Annexe - Transformation de Laplace

Robert Papanicola

Lycée Charlemagne- Paris 4^{e}

21 septembre 2015

Sommaire

Transformation de Laplace

Définition

Soit f une fonction de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$ et supposée nulle pour $t < 0$, on appelle transformée de Laplace de f, la fonction F définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t) \mathrm{d}t$$

avec p une variable réelle ou complexe.
On note :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$$

avec $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$.
Remarque : : Il est d'usage de noter les transformées de Laplace par une lettre majuscule. En France, on utilise préférentiellement la variable p mais les pays anglo-saxons utilisent plutôt la variable s.

Transformation de Laplace

Définition

En automatique, on n'utilise que la transformée de Laplace restreinte qui ne s'applique qu'aux fonctions causales (c'est à dire aux fonctions $f(t)$ telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$).

Pour transformer une fonction quelconque, on la combine avec la fonction existence ou fonction de *Heaviside* notée $\mathcal{H}(t)$ et définie par :

$$\begin{cases} t < 0 : & e(t) = 0 \\ t \geq 0 : & e(t) = 1 \end{cases}$$

Ainsi on ne calcule pas la transformée de Laplace de $\cos(\omega \cdot t)$ mais de $\mathcal{H}(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

Transformation de Laplace

Propriétés

Unicité : à une fonction temporelle $f(t)$, il correspond une transformée de Laplace $F(p)$ unique et réciproquement

Additivité :

$$\mathcal{L}(f(t)+g(t)) = \mathcal{L}(f(t)) + \mathcal{L}(g(t)) = F(p) + G(p)$$

Linéarité :

$$\mathcal{L}(a \cdot f(t) + b \cdot g(t)) = a \cdot \mathcal{L}(f(t)) + b \cdot \mathcal{L}(g(t)) = a \cdot F(p) + b \cdot G(p)$$

Transformation de Laplace

Propriétés

Dérivation :

- dérivée première :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\right) = p \cdot F(p) - f(0)$$

- dérivée seconde :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2\,f(t)}{\mathrm{dt}^2}\right) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - \dot{f}(0)$$

Démonstration : on sait que [1] $\int u \cdot v' \,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \,\mathrm{d}x$ avec u et v deux fonctions dérivables de la variable x.

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t}\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\right) = \left[e^{-p\cdot t} \cdot f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -p \cdot e^{-p\cdot t} \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\right) = -f(0) + p \cdot \mathcal{L}(f(t))$$

Transformation de Laplace

Propriétés

Si le système est dans les *les conditions de Heaviside*, c'est à dire $f(0) = 0$, $\dot{f}(0) = 0$ et toutes les dérivées en 0 sont nulles, alors :

- dérivée première :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\, f(t)}{\mathrm{dt}}\right) = p \cdot F(p)$$

- dérivée seconde :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2\, f(t)}{\mathrm{dt}^2}\right) = p^2 \cdot F(p)$$

Dans les conditions de Heaviside, dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine symbolique (domaine de Laplace).

Transformation de Laplace

Propriétés

Intégration :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right) = \frac{F(p)}{p} + \frac{A_0}{p}$$

en posant : $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ et $g(0) = A_0$ Dans les conditions de Heaviside :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right) = \frac{F(p)}{p}$$

Dans les conditions de Heaviside, intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine symbolique.

Transformation de Laplace

Propriétés

Démonstration : On pose $g(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}t} = f(t)$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}t}\right) = -g(0) + \int_0^{+\infty} p \cdot e^{p \cdot t} \cdot g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = -g(0) + p \cdot \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right) \cdot e^{p \cdot t}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = -g(0) + p \cdot \mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right) = \frac{F(p)}{p} + \frac{A_0}{p}$$

Transformation de Laplace

Propriétés

Théorème de la valeur finale

Si la fonction $f(t)$ est une fonction convergente (elle possède une limite) alors :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\cdot F(p)$$

Démonstration : on sait que

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\right) = p\cdot F(p) - f(0)\int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t}\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{d}t \quad = p\cdot F(p) - f(0)$$

Si $p \to 0$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t}\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\Big]_0^{+\infty}$

On peut donc écrire :

$$\lim_{p\to 0} p\cdot (F(p) - f(0)) = \Big[f(t)\Big]_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0)$$

$$\lim_{p\to 0} p\cdot (F(p)) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

Transformation de Laplace

Propriétés

Théorème de la valeur initiale

Si la fonction $f(t)$ possède une limite alors :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to+\infty} p\cdot F(p)$$

Démonstration : on sait que

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\right) = p\cdot F(p) - f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t}\,\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{d}t$$

si $p \to +\infty$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t}\,\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{d}t \to 0$, on peut donc écrire :

$$\lim_{p\to+\infty} (p\cdot F(p) - f(0)) = 0$$

$$\lim_{p\to+\infty} (p\cdot F(p)) = f(0) = \lim_{t\to 0} f(t)$$

Transformation de Laplace

Propriétés

Théorème du retard :

$$\mathcal{L}(f(t-\tau) = e^{-\tau \cdot p} \cdot F(p)$$

Démonstration :

$$\mathcal{L}(f(t-\tau) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t-\tau)\mathrm{d}t \text{ (changement de variable } y = t-\tau)$$

$$\mathcal{L}(f(t-\tau) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot (y+\tau)} f(y)\mathrm{d}y$$

$$\mathcal{L}(f(t-\tau) = e^{-p \cdot \tau} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot y} f(y)\mathrm{d}y$$

Produit de convolution :

on note $f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u) \cdot g(u)\mathrm{d}u$ le produit de convolution alors :

Transformation de Laplace
calculs

$f(t) = A \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t) \mathrm{d}t$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} A \cdot \mathcal{H}(t) \mathrm{d}t$$

$$F(p) = \left[\frac{-A}{p} \cdot e^{-p \cdot t} \right]_0^{+\infty} = \frac{A}{p}$$

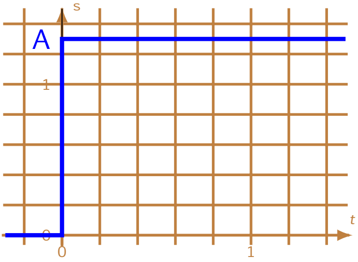

FIGURE: Échelon

Transformation de Laplace

calculs

Pour déterminer la transformée de ce signal, on le décompose en deux fonctions :

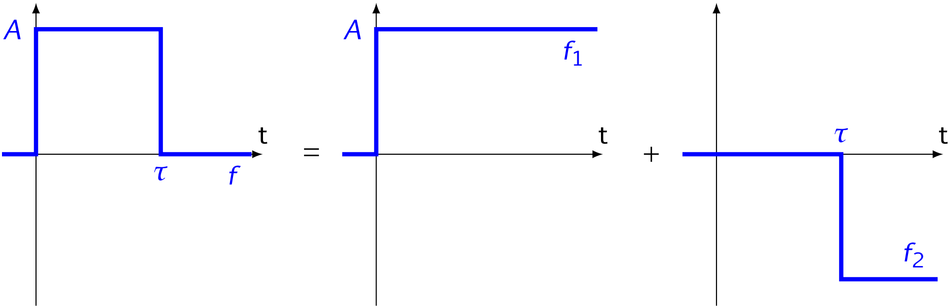

FIGURE: Créneau

Transformation de Laplace

calculs

$f_1(t)$ est une fonction échelon et $f_2(t)$ est une fonction échelon retardée d'amplitude opposée à celle de $f_1(t)$, on a donc $f_2(t) = -f_1(t-\tau)$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$
$$f(t) = f_1(t) + -f_1(t-\tau)$$

On peut donc déduire, à partir de la transformée de Laplace d'un échelon et du théorème du retard la transformée d'un créneau :

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(f_1(t) - f_1(t-\tau)) = \mathcal{L}(f_1(t)) - \mathcal{L}(f_1(t-\tau))$$
$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{A}{p} - \frac{A \cdot e^{-\tau \cdot p}}{p}$$
$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{A}{p}(1 - e^{-\tau \cdot p})$$

Transformation de Laplace

calculs

Pour réaliser ce calcul, on modélise la fonction de Dirac par le graphe ci-contre définie par

$$\begin{cases} 0 < t < \varepsilon & ,\delta(t) = \frac{1}{\varepsilon} \\ \text{sinon,} & \delta(t) = 0 \end{cases}$$

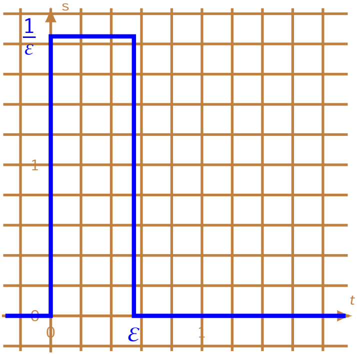

FIGURE: Implusion de Dirac

Transformation de Laplace

calculs

L'impulsion de Dirac est obtenue en faisant tendre ε vers 0.

On peut reprendre le calcul précédent en posant $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$ et en faisant tendre ε vers 0.

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot p}(1 - e^{-\varepsilon \cdot p})$$

le développement de l'exponentielle au premier ordre s'écrit
$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + o(x)$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot p}(1 - e^{-\varepsilon \cdot p})$$
$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot p}(1 - (1 + \varepsilon \cdot p))$$
$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

Transformation de Laplace
calculs

$f(t) = A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t) \mathrm{d}t$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t) \mathrm{d}t$$

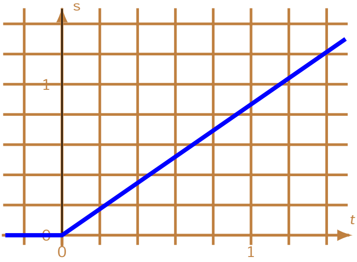

FIGURE: Échelon

Transformation de Laplace

calculs

Pour résoudre, il faut utiliser l'intégration par parties :

$\int u \cdot v' \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x$

avec ici $\begin{cases} \mathcal{H}(t) = t, & \dot{v}(t) = e^{-p \cdot t} \\ \dot{u}(t) = 1, & v(t) = -\dfrac{e^{-p \cdot t}}{p} \end{cases}$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t) \mathrm{d}t$$

$$F(p) = A \cdot \left[t \cdot \frac{-e^{-p \cdot t}}{p} \right]_0^{+\infty} - A \cdot \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-p \cdot t}}{p} \mathrm{d}t$$

$$F(p) = 0 + A \cdot \left[\frac{-e^{-p \cdot t}}{p^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{A}{p^2}$$

Résolution d'équations différentielle

Principe

Soit l'équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants

$$b_2 \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2} + b_1 \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + b_0 \cdot s(t) = e(t)$$

avec les conditions initiales suivantes : $s(0) = a$ et $\dot{s}(0) = b$.
On pose :

$$E(p) = \mathrm{L}\left(e(t)\right) \text{ et } S(p) = \mathrm{L}\left(s(t)\right)$$

on a aussi :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}}\right) = p \cdot S(p) - s(0) \text{ et } \mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2}\right) = p^2 \cdot S(p) - p \cdot s(0) - \dot{s}(0)$$

Résolution d'équations différentielle

Principe

En substituant :

$$b_2\left(p^2 \cdot S(p) - p \cdot s(0) - \dot{s}(0)\right) + b_1\left(p \cdot S(p) - s(0)\right) + b_0 \cdot S(p) = E(p)$$
$$\left(b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0\right) \cdot S(p) - b_2 \cdot p \cdot s(0) - b_2 \cdot \dot{s}(0) - b_1 \cdot s(0) = E(p)$$

$$S(p) = \frac{E(p) + b_2 \cdot p \cdot s(0) + b_2 \cdot \dot{s}(0) + b_1 \cdot s(0)}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}$$

La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.

Résolution d'équations différentielle

Principe

Dans les conditions de Heaviside, on obtient

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} E(p)$$

La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.

Transformées inverses

Soit $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$. On appelle transformée de Laplace inverse, ou original, de $F(p)$ la fonction $f(x)$. On note :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$$

Détermination analytique : Les méthodes analytiques de détermination de la transformée inverse ne sont pas au programme.

Détermination par l'utilisation de tables : La transformation de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une fonction $F(p)$ donnée.

Lorsque la fonction $F(p)$ est sous la forme d'une fraction rationnelle en p, la méthode à utiliser est la décomposition en éléments simples. Pour déterminer la fonction temporelle revient alors à rechercher dans la table (page **??**) la transformée inverse de chaque fraction élémentaire.

La transformée inverse de $F(p)$ est la somme des fonctions temporelles élémentaires.

Transformées inverses

Tout polynôme possède et / ou :

- des racines nulles ;
- des racines réelles, simples et / ou multiples ;
- des racines complexes, simple et / ou multiples.

Ainsi un polynôme du troisième ordre $D(p) = a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p^1 + 1$, en fonction des racines pourra se mettre sous la forme suivante :

- 3 racines réelles distinctes :

$$D(p) = (1 + \lambda_1 \cdot p) \cdot (1 + \lambda_2 \cdot p) \cdot (1 + \lambda_3 \cdot p)$$

- 1 racine réelle double et un racine réelle distincte :

$$D(p) = (1 + \lambda_1 \cdot p)^2 \cdot (1 + \lambda_3 \cdot p)$$

- 1 racine réelle et deux racines complexes conjuguées :

$$D(p) = (1 + \lambda_1 \cdot p) \cdot (1 + \lambda_2 \cdot p + \lambda_3 \cdot p^2)$$

Transformées inverses

Décomposition

Racines réelles simples : Si la fonction de transfert ne présente que des pôles réels simples, la décomposition s'écrit comme la somme des fractions simples de chaque pôle.

Ainsi

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2 + 15 \cdot p + 50}$$

possède deux racines simples :

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+5) \cdot (p+10)}$$

sa décomposition en fractions simples est donc de la forme suivante :

$$F(p) = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}$$

Transformées inverses

Décomposition

Racines réelles multiples : Dans le cas de racines réelles multiples, la décomposition en fractions simples de la racine multiple est la somme des fractions simples des puissances décroissantes.

Pour

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+5)^2 \cdot (p+10)}$$

la décomposition en fractions simples s′écrit :

$$F(p) = \frac{A}{(p+5)^2} + \frac{B}{(p+5)} + \frac{C}{(p+10)}$$

Transformées inverses

Décomposition

Racine complexe simple : Dans le cas d'une racine complexe, il est possible de raisonner comme dans le cas des racines réelles mais cela fait apparaitre des coefficients complexes. Il est préférable de ne travailler qu'avec des coefficients réels. Pour cela, on réalisera la décomposition en gardant les polynômes du second ordre au dénominateur.

Ainsi

$$F(p) = \frac{3}{p \cdot (p^2 + 2 \cdot p + 5)}$$

se décompose sous la forme :

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B \cdot p + C}{(p^2 + 2 \cdot p + 5)}$$

Transformées inverses

Décomposition

Pour déterminer les coefficients, on peut soit

- résoudre par identification,
- déterminer les coefficients en utilisation la valeur de la fonction en des points particuliers,
- déterminer les coefficients après les avoir isolés.

Transformées inverses

Décomposition

Par identification :

$$\frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}$$

$$\frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} = \frac{A(p+10)+B\cdot(p+5)}{(p+5)\cdot(p+10)}$$

$$\frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} = \frac{p\cdot(A+B)+10\cdot A+5\cdot B}{(p+5)\cdot(p+10)}$$

il reste à résoudre le système

$$\begin{cases} A + \quad B = 1 \\ 10\cdot A + 5\cdot B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{5} \\ B = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Transformées inverses

Décomposition

En isolant les coefficients : Pour cela, on multiplie la fonction de transfert des deux cotés de l′égalité par le polynôme de la racine concernée. On calcule ensuite, pour le pôle concernée la valeur de cette égalité.

Ainsi pour

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}$$

Pour déterminer A, on multiplie les deux termes de l′égalité par $(p+5)$, ce qui donne

$$\frac{p+2}{(p+10)} = A + B\cdot\frac{p+5}{p+10}$$

pour la valeur : $p = -5$, cette égalité donne directement A

$$\frac{-3}{5} = A$$

Cette méthode très pratique fonctionne bien pour déterminer les coefficients

Tableau des transformées

Transformées usuelles

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau\cdot p}$
$a\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p}$
$a\cdot\mathcal{H}(t-\tau)$	$\dfrac{a}{p}\cdot e^{-\tau\cdot p}$

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$a\cdot t\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p^2}$
$t^n\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-a\cdot t}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\dfrac{1-e^{-a\cdot t}}{a}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p\cdot(p+a)}$

Tableau des transformées

Transformées usuelles

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p(1+\tau.p)}$
$e^{-a.t}\cdot t^n\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\sin(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$e^{-a\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{\omega^2+(p+a)^2}$
$e^{-a\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{\omega^2+(p+a)^2}$
$\dfrac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\dfrac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$

Tableau des transformées

1er et de 2nd ordre

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\frac{1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{1+\tau\cdot p}$
$\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)}$
$\left(t-T+T\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p^2\cdot(1+\tau\cdot p)}$
$t\cdot\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{(1+\tau\cdot p)^2}$
$\left(1-(t+\tau)\cdot\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)^2}$

Tableau des transformées

1er et de 2nd ordre

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\dfrac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$
$\left(1+\dfrac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p.(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$
$\dfrac{1}{\omega_0\cdot\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\cdot\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{{\omega_0}^2+2\cdot z\cdot\omega_0\cdot p+p^2}$ avec $z<1$
$\dfrac{1}{\omega_0^2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\cdot\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\cdot t+\varphi\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$ et $\varphi=\arccos z$	$\dfrac{1}{p\left({\omega_0}^2+2\cdot z\cdot\omega_0\cdot p+p^2\right)}$ avec $z<1$