0.1 DM automne - Systèmes linéaires et asservis

DM - Automne

QCM 1 - 1r ordre généralisé

Corrigé page 9

Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$3\cdot\frac{\mathrm{d}\,e(t)}{\mathrm{d}t}+2\cdot e(t)=\frac{\mathrm{d}\,s(t)}{\mathrm{d}t}+2\cdot s(t) \quad (1)$$

On pose $E(p)=\mathcal{L}(e(t))$ et $S(p)=\mathcal{L}(s(t))$. On se place dans les conditions de Heaviside.

Q1. Écrire l'équation (1) dans le domaine de Laplace.

Q2. Déterminer la fonction de transfert $G(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}$.

Q3. Mettre le numérateur et le dénominateur sous forme canonique. Préciser le gain de la fonction de transfert.

Q4. Donner la transformée de Laplace de $e(t)=E_0\cdot\mathcal{H}(t)$.

Q5. Montrer que $S(p)$ pour une entrée en échelon $e(t)=0.5\cdot\mathcal{H}(t)$ (avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside) s'écrit :

$$S(p)=\frac{0{,}5}{1+0{,}5\cdot p}+\frac{0.5}{p}$$

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau\cdot p}$
$a\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p}$
$a\cdot u(t-\tau)$	$\frac{a}{p}\cdot e^{-\tau\cdot p}$
$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$a\cdot t\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p^2}$
$t^n\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-a\cdot t}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p+a}$

TABLE 0.1.0 – Transformées de Laplace

Q6. Déterminer $\lim\limits_{t\to\infty} s(t)$, préciser le théorème utilisé.

Q7. Déterminer, à partir du tableau des transformée inverses, la réponse temporelle pour cette entrée échelon.

Q8. Tracer la réponse temporelle de $s(t)$. Déterminer graphiquement le temps de réponse à 5% et la tangente à l'origine.

Q9. On considère maintenant $e(t)=2\cdot t\cdot\mathcal{H}(t)$. Déterminer $S(p)$.

Q10. Montrer que $S(p)$ s'écrit

$$S(p)=\frac{A}{1+0{,}5\cdot p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p}$$

Déterminer A, B et C.

Q11. Déterminer $s(t)$.

QCM

Q1. Finalement la fonction de transfert $\frac{S(p)}{E(p)}$ s'écrit :

Rép. A : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2 \cdot p + 3}{2 \cdot p + 1}$

Rép. B : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{p + 2}{3 \cdot p + 2}$

Rép. C : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{3 \cdot p + 2}{p + 2}$

Rép. D : $\frac{E(p)}{S(p)} = \frac{3 \cdot p + 2}{p + 2}$

Q2. On alors peut écrire $S(p)$ pour une entrée en échelon $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$

Rép. A : $S(p) = \frac{3 \cdot p + 2}{p + 2} \cdot \frac{E_0}{p}$

Rép. B : $S(p) = \frac{3 \cdot p + 2}{p + 2} \cdot E_0 \cdot p$

Rép. C : $S(p) = \frac{1{,}5 \cdot p + 1}{0{,}5 \cdot p + 1} \cdot \frac{E_0}{p}$

Rép. D : $S(p) = \frac{3 \cdot p + 2}{p + 2} \cdot E_0$

Q3. Si $E_0 = 0{,}5$ alors

Rép. A : $s(t) = \left(0{,}5 + e^{2 \cdot t}\right) \cdot \mathcal{H}(t)$

Rép. B : $s(t) = \left(0{,}5 + e^{-2 \cdot t}\right) \cdot \mathcal{H}(t)$

Rép. C : $s(t) = \left(0{,}5 + e^{-\frac{t}{2}}\right) \cdot \mathcal{H}(t)$

Rép. D : $s(t) = \left(0{,}5 + e^{-\frac{t}{0{,}5}}\right) \cdot \mathcal{H}(t)$

Q4. On considère maintenant que $e(t) = 2 \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$, on a donc :

Rép. A : $S(p) = \frac{3 \cdot p + 2}{p + 2} \cdot \frac{2}{p^2}$

Rép. B : $S(p) = \frac{3 \cdot p + 2}{p + 2} \cdot 2 \cdot t$

Rép. C : $S(p) = \frac{1{,}5 \cdot p + 1}{0{,}5 \cdot p + 1} \cdot \frac{E_0}{p}$

Rép. D : $S(p) = -\frac{1}{1 + 0{,}5 \cdot p} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p}$

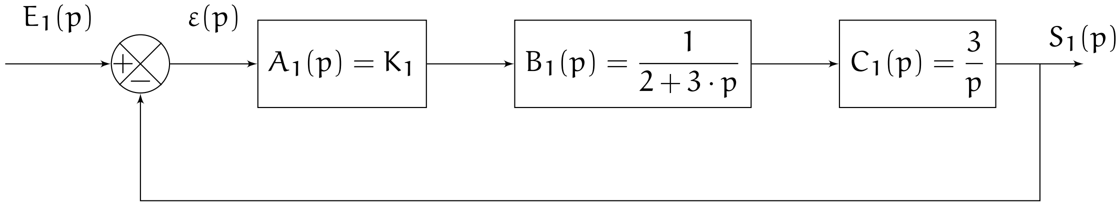
QCM 2 - Manipulation de schéma-blocs - fonction de transfert

Corrigé page 10

Pour cette partie, vous devez avoir lu et compris le cours sur les schéma-blocs : https ://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/2020-2021-mpsi-modelisation_par_les_schema-blocs.pdf

A.

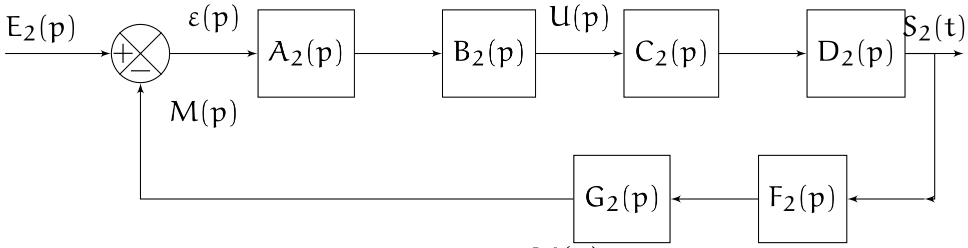
Soit le schéma bloc ci-dessous :



Q1. Déterminer $S_1(p)$ en fonction de $A_1(p)$, $B_1(p)$, $C_1(p)$ et $\varepsilon(p)$ sans développer puis en développant.
Q2. Déterminer $S_1(p)$ en fonction de $A_1(p)$, $B_1(p)$, $C_1(p)$ et $E_1(p)$ sans développer puis en développant.
Q3. En déduire $\frac{S_1(p)}{E_1(p)}$ en fonction de $A_1(p)$, $B_1(p)$, $C_1(p)$ et $E_1(p)$ sans développer puis en développant. Mettre sous la forme $\frac{S_1(p)}{E_1(p)} = \frac{K}{1+a\cdot p+b\cdot p^2}$
Q4. Rappeler la formule de Black pour un schéma blocs à retour unitaire.

B.

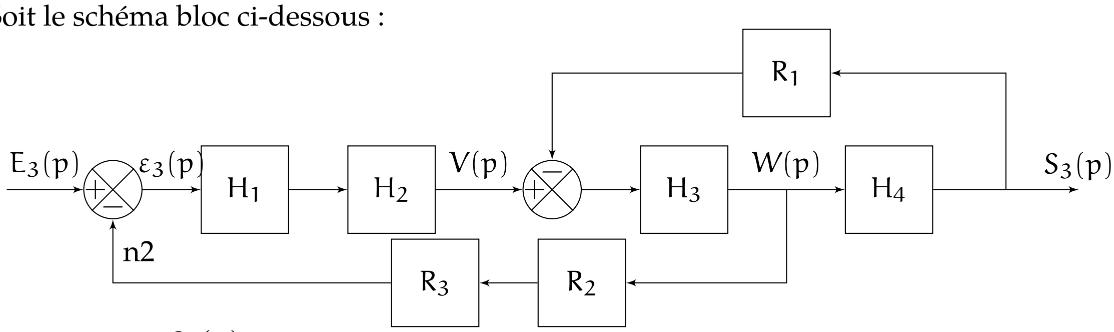
Soit le schéma bloc ci-dessous :



Q5. Déterminer la boucle ouverte $BO_2(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$
Q6. Déterminer la chaîne de retour.
Q7. Déterminer $H_2(p) = \frac{S_2(p)}{E_2(p)}$.
Q8. Rappeler la formule de Black.

C.

Soit le schéma bloc ci-dessous :



Q9. Déterminer $\frac{S_3(p)}{V(p)}$
Q10. Déterminer $V(p)$ en fonction de $\varepsilon_3(p)$ puis en fonction de $E_3(p)$ et $W(p)$ et des différentes fonctions.
Q11. Déterminer $\frac{S_3(p)}{E_3(p)}$.

QCM

Q1. La fonction de transfert $\dfrac{S_1(p)}{E_1(p)}$ s'écrit

Rép. A : $\dfrac{S_1(p)}{E_1(p)} = A_1(p) \cdot B_1(p) \cdot C_1(p)$

Rép. B : $\dfrac{S_1(p)}{E_1(p)} = \dfrac{1 + A_1(p) \cdot B_1(p) \cdot C_1(p)}{A_1(p) \cdot B_1(p) \cdot C_1(p)}$

Rép. C : $\dfrac{S_1(p)}{E_1(p)} = \dfrac{A_1(p) \cdot B_1(p) \cdot C_1(p)}{1 + A_1(p) \cdot B_1(p) \cdot C_1(p)}$

Rép. D : $\dfrac{S_1(p)}{E_1(p)} = \dfrac{1 - A_1(p) \cdot B_1(p) \cdot C_1(p)}{A_1(p) \cdot B_1(p) \cdot C_1(p)}$

Q2. Compte tenu des valeurs numériques :

Rép. A : $\dfrac{S_1(p)}{E_1(p)} = \dfrac{3 \cdot K_1}{(2 + 3 \cdot p) \cdot p + 3 \cdot K_1}$

Rép. B : $\dfrac{S_1(p)}{E_1(p)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{2}{3 \cdot K_1} \cdot p + \dfrac{3}{3 \cdot K_1} \cdot p^2}$

Rép. C : $\dfrac{S_1(p)}{E_1(p)} = \dfrac{3 \cdot K_1}{1 + \dfrac{2}{3 \cdot K_1} \cdot p + \dfrac{3}{3 \cdot K_1} \cdot p^2}$

Rép. D : $\dfrac{S_1(p)}{E_1(p)} = \dfrac{(2 + 3 \cdot p) \cdot p + 3 \cdot K_1}{3 \cdot K_1}$

Q3. La fonction de transfert $\dfrac{S_2(p)}{E_2(p)}$ s'écrit :

Rép. A : $\dfrac{S_2(p)}{E_2(p)} = \dfrac{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D_2}{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D_2 + F_2 \cdot G_2}$

Rép. B : $\dfrac{S_2(p)}{E_2(p)} = \dfrac{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D_2}{1 + A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D_2 \cdot F_2 \cdot G_2}$

Rép. C : $\dfrac{S_2(p)}{E_2(p)} = \dfrac{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D_2}{1 - A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D_2 \cdot F_2 \cdot G_2}$

Rép. D : $\dfrac{S_2(p)}{E_2(p)} = \dfrac{1 + A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D_2}{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D_2 \cdot F_2 \cdot G_2}$

On s'intéresse au troisième diagramme

Q4. Quelles sont les réponses vraies ?

Rép. A : $\dfrac{S_3(p)}{E_3(p)} = \dfrac{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4}{1 - H_3 \cdot H_4 \cdot R_1 - H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot R_2 \cdot R_3}$

Rép. B : $\dfrac{S_3(p)}{E_3(p)} = \dfrac{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4}{1 + H_3 \cdot H_4 \cdot R_1 + H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot R_2 \cdot R_3}$

Rép. C : $S_3(p) = H4 \cdot W(p)$

Rép. D : $\dfrac{S_3(p)}{V_3(p)} = \dfrac{H_3 \cdot H_4}{1 + H_3 \cdot H_4 \cdot R_1}$

QCM 3 - Mise en équation d'un réacteur chimique

Corrigé page 11

Le schéma de la figure 0.1.1 décrit un réacteur chimique de volume V alimenté en continu par un produit A de concentration c_{in} à un débit Q.

Afin de garder le niveau constant dans le réacteur, on soutire le milieu de réaction au même débit Q. De plus, un agitateur mélange parfaitement les produits à l'intérieur du réacteur (par exemple le produit A venant de l'alimentation, est instantanément et parfaitement réparti dans le réacteur).

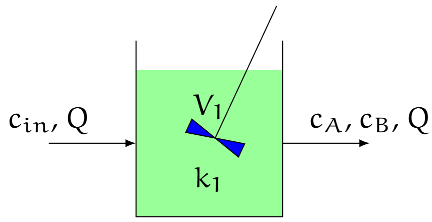


FIGURE 0.1.1 – Réacteur chimique

À l'intérieur du réacteur a lieu une réaction chimique qui transforme le produit A (concentration c_A) en un nouveau produit B (concentration c_B), selon la réaction suivante :

$$A \xrightarrow{k} B$$

La réaction chimique est du premier ordre, c'est à dire que la cinétique est proportionnelle à la concentration c_A, et la constante de proportionnalité (aussi appelée vitesse spécifique) est noté k.

À partir d'un bilan de concentration, on peut écrire les deux équations différentielles :

— pour le produit A

$$\frac{d\,c_A(t)}{dt} = \frac{Q}{V} \cdot c_{in}(t) - \frac{Q}{V} \cdot c_A(t) - k \cdot c_A(t)$$

— pour le produit B

$$\frac{d\,c_B(t)}{dt} = +k \cdot c_A(t) - \frac{Q}{V} \cdot c_B(t)$$

Pour les applications numériques : $V = 100\,m^3$.

On se place dans les conditions de Heaviside autour du point de fonctionnement nominal. On suppose que le débit d'alimentation du réactif reste constant ($Q = Q_0 = 100\,m^3/min$).

On note $C_{in}(p)$, $C_A(p)$ et $C_B(p)$ les transformées de Laplace de $c_{in}(t)$, $c_A(t)$ et $c_B(t)$.

Q1. Écrire les équations dans le domaine de Laplace

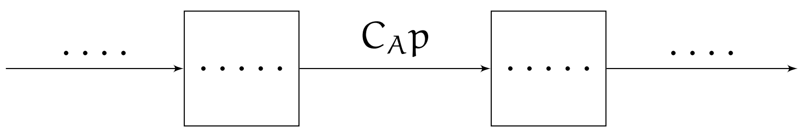
On rappelle que la forme canonique d'un premier ordre est $H_1(p) = \dfrac{K_1}{1 + \tau_1 \cdot p}$.

Q2. Déterminer les deux fonctions de transfert $H_A(p) = \dfrac{C_A(p)}{C_{in}(p)}$ et $H_B(p) = \dfrac{C_B(p)}{C_A(p)}$, les mettre sous forme canonique.

On note τ_A, K_A et τ_B , K_b respectivement la contante de temps et le gain des fonctions de transfert $H_A(p)$ et $H_B(p)$

Q3. Préciser le gain et la constante de temps pour chacune des fonctions de transfert en fonction de Q, V et k.

Q4. Compléter le schéma bloc



Q5. En déduire $H(p) = \dfrac{C_B(p)}{C_{in}(p)}$.

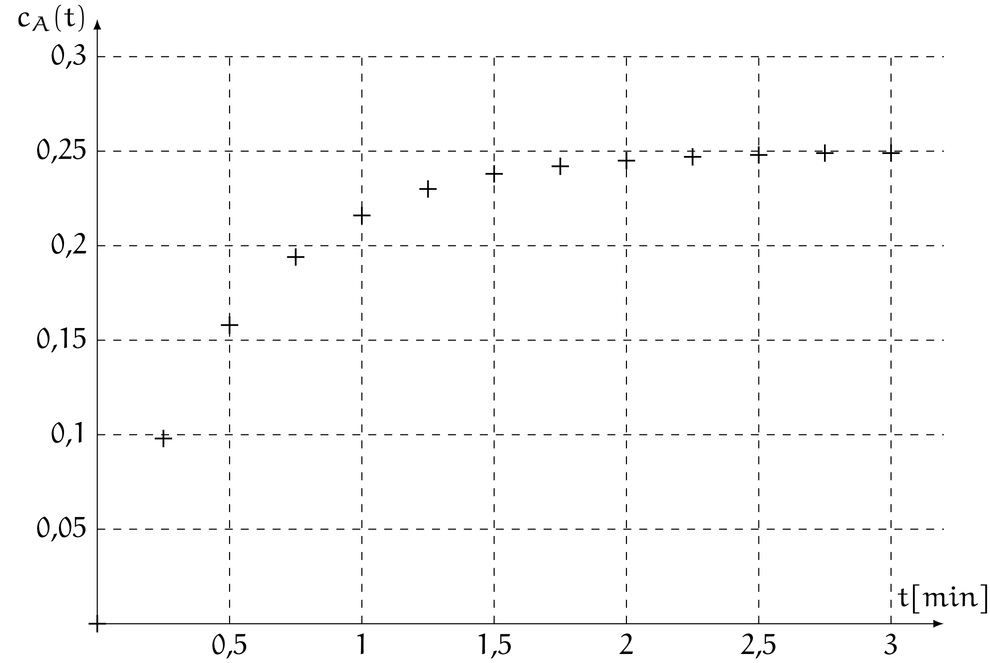
Un essai a permis de relever l'évolution de la concentration en produit A à la sortie du réacteur pour une évolution en échelon de la concentration du produit A à l'entrée du réacteur.

Cette évolution est modélisée par un échelon : $c_{in}(t) = C_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $C_0 = 0{,}5\,\mathrm{mol} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ et $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

Le tableau et la caractéristique de la figure 0.1.2 montre l'évolution de cette concentration.

t min	$c_A(t)$ $\mathrm{mol} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
0	0.
0.25	0.98e-1
0.50	0 .158
0.75	0.194
1.00	0.216
1.25	0.230
1.50	0.238
1.75	0.242
2.00	0.245
2.25	0.247
2.50	0.248
2.75	0.249
3.00	0.249

(a) relevé



(b)

FIGURE 0.1.2 – relevé expérimental de l'évolution de la concentration en produit A pour une évolution de la concentration à l'entrée en échelon $C_0 = 0{,}5\,\mathrm{mol} \cdot \mathrm{m}^{-3}$

On se propose de modéliser cette réponse par une fonction de transfert du premier ordre : $H_1(p) = \dfrac{S(p)}{E(p} = \dfrac{K_1}{1 + \tau_1 \cdot p}$.

On sait que la réponse d'un système du premier ordre à un échelon de consigne $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ s'écrit :

$$s(t) = K_1 \cdot E_0 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)\right) \mathcal{H}(t)$$

Q6. Justifier cette forme.
Q7. Déterminer $s(\tau)$ et $s(3 \cdot \tau)$ et la tangente pour $t = 0$.
Q8. À partir du relevé de la figure 0.1.2, justifier que l'on peut modéliser ce système comme un premier ordre, déterminer alors, le temps de réponse à 5% ($T_{5\%}$) et le gain K_2 et la constante de temps τ_2. En déduire la valeur de la vitesse spécifique k.

Pour la suite, quelle que soit la valeur trouvée précédemment, on prendra pour $H(p)$

$$H(p) = \frac{1}{2 + 3 \cdot p + p^2}$$

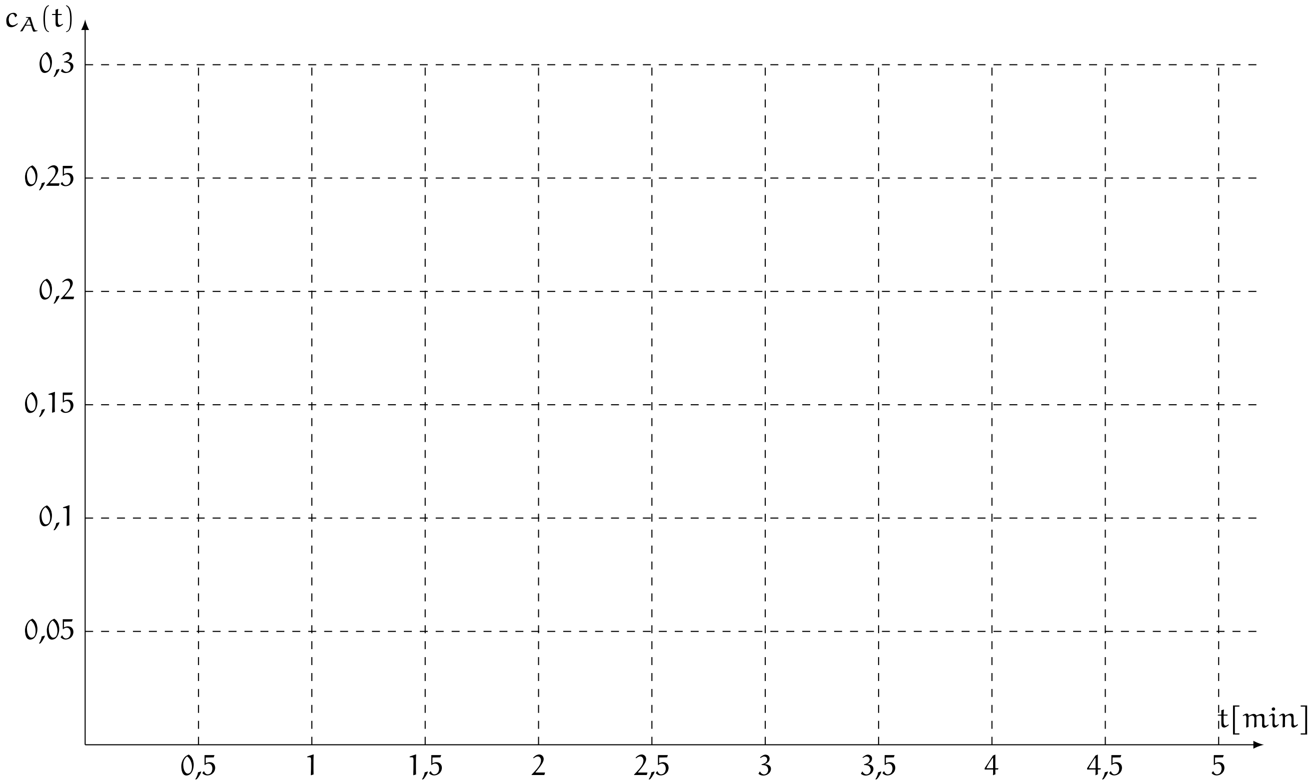
Q9. Mettre $H(p)$ sous forme canonique. préciser le gain le coefficient d'amortissement et la pulsation propre.
Q10. Déterminer la transformée de Laplace de l'échelon de concentration $c_{in}(t) = C_0 \cdot \mathcal{H}(t)$. En déduire $C_B(p)$
Q11. Déterminer la valeur finale $\lim\limits_{t \to \infty} (c_B(t))$, la valeur initiale, et la tangente initiale.

Q12. Montrer que $C_B(p)$ peut s'écrire sous la forme $C_B(p) = \dfrac{A}{p+1} + \dfrac{B}{p+2} + \dfrac{C}{p}$, déterminer A, B, C.

Q13. Déterminer $c_B(t)$, à partir du tableau des transformées.

$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau \cdot p}$
$a \cdot \mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p}$
$a \cdot u(t-\tau)$	$\dfrac{a}{p} \cdot e^{-\tau \cdot p}$
$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p^2}$
$t^n \cdot \mathcal{H}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-a \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$

Q14. Tracer $c_2(t)$, préciser le temps de réponse à 5%. Conclure,



QCM

Q1. Les deux fonctions $H_A(p) = \dfrac{C_A(p)}{C_{in}(p)}$ et $H_B(p) = \dfrac{C_B(p)}{C_A(p)}$ s'écrivent :

Rép. A : $\dfrac{C_A(p)}{C_{in}(p)} = \dfrac{Q}{Q+k\cdot V}\dfrac{1}{\dfrac{V}{Q+k\cdot V}\cdot p+1}$

Rép. B : $\dfrac{C_A(p)}{C_{in}(p)} = \dfrac{Q}{Q+k\cdot V}\dfrac{1}{\dfrac{V}{Q+k\cdot V}\cdot p-1}$

Rép. C : $\dfrac{C_B(p)}{C_A(p)} = \dfrac{-k}{p+\frac{Q}{V}}$

Rép. D : $\dfrac{C_B(p)}{C_A(p)} = \dfrac{+k}{p+\frac{Q}{V}}$

Q2. Le gain et la constante de temps pour chacune des fonctions de transfert s'écrivent :

Rép. A : $\tau_A = \dfrac{V}{Q}$ et $\tau_B = \dfrac{V}{Q+k\cdot V}$

Rép. B : $\tau_A = \dfrac{V}{Q+k\cdot V}$ et $\tau_B = \dfrac{V}{Q}$

Rép. C : $K_A = \dfrac{Q}{Q+k\cdot V}$ et $K_B = \dfrac{k\cdot V}{Q}$

Rép. D : $K_A = \dfrac{Q}{Q}$ et $K_B = \dfrac{k\cdot V}{Q+k\cdot V}$

Q3. On lit sur la courbe réponse pour τ, $s(\tau)$ et $s(3\cdot\tau)$.

Rép. A : $s(\tau) = 63\% \times 0{,}25$ et $s(3\tau) = 95\% \times 0{,}25$

Rép. B : $T_{5\%} = \tau = 1{,}5\,\text{min}$

Rép. C : $s(\tau) = 95\% \times 0{,}25$

Rép. D : $T_{5\%} = 1{,}5\,\text{min}$

Q4. $C_B(p)$ s'écrit :

Rép. A : $C_B(p) = \dfrac{1}{2+3\cdot p+p^2}$

Rép. B : $C_B(p) = \dfrac{0{,}5}{(1+p)\cdot(1+0{,}5\cdot p)}\cdot\dfrac{0{,}5}{p}$

Rép. C : $C_B(p) = \dfrac{0{,}5}{(1+p)\cdot(1+0{,}5\cdot p)}\cdot\dfrac{0{,}5}{p^2}$

Rép. D : $C_B(p) = \dfrac{-C_0}{p+1} + \dfrac{0{,}5\cdot C_0}{p+2} + \dfrac{0{,}5\cdot C_0}{p}$

Q5. $C_B(t)(p)$ s'écrit :

Rép. A : $C_B(t) = C_0\left(0{,}5 - e^{-t} + 0{,}5\cdot e^{-2\cdot t}\right)\mathcal{H}(t)$

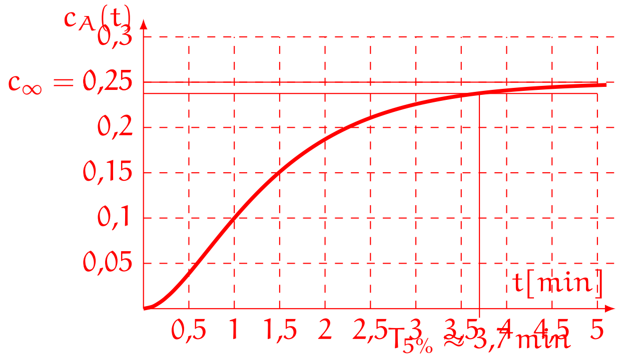
Rép. B : $C_B(t) = C_0\left(0{,}5 - e^{-t} + 0{,}5\cdot e^{-\frac{\cdot t}{0{,}5}}\right)\mathcal{H}(t)$

Rép. C : $C_B(t) = C_0\left(0{,}5 - e^{-2\cdot t} + 0{,}5\cdot e^{-t}\right)\mathcal{H}(t)$

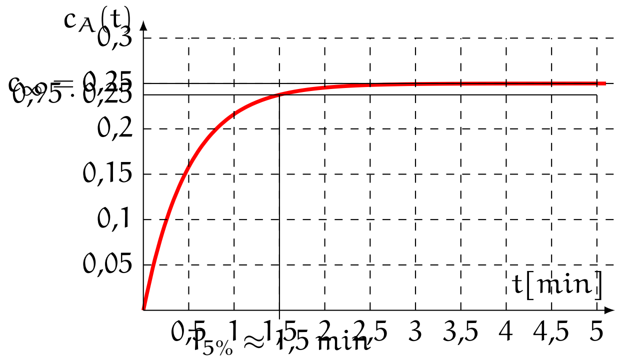
Rép. D : $C_B(t) = C_0\left(0{,}5 - e^{-t}\cdot\cos(2\cdot t)\right)\mathcal{H}(t)$

Q6. Laquelle de ces courbes représente la réponse temporelle de $c_B(t)$ pour une entrée en échelon.

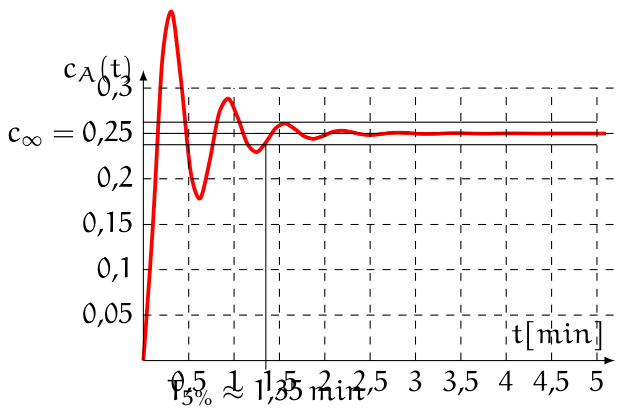
Rép. A :



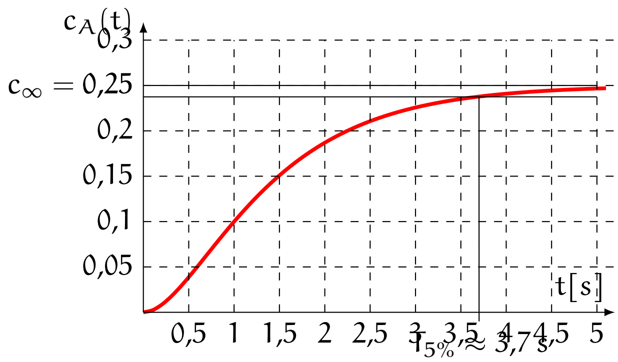
Rép. B :



Rép. C :



Rép. D :



Corrections

Cor. 1 : 1r ordre généralisé

Sujet page 1

Q1. Écrire l'équation (1) dans le domaine de Laplace.

$$3 \cdot p \cdot E(p) + 2 \cdot E(p) = p \cdot S(p) + 2 \cdot S(p)$$
$$(3 \cdot p + 2) \cdot E(p) = (p + 2) \cdot S(p)$$

Q2. Déterminer la fonction de transfert $G(p) = \frac{S(p}{E(p)}$.

$$G(p) = \frac{S(p}{E(p} = \frac{3 \cdot p + 2}{p + 2}$$

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{1,5 \cdot p + 1}{0,5 \cdot p + 1}} \longrightarrow S(p)$$

Q3. Mettre le numérateur et le dénominateur sous forme canonique. Préciser le gain de la fonction de transfert.

$$G(p) = \frac{S(p}{E(p} = \frac{1,5 \cdot p + 1}{0,5 \cdot p + 1}$$

Le gain est $G = 1$.

Q4. Donner la transformée de Laplace de $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$.

$$E(p) = \frac{E_0}{p}$$

Q5. Montrer que $S(p)$ pour une entrée en échelon $e(t) = 0.5 \cdot \mathcal{H}(t)$ (avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside) s'écrit :

$$S(p) = \frac{0,5}{1 + 0,5 \cdot p} + \frac{0.5}{p}$$

$$S(p) = \frac{1,5 \cdot p + 1}{0,5 \cdot p + 1} \cdot \frac{0.5}{p} = \frac{A}{1 + 0,5 \cdot p} + \frac{B}{p}$$

$$S(p) = \frac{1,5 \cdot p + 1}{0,5 \cdot p + 1} \cdot \frac{0.5}{p} = \frac{(A + 0,5 \cdot B) \cdot p + B}{(0,5 \cdot p + 1) \cdot p}$$

Par identification

$$B = 0,5$$
$$A = 0,5 \cdot B = 0,75$$

d'où $A = 0,5$ et $B = 0,5$

Q6. Déterminer $\lim_{t \to \infty} s(t)$, préciser le théorème utilisé.

On utilise le théorème de la valeur finale.

$$\lim_{t \to \infty} (s(t)) = \lim p \to 0 (p \cdot S(p))$$

$$\lim_{t \to \infty} (s(t)) = \lim_{p \to 0} \left(p \cdot \frac{1,5 \cdot p + 1}{0,5 \cdot p + 1} \cdot \frac{0.5}{p} \right)$$

$$\lim_{t \to \infty} (s(t)) = 0,5$$

Q7. Déterminer, à partir du tableau des transformée inverses, la réponse temporelle pour cette entrée en échelon.

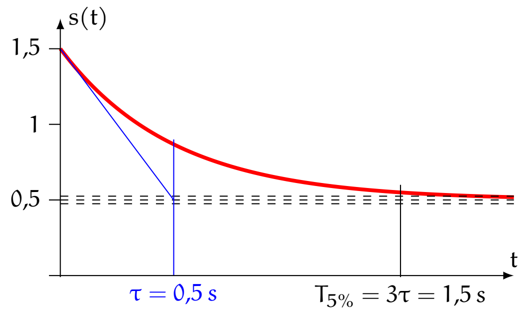
On recherche dans le tableau des transformées :

$$\frac{0,5}{0,5 \cdot p + 1} = \frac{1}{p + 2}$$

$$\frac{0,5}{p} \to 0,5 \cdot \mathcal{H}(t)$$
$$\frac{1}{p + 2} \to e^{-2 \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$$

$$s(t) = \left(0,5 + e^{-2 \cdot t}\right) \cdot \mathcal{H}(t)$$

Q8. Tracer la réponse temporelle de $s(t)$. Déterminer graphiquement le temps de réponse à 5% et la tangente à l'origine.



Q9. On considère maintenant $e(t) = 2 \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$. Déterminer $S(p)$.

On a donc :

$$E(p) = \frac{2}{p^2}$$

d'où

$$S(p) = \frac{1,5 \cdot p + 1}{0,5 \cdot p + 1} \cdot \frac{2}{p^2}$$

Q10. Montrer que $S(p)$ s'écrit

$$S(p) = \frac{A}{1 + 0,5 \cdot p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p}$$

Déterminer A, B et C.

Vérifions par identification :

$$\frac{1,5 \cdot p + 1}{0,5 \cdot p + 1} \cdot \frac{2}{p^2} = \frac{A}{1 + 0,5 \cdot p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p}$$
$$\frac{3 \cdot p + 2}{(0,5 \cdot p + 1) \cdot p^2} = \frac{A \cdot p^2 + B \cdot (1 + 0,5 \cdot p) + C \cdot p \cdot (1 + 0,5 \cdot p)}{p^2 \cdot (1 + 0,5 \cdot p)}$$
$$\frac{3 \cdot p + 2}{(0,5 \cdot p + 1) \cdot p^2} = \frac{(A + 0,5 \cdot C) \cdot p^2 + (0,5 \cdot B + C) \cdot p + B}{p^2 \cdot (1 + 0,5 \cdot p)}$$

On obtient :

$$B = 2$$
$$0,5 \cdot B + C = 3 \Rightarrow C = 3 - 0,5 \cdot B = 2$$
$$A + 0,5 \cdot C = 0 \Rightarrow A = -0,5 \cdot C = -1$$

d'où

$$S(p) = -\frac{1}{1+0{,}5\cdot p} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p}$$

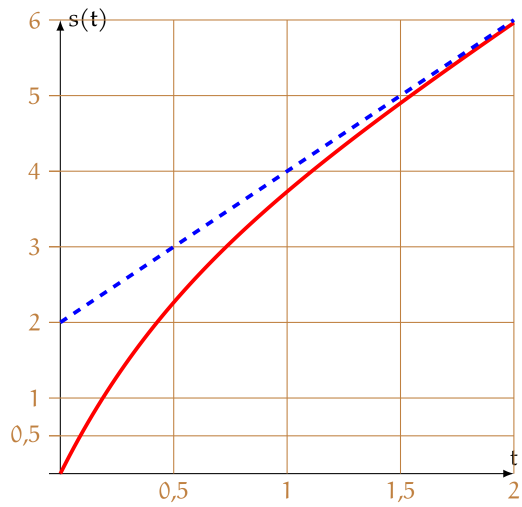
que l'on peut mettre sous la forme :

$$S(p) = -\frac{2}{2+p} + \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p}$$

Q11. Déterminer $s(t)$.

À partir du tableau des transformées inverses :

$$s(t) = \left(2 + 2\cdot t - 2\cdot e^{-2\cdot t}\right)\cdot \mathcal{H}(t)$$



Cor. 2 : Manipulation de schéma-blocs - fonction de transfert

Sujet page 3

Q1. Déterminer $S_1(p)$ en fonction de $A_1(p)$, $B_1(p)$, $C_1(p)$ et $\varepsilon(p)$ sans développer puis en développant.

$$S_1(p) = A_1(p)\cdot B_1(p)\cdot C_1(p)\cdot \varepsilon(p)$$
$$S_1(p) = K_1\cdot \frac{1}{2+3\cdot p}\cdot\frac{3}{p}\cdot\varepsilon(p)$$
$$S_1(p) = \frac{3\cdot K_1}{(2+3\cdot p)\cdot p}\cdot\varepsilon(p)$$

Q2. Déterminer $S_1(p)$ en fonction de $A_1(p)$, $B_1(p)$, $C_1(p)$ et $E_1(p)$ sans développer puis en développant.

$$S_1(p) = A_1(p)\cdot B_1(p)\cdot C_1(p)\cdot (E_1(p) - S_1(p))$$

$$S_1(p) = \frac{A_1(p)\cdot B_1(p)\cdot C_1(p)}{1 + A_1(p)\cdot B_1(p)\cdot C_1(p)}\cdot E_1(p)$$

en remplaçant

$$S_1(p) = \frac{\dfrac{3\cdot K_1}{(2+3\cdot p)\cdot p}}{1+\dfrac{3\cdot K_1}{(2+3\cdot p)\cdot p}}\cdot E_1(p)$$
$$S_1(p) = \frac{3\cdot K_1}{(2+3\cdot p)\cdot p + 3\cdot K_1}\cdot E_1(p)$$
$$S_1(p) = \frac{3\cdot K_1}{3\cdot K_1 + 2\cdot p + 3\cdot p^2}\cdot E_1(p)$$

Q3. En déduire $\frac{S_1(p)}{E_1(p)}$ en fonction de $A_1(p)$, $B_1(p)$, $C_1(p)$ et $E_1(p)$ sans développer puis en développant. Mettre sous la forme $\frac{S_1(p)}{E_1(p)} = \frac{K}{1+a\cdot p + b\cdot p^2}$

$$\frac{S_1(p)}{E_1(p)} = \frac{A_1(p)\cdot B_1(p)\cdot C_1(p)}{1 + A_1(p)\cdot B_1(p)\cdot C_1(p)}$$
$$\frac{S_1(p)}{E_1(p)} = \frac{3\cdot K_1}{3\cdot K_1 + 2\cdot p + 3\cdot p^2}$$
$$\frac{S_1(p)}{E_1(p)} = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{3\cdot K_1}\cdot p + \dfrac{3}{3\cdot K_1}\cdot p^2}$$

Q4. Rappeler la formule de Black pour un schéma blocs à retour unitaire.

Si on nomme $CD(p)$ la chaîne directe entre l'entrée et la sortie (dans l'exercice ci-dessus $CD(p) = A_1(p)\cdot B_1(p)\cdot C_1(p)$ alors la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit

$$BF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{CD(p)}{1+CD(p)}$$

Dans le cas d'un schéma-bloc à retour unitaire, on nomme boucle ouverte $BO(p) = CD(p)$. La formule de Black s'écrit donc aussi :

$$BF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{BO(p)}{1+BO(p)}$$

Q5. Déterminer la boucle ouverte $BO_2(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$

$$BO_2(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = A_2(p)\cdot B_2(p)\cdot C_2(p)\cdot D_2(p)\cdot F_2(p)\cdot G_2(p)$$

Q6. Déterminer la chaîne de retour.

$$CR_2(p) = F_2(p)\cdot G_2(p)$$

Q7. Déterminer $H_2(p) = \frac{S_2(p)}{E_2(p)}$.

$$S_2(p) = A_2(p)\cdot B_2(p)\cdot C_2(p)\cdot D_2(p)\cdot\varepsilon(p)$$

On pose pour la suite $CD_2(p) = A_2(p)\cdot B_2(p)\cdot C_2(p)\cdot D_2(p)$, la chaîne directe.

$$S_2(p) = CD_2(p) \cdot \varepsilon(p)$$
$$S_2(p) = CD_2(p) \cdot (E_2(p) - M(p))$$
$$S_2(p) = CD_2(p) \cdot (E_2(p) - F_2(p) \cdot G_2(p) \cdot S_2(p))$$

On pose pour la suite $CR_2(p) = F_2(p) \cdot G_2(p)$ la chaîne de retour.

$$S_2(p) = CD_2(p) \cdot (E_2(p) - CR_2(p) \cdot S_2(p))$$

$$S_2(p)\,(1 + CD_2(p) \cdot CR_2(p)) = CD_2(p) \cdot E_2(p)$$

d'où

$$S_2(p) = \frac{CD_2(p)}{1 + CD_2(p) \cdot CR_2(p)} \cdot E_2(p)$$

en remplaçant :

$$S_2(p) = \frac{A_2(p) \cdot B_2(p) \cdot C_2(p) \cdot D_2(p)}{1 + A_2(p) \cdot B_2(p) \cdot C_2(p) \cdot D_2(p) \cdot F_2(p) \cdot G_2(p)} \cdot E_2(p)$$

Q8. Rappeler la formule de Black.

$$\frac{S_2(p)}{E_2(p)} = \frac{CD_2(p)}{1 + CD_2(p) \cdot CR_2(p)}$$

et en posant $BO_2(p) = CD_2(p) \cdot CR_2(p)$ on peut aussi l'écrire :

$$\frac{S_2(p)}{E_2(p)} = \frac{CD_2(p)}{1 + BO_2(p)}$$

Q9. Déterminer $\frac{S_3(p)}{V(p)}$

$$S_3(p) = H_3 \cdot H_4 \cdot ((V(p) - R_1 \cdot S_3(p))$$

$$S_3(p)\,(1 + H_3 \cdot H_4 \cdot R_1) = H_3 \cdot H_4 \cdot V(p)$$

d'où

$$\frac{S_3(p)}{V_3(p)} = \frac{H_3 \cdot H_4}{1 + H_3 \cdot H_4 \cdot R_1}$$

Q10. Déterminer $V(p)$ en fonction de $\varepsilon_3(p)$ puis en fonction de $E_3(p)$ et $W(p)$ et des différentes fonctions.

$$V_3(p) = H_1 \cdot H_2 \cdot \varepsilon_3(p)$$
$$V_3(p) = H_1 \cdot H_2 \cdot (E_3(p) - n2)$$
$$V_3(p) = H_1 \cdot H_2 \cdot (E_3(p) - R_2 \cdot R_3 \cdot W(p))$$

Q11. Déterminer $\frac{S_3(p)}{E_3(p)}$.

$$S_3(p) = \frac{H_3 \cdot H_4}{1 + H_3 \cdot H_4 \cdot R_1} \cdot V_3(p)$$
$$S_3(p) = \frac{H_3 \cdot H_4}{1 + H_3 \cdot H_4 \cdot R_1} \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot (E_3(p) - R_2 \cdot R_3 \cdot W(p))$$

On a aussi

$$S_3(p) = H4 \cdot W(p)$$

en remplaçant

$$S_3(p) = \frac{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4}{1 + H_3 \cdot H_4 \cdot R_1} \cdot \left(E_3(p) - R_2 \cdot R_3 \cdot \frac{S_3(p)}{H4}\right)$$

$$S_3(p)\left(1 + \frac{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot R_2 \cdot R_3}{1 + H_3 \cdot H_4 \cdot R_1}\right) = \frac{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4}{1 + H_3 \cdot H_4 \cdot R_1} \cdot E_3(p)$$

finalement

$$\frac{S_3(p)}{E_3(p)} = \frac{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4}{1 + H_3 \cdot H_4 \cdot R_1 + H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot R_2 \cdot R_3}$$

Cor. 3 : Mise en équation d'un réacteur chimique

Sujet page 5

Q1. Écrire les équations dans le domaine de Laplace

— pour le produit A

$$\frac{d\,c_A(t)}{dt} = \frac{Q}{V} \cdot c_{in}(t) - \frac{Q}{V} \cdot c_A(t) - k \cdot c_A(t)$$
$$p \cdot C_A(p) = \frac{Q}{V} \cdot C_{in}(p) - \frac{Q}{V} \cdot C_A(p) - k \cdot C_A(p)$$
$$\left(p + \frac{Q}{V} + k\right) \cdot C_A(p) = \frac{Q}{V} \cdot C_{in}(p)$$

— pour le produit B

$$\frac{d\,c_B(t)}{dt} = +k \cdot c_A(t) - \frac{Q}{V} \cdot c_B(t)$$
$$p \cdot C_B(p) = +k \cdot C_A(p) - \frac{Q}{V} \cdot C_B(p)$$

Q2. Déterminer les deux fonctions de transfert $H_A(p) = \frac{C_A(p)}{C_{in}(p)}$ et $H_B(p) = \frac{C_B(p)}{C_A(p)}$, les mettre sous forme canonique,

— pour le produit A

$$\frac{C_A(p)}{C_{in}(p)} = \frac{\frac{Q}{V}}{p + \frac{Q}{V} + k} = \frac{Q}{V \cdot p + Q + k \cdot V}$$
$$\frac{C_A(p)}{C_{in}(p)} = \frac{\frac{Q}{Q+k\cdot V}}{\frac{V}{Q+k\cdot V} \cdot p + 1}$$

— pour le produit B

$$\frac{C_B(p)}{C_A(p)} = \frac{+k}{p + \frac{Q}{V}} = \frac{\frac{k\cdot V}{Q}}{\frac{V}{Q} \cdot p + 1}$$

Q3. Préciser le gain et la constante de temps pour chacune des fonctions de transfert en fonction de Q, V et k.

— pour le produit A

$$\tau_A = \frac{V}{Q + k \cdot V} \quad \text{et} \quad K_A = \frac{Q}{Q + k \cdot V}$$

— pour le produit B

$$\tau_B = \frac{V}{Q} \quad \text{et} \quad K_B = \frac{k \cdot V}{Q}$$

Q4. Compléter le schéma bloc

$$C_{in}(p) \longrightarrow \boxed{\frac{\frac{Q}{Q+k\cdot V}}{\frac{V}{Q+k\cdot V}\cdot p + 1}} \xrightarrow{C_A p} \boxed{\frac{\frac{k\cdot V}{Q}}{\frac{V}{Q}\cdot p + 1}} \xrightarrow{C_B(p)}$$

Q5. En déduire $H(p) = \dfrac{C_B(p)}{C_{in}(p)}$.

$$\begin{aligned} H(p) &= H_A(p) \cdot H_B(p) \\ &= \frac{\frac{Q}{Q+k\cdot V}}{\frac{V}{Q+k\cdot V}\cdot p + 1} \cdot \frac{\frac{k\cdot V}{Q}}{\frac{V}{Q}\cdot p + 1} \\ &= \frac{\frac{k\cdot V}{Q+k\cdot V}}{\left(\frac{V}{Q+k\cdot V}\cdot p + 1\right)\cdot\left(\frac{V}{Q}\cdot p + 1\right)} \end{aligned}$$

Q6. Justifier cette forme.

On reconnaît que la réponse temporelle d'un premier ordre à un échelon (voir le cours)

Q7. Déterminer $s(\tau)$ et $s(3 \cdot \tau)$ et la tangente pour $t = 0$.

$$\begin{aligned} s(\tau) &\approx 0{,}63 \cdot K_1 \cdot E_0 \\ s(3 \cdot \tau) &\approx 0{,}95 \cdot K_1 \cdot E_0 \end{aligned}$$

Q8. À partir du relevé de la figure 0.1.2, justifier que l'on peut modéliser ce système comme un premier ordre, déterminer alors, le temps de réponse à 5% ($T_{5\%}$) et le gain K_2 et la constante de temps τ_2. En déduire la valeur de la vitesse spécifique k.

L'allure générale de la courbe, est celle de la réponse d'un système du premier ordre à une entrée en échelon.

La valeur finale est $c_A(t \to \infty) = 0{,}25$

Si la courbe de réponse correspond à celle d'un premier ordre, on doit avoir $s(\tau) \approx 0{,}63 \cdot K_1 \cdot E_0$ et $s(3 \cdot \tau) \approx 0{,}95 \cdot K_1 \cdot E_0$

Pour $0{,}63 \cdot c_A(t \to \infty) = 0{,}157$ on lit sur le tableau de que $t1 = \tau = 0{,}5\,\text{min}$.

Pour $0{,}95 \cdot c_A(t \to \infty) = 0{,}2375$ on lit sur le tableau $t_2 = 1{,}5\,\text{min} = 3 \cdot \tau$.

On peut tracer la fonction sur le relevé de points (figure 0.1.3). La réponse semble analogue à celle d'un premier ordre.

$$C_A(t) = 0{,}25 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{0{,}5}\right)\right) \mathcal{H}(t)$$

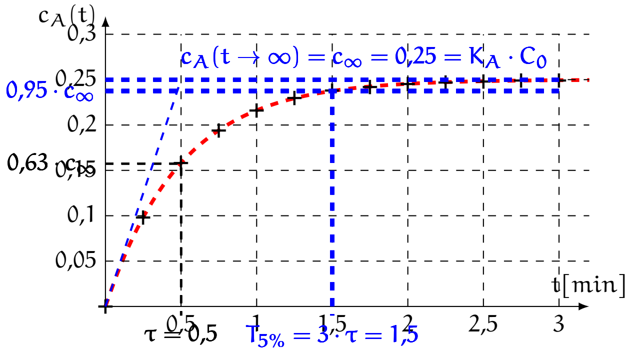


FIGURE 0.1.3 – relevé expérimental

On peut donc identifier avec la fonction de transfert $\dfrac{C_A(p)}{C_{in}(p)}$.

$$\begin{aligned} K_2 = 0{,}5 = K_A &= \frac{Q}{Q + k \cdot V} \\ \tau_2 = 0{,}5\,\text{min} = \tau_A &= \frac{V}{Q + k \cdot V} \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire

$$k = 1$$

Q9. Mettre $H(p)$ sous forme canonique. préciser le gain le coefficient d'amortissement et la pulsation propre.

Le dénominateur possède deux racines réelles (-1 et $--2$), on peut donc écrire :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} = \frac{0{,}5}{(1 + p) \cdot (1 + 0{,}5 \cdot p)}$$

Q10. Déterminer la transformée de Laplace de l'échelon de concentration $c_{in}(t) = C_0 \cdot \mathcal{H}(t)$. En déduire $C_B(p)$

$$c_{in}(t) = C_0 \cdot \mathcal{H}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} C_{in}(p) = \frac{C_0}{p}$$

$$C_B(p) = H(p) \cdot \frac{C_0}{p} = \frac{0{,}5}{(1 + p) \cdot (1 + 0{,}5 \cdot p)} \cdot \frac{C_0}{p}$$

Q11. Déterminer la valeur finale $\lim\limits_{t\to\infty}(c_B(t))$, la valeur initiale, et la tangente initiale.

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}(c_B(t)) &= \lim_{p\to 0}(p \cdot C_B(p)) \\ &= \lim_{p\to 0}\left(p \cdot \frac{0{,}5}{(1 + p) \cdot (1 + 0{,}5 \cdot p)} \cdot \frac{C_0}{p}\right) \\ &= 0{,}5 \cdot C_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}(c_B(t)) &= \lim_{p\to\infty}(p \cdot C_B(p)) \\ &= \lim_{p\to\infty}\left(p \cdot \frac{0{,}5}{(1 + p) \cdot (1 + 0{,}5 \cdot p)} \cdot \frac{C_0}{p}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}(\dot{c}_B(t)) &= \lim_{p\to\infty}(p \cdot p \cdot C_B(p)) \\ &= \lim_{p\to\infty}\left(p^2 \cdot \frac{0{,}5}{(1 + p) \cdot (1 + 0{,}5 \cdot p)} \cdot \frac{C_0}{p}\right) \\ &= 0 \quad \text{(tangente horizontale)} \end{aligned}$$

Q12. Montrer que $C_B(p)$ peut s'écrire sous la forme $C_B(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p}$, déterminer A, B, C.

$$C_B(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p} = \frac{1}{(p+1)\cdot(p+2)} \cdot \frac{C_0}{p}$$

$$C = \lim_{p\to 0} (p \cdot C_B(p)) = 0{,}5 \cdot C_0$$
$$B = \lim_{p\to -2} ((1+0{,}5\cdot p)\cdot C_B(p)) = 0{,}5 \cdot C_0$$
$$A = \lim_{p\to -1} ((1+p)\cdot C_B(p)) = -C_0$$

$$C_B(p) = \frac{-C_0}{p+1} + \frac{0{,}5\cdot C_0}{p+2} + \frac{0{,}5\cdot C_0}{p}$$

Q13. Déterminer $c_2(t)$, à partir du tableau des transformées.

$$C_B(t) = C_0 \cdot \left(0{,}5 - e^{-t} + 0{,}5 \cdot e^{-2\cdot t}\right)$$

Q14. Tracer $c_2(t)$, préciser le temps de réponse à 5%.