R_1 + K_1^2} \cdot \Omega_2 + \frac{K_1}{A \cdot p \cdot R_1 + K_1^2} \cdot U_1 \right) + \frac{K_2}{R_2} \cdot (U_2 - K_2 \cdot \Omega_2) \right) \\
\Omega_2 &= \frac{B^2 \cdot p \cdot R_1}{C \cdot A \cdot p \cdot R_1 + C \cdot K_1^2} \cdot \Omega_2 + \frac{B \cdot K_1}{C \cdot A \cdot p \cdot R_1 + C \cdot K_1^2} \cdot U_1 + \frac{K_2}{C \cdot p \cdot R_2} \cdot U_2 - \frac{K_2^2}{C \cdot p \cdot R_2} \cdot \Omega_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_2 - \frac{B^2 \cdot p \cdot R_1}{C \cdot A \cdot p \cdot R_1 + C \cdot K_1^2} \cdot \Omega_2 + \frac{K_2}{C \cdot p \cdot R_2} \cdot U_2 - \frac{K_2^2}{C \cdot p \cdot R_2} \cdot \Omega_2 &= + \frac{B \cdot K_1}{C \cdot A \cdot p \cdot R_1 + C \cdot K_1^2} \cdot U_1 \\
\left(1 - \frac{B^2 \cdot p \cdot R_1}{C \cdot A \cdot p \cdot R_1 + C \cdot K_1^2} + \frac{K_2}{C \cdot p \cdot R_2} \cdot K_2\right) \cdot \Omega_2 &= + \frac{B \cdot K_1}{C \cdot A \cdot p \cdot R_1 + C \cdot K_1^2} \cdot U_1 + \frac{K_2}{C \cdot p \cdot R_2} \cdot U_2 \\
\left(\frac{(A \cdot p \cdot R_1 + K_1^2) \cdot (C \cdot p \cdot R_2) - (B^2 \cdot p \cdot R_1) \cdot (p \cdot R_2) + K_2^2 \cdot (A \cdot p \cdot R_1 + K_1^2)}{(A \cdot p \cdot R_1 + K_1^2) \cdot (C \cdot p \cdot R_2)}\right) \cdot \Omega_2 &= + \frac{B \cdot K_1}{C \cdot A \cdot p \cdot R_1 + C \cdot K_1^2} \cdot U_1 + \frac{K_2}{C \cdot p \cdot R_2} \cdot U_2 \\
\left(\frac{p^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot (A \cdot C - B^2) + p \cdot (A \cdot R_1 \cdot K_2^2 + C \cdot R_2 \cdot K_1^2) + K_1^2 \cdot K_2^2}{(A \cdot p \cdot R_1 + K_1^2) \cdot (C \cdot p \cdot R_2)}\right) \cdot \Omega_2 &= + \frac{B \cdot K_1}{C \cdot A \cdot p \cdot R_1 + C \cdot K_1^2} \cdot U_1 + \frac{K_2}{C \cdot p \cdot R_2} \cdot U_2
\end{aligned}$$

$$\Omega_2 = + \frac{B \cdot K_1 \cdot R_2 \cdot p}{p^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot (A \cdot C - B^2) + p \cdot (A \cdot R_1 \cdot K_2^2 + C \cdot R_2 \cdot K_1^2) + K_1^2 \cdot K_2^2} \cdot U_1 + \frac{K_2 \cdot A \cdot p \cdot R_1 + K_2 \cdot K_1^2}{p^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot (A \cdot C - B^2) + p \cdot (A \cdot R_1 \cdot K_2^2 + C \cdot R_2 \cdot K_1^2) + K_1^2 \cdot K_2^2} \cdot U_2$$

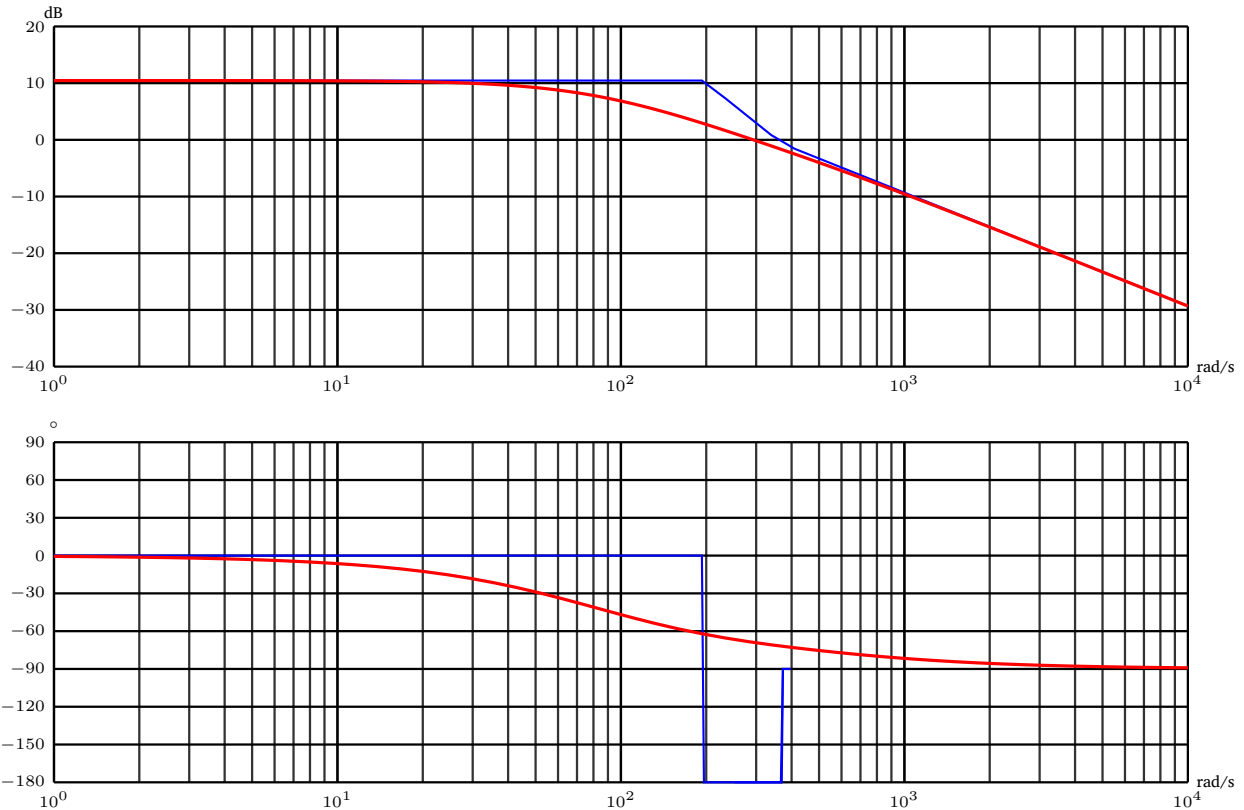
Q11. Caractériser $H_2(p)$. Mettre sous forme canonique.

Application numérique : $H_2(p) \approx \frac{10}{3} \frac{1 + 0,0027 \cdot p}{1 + 0,0138 \cdot p + 0,262 \times 10^{-4} \cdot p^2}$ on reconnaît un second ordre généralisé (premier ordre au numérateur).

par identification, on obtient : $\omega_n \approx 195$, $z = 1,35$, $K = \frac{10}{3}$ et $\tau = 0,0027$

le dénominateur possède deux racines réelles, H_2 s'écrit aussi : $H_2(p) \approx \frac{10}{3} \frac{1 + 0,0027 \cdot p}{\left(1 + \frac{p}{86,7}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{439,5}\right)}$

Q12. Tracer les diagrammes de Bode de $H_2(p)$.



Q13. Mettre sous forme canonique la fonction de transfert $H(p)$

La fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = 0,33 \cdot \frac{1 + \frac{2 \cdot \xi_n}{\omega_{nn}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{nn}^2}}{\left(1 + \frac{2 \cdot \xi_1}{\omega_{n1}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{n1}^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \xi_2}{\omega_{n2}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{n2}^2}\right)}$$

Numérateur

$$\omega_{nn} = \sqrt{\frac{1}{2 \times 10^{-5}}} \approx 223 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\xi_n = \frac{1}{2} \cdot 4 \times 10^{-3} \cdot \omega_{nd} \approx 0,44$$

Pour un polynôme du second degré dont les racines sont $r = a \pm i \cdot b$

$$D1(p) = \left(1 - \frac{p}{r_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{r_2}\right)$$

$$D1(p) = 1 - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \cdot p + \frac{p^2}{r_1 \cdot r_2}$$

$$D1(p) = 1 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot p + \frac{p^2}{r_1 \cdot r_2}$$

en identifiant on obtient

$$\omega_n = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$$

$$\xi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}$$

compte tenu des racines :

$$\omega_{n1} = \sqrt{76900} \approx 277 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

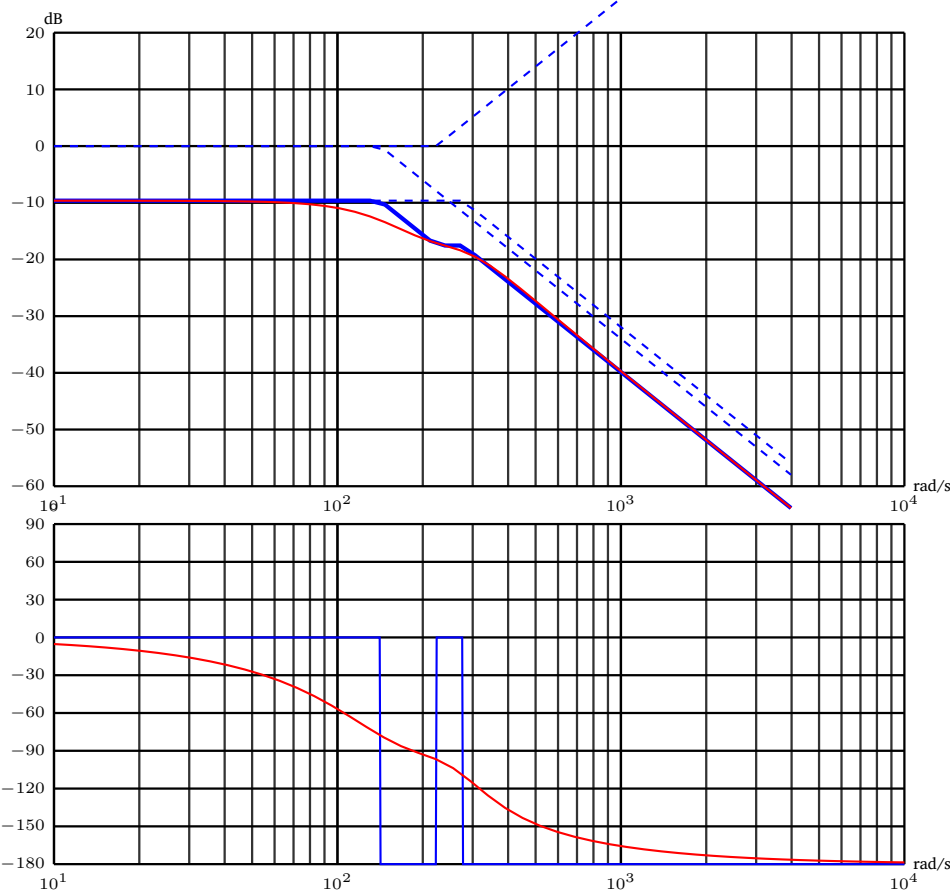
$$\xi_1 = 0,43$$

et

$$\omega_{n,2} = \sqrt{20000} = 100 \cdot \sqrt{2} \approx 141,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$$

Q14. Tracer les asymptotes des diagrammes de Bode de $H(p)$, préciser les différents éléments caractéristiques.



Le tracé global des asymptotes (trait épais bleu) est la somme graphique des différentes asymptotes des 3 seconds ordres (1 au numérateur et 2 au dénominateur), la pente à l'infini est de -40 dB/dec .

Q15. Correction proportionnelle : $C(p) = K_p$

Q15a. Déterminer l'erreur statique

Q15b. Justifier l'utilisation d'un correcteur P.I.

On voit sur les diagrammes de Bode que le système est stable pour toutes les valeurs de K_p (la phase ne va jamais au delà de -180°). On peut donc déterminer l'erreur statique.

La fonction de transfert est de classe 0. L'erreur indicielle relative est donc :

$$\varepsilon_i = \frac{1}{1 + K_{BO}}$$

avec $K_{BO} = 0,33 \cdot K_p$

L'erreur indicielle ne peut être nulle.

Pour annuler l'erreur indicielle, il faut que le système soit de classe 1. Un intégrateur pourrait suffire mais le système risque d'être instable. Un correcteur P.I permet de ne pas dégrader la stabilité.

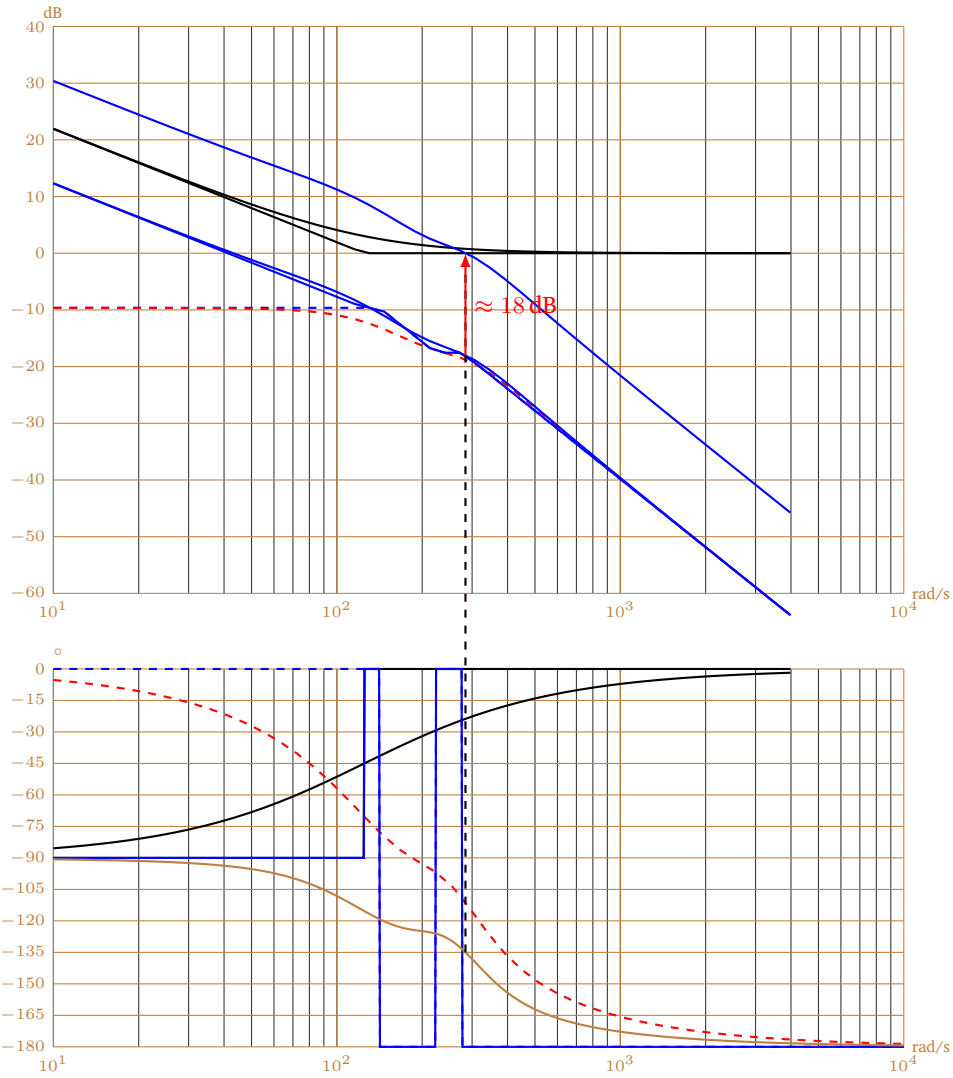
Q16. Correction proportionnelle intégrale : $C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$ avec $T_i = 0,008 \text{ s}$

Q16a. Compléter le diagramme de Bode précédent en ajoutant le correcteur P.I (pour $K_p = 1$).

Q16b. Tracer les diagrammes de Bode du système corrigé.

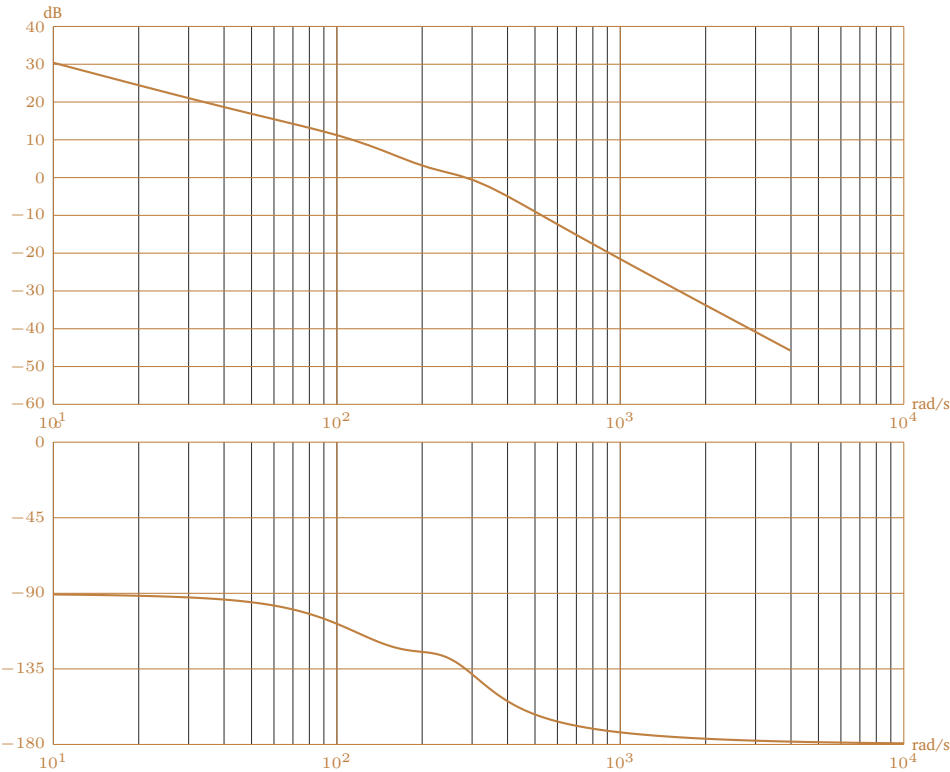
Q16c. Déterminer les marges de phase et de gain.

Q16d. Déterminer la valeur maximale que peut prendre la constante K_p tout en conservant une marge de gain supérieure à 10 dB et une marge de phase supérieure à 45° .



Le tracé du correcteur est en noir sur le diagramme, il apporte un déphasage de -90° aux basses fréquence et a peu d'effet aux hautes fréquences.

Le système corrigé avec $K_p = 1$ en bleu.



Le diagramme d'amplitude présente une pente de -20 dB/dec pour les basses fréquences et une pente de -40 dB/dec lorsque $\omega \rightarrow \infty$.

La marge de gain est toujours supérieure à 10 dB car la courbe de phase ne passe jamais au delà de -180° .

Il est possible de décaler la courbe de gain de 18 dB pour obtenir une marge de phase de 45° soit $K_p \approx 8$.

On détermine $K_s = \frac{0,33 \cdot K_p}{T_i} = 300$ et τ_s pour la pulsation pour laquelle $\arg(H(j \cdot \omega)) = -135^\circ$ soit $\omega_s \approx 280 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit $\tau_s \approx 0,0036 \text{ s}$.

Le diagramme d'amplitude de la fonction de transfert simplifiée est très proche de la courbe réelle (figure 12). Le diagramme de phase est proche pour les basses fréquences et s'écarte après la pulsation de coupure.

Q17. Déterminer à partir de ce modèle approché, la fonction de transfert en boucle fermée, mettre sous forme canonique, préciser les différents paramètres.

$$\tau_s = \frac{1}{280} \text{ s et } K_s = 330.$$

$$BF(p) = \frac{K_s}{K_s + p \cdot (1 + \tau_s \cdot p)}$$

$$BF(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_s} + \frac{\tau_s}{K_s} \cdot p^2}$$

Q18. À partir de l'abaque des dépassements et des temps de réponses, tracer l'allure de la réponse temporelle. Préciser les caractéristiques de la réponse temporelle.

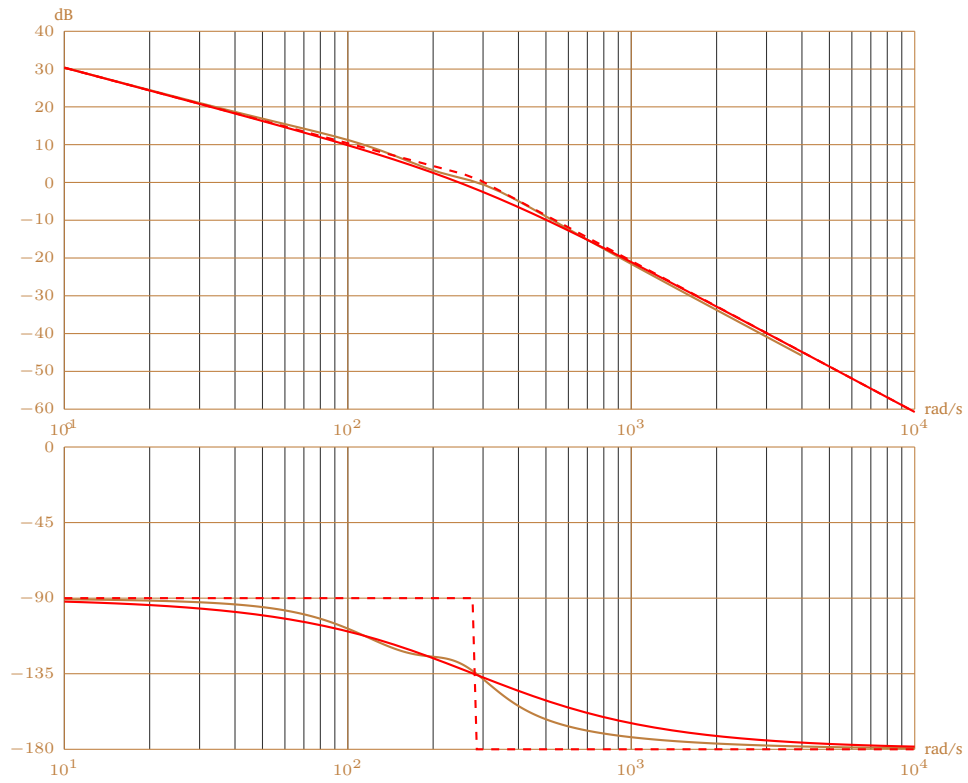


FIGURE 12 – Modélisation simplifiée de la fonction de transfert en boucle ouverte