Chapitre 3 Modélisation des systèmes linéaires et asservis

3.1 Systèmes linéaires continus invariants

Définition : Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants [1]. Les systèmes linéaires possèdent principalement deux propriétés :

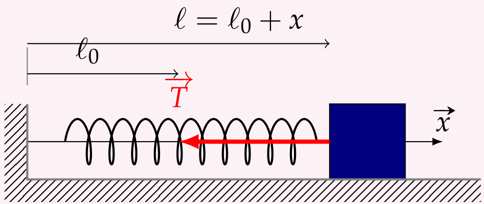
— la proportionnalité ;

— l'additivité.

1. Les équations différentielles seront abordées dans la suite du cours et approfondies en mathématiques

3.1.1 Exemples

Exemple : Oscillateur harmonique horizontal



Hypothèse : Nous considérerons dans un premier temps que le contact masse / support est parfait (pas de frottements)

Pour établir l'équation qui décrit le mouvement, nous allons appliquer la deuxième loi de Newton (Principe Fondamental de la Dynamique en Translation) qui s'énonce : Dans un référentiel galiléen, la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le solide :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}_g}}\right]_{\mathcal{R}_g} = M \cdot \overrightarrow{a_{S/\mathcal{R}_g}}$$

avec $\overrightarrow{a_{S/\mathcal{R}_g}}$ l'accélération du solide par rapport au référentiel galiléen.

Inventaire des actions mécaniques extérieures :

— Le poids : $\overrightarrow{P} = -M \cdot g \cdot \overrightarrow{z}$;

— la réaction du support $\overrightarrow{R} = R \cdot \overrightarrow{z}$;

— l'action du ressort $\overrightarrow{T_x} = T_x \cdot \overrightarrow{x}$;

La deuxième loi de de Newton en projection sur l'axe $(O, \overrightarrow{x})$ s'écrit :

$$T_x = m \cdot \ddot{x}(t) \quad \text{avec} \quad T_x = -K \cdot (\ell - \ell_0)$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + K \cdot x(t) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Cette équation est une équation différentielle incomplète du second ordre, il manque le terme en $\dot{x}(t)$. On obtient la solution de cette équation différentielle en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, montrons qu'elle est de la forme :

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi)$$

A l'amplitude et ϕ la phase à l'origine.

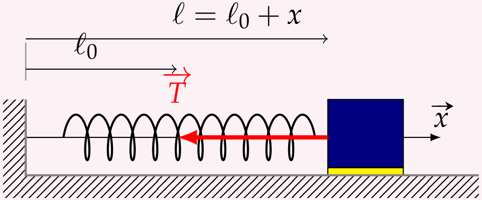
Un exemple légèrement plus complexe.

Exemple : Oscillateur harmonique horizontal avec frottements fluides

L'hypothèse « sans frottements » est peu réaliste. Afin de les limiter, on intercale entre la masse et le support, un lubrifiant (huile).

L'effet de l'huile n'est pas négligeable, les frottements ne sont pas nuls et dépendent de la vitesse de déplacement de la masse par rapport au sol et s'oppose à celle-ci :

$$\overrightarrow{F_h} = -\mu \cdot v(t) \cdot \overrightarrow{x}$$



L'inventaire des actions mécaniques extérieures devient :

- Le poids : $\overrightarrow{P} = -M \cdot g \cdot \overrightarrow{z}$;
- la réaction du support $\overrightarrow{R} = R \cdot \overrightarrow{z}$;
- l'action du ressort $\overrightarrow{T_x} = T_x \cdot \overrightarrow{x}$;
- les frottements$\overrightarrow{F_h} = -\mu \cdot v(t) \cdot \overrightarrow{x} = -\mu \cdot \dot{x}(t) \cdot \overrightarrow{x}$;

La deuxième loi de de Newton en projection sur l'axe $(O, \vec{x})$ s'écrit :

$$F_h + T_x = m \cdot \ddot{x}(t) \quad \text{avec} \quad T_x = -K \cdot x(t)$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \ddot{x}(t) + \mu \cdot \dot{x}(t) + K \cdot x(t) = 0$$
$$m \cdot \frac{\mathrm{d}^2\, x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \mu \cdot \frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}t} + K \cdot x(t) = 0$$

On reconnaît encore une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Nous montrerons plus loin que la solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = A_1 \cdot \exp(B \cdot t) + A_2 \cdot \exp(B \cdot t)$$

avec A_i un réel et B un complexe.

En définitive, étudier un système linéaire revient à étudier la solution de l'équation différentielle à coefficients constants.

3.2 Propriétés des SLCI

3.2.1 Principe de proportionnalité

Définition : Si $y(t)$ est la réponse à l'entrée $x(t)$ alors $\lambda \cdot y(t)$ est la réponse à $\lambda \cdot x(t)$.

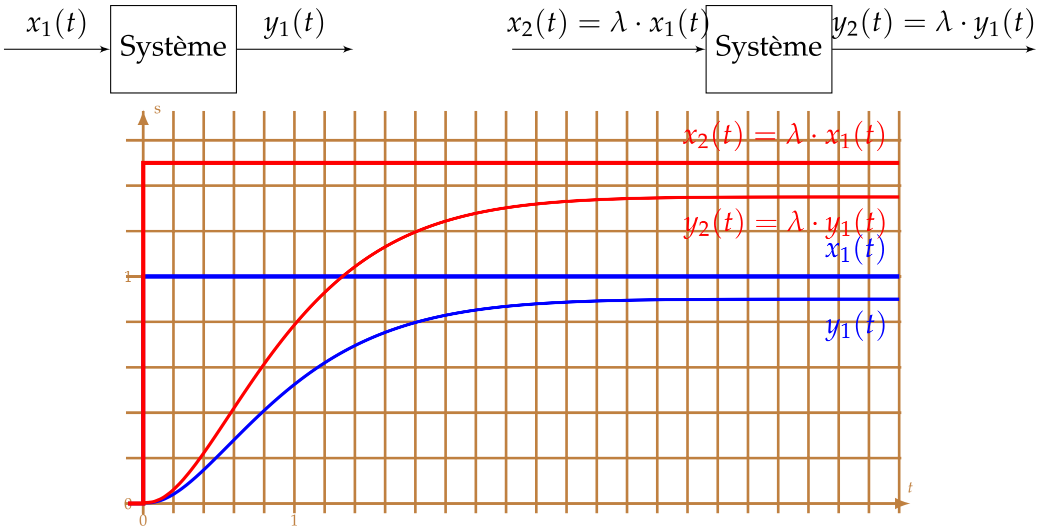
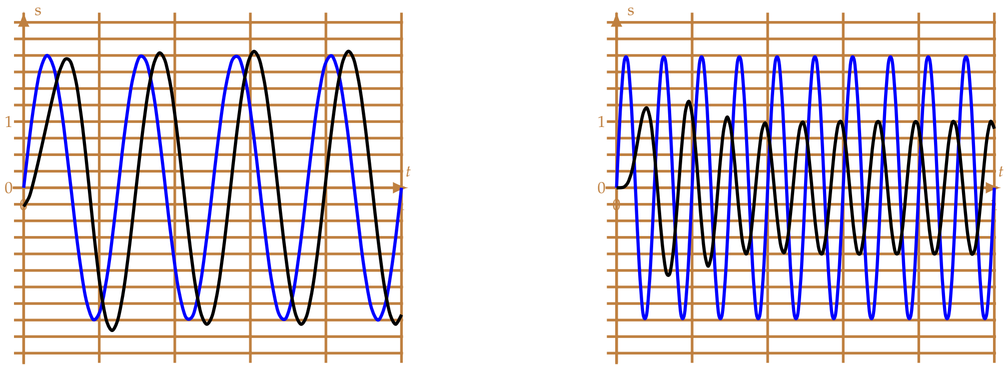


FIGURE 3.1 – Proportionalité

Dans un système linéaire, l'effet est proportionnel à la cause (figure 3.1). L'effet de proportionnalité n'est effectif que lorsque le système a atteint sa position d'équilibre ou que le régime permanent s'est établi.

La caractéristique Entrée / Sortie d'un système linéaire est une droite dont la pente est appelée gain du système.



(a) $f = 4\,\text{Hz}$ (b) $f = 10\,\text{Hz}$

FIGURE 3.2 – Comportement en régime permanent

La réponse, en régime définitif (en régime permanent) d'un système linéaire à une entrée donnée est un signal de même nature que l'entrée. Sur la figure 3.2 on constate que la réponse en régime établi à une entrée sinusoïdale de fréquence f est aussi une sinusoïde de même fréquence mais déphasée et avec une amplitude différente.

3.2.2 Additivité - principe de superposition

Définition : Si $y_1(t)$ est la réponse à l'entrée $x_1(t)$ et $y_2(t)$ est la réponse à l'entrée $x_2(t)$ alors, $y_1(t) + y_2(t)$ est la réponse à l'entrée $x_1(t) + x_2(t)$(figure 3.3)

Les principes de proportionnalité et de superposition vont nous permettre, connaissant la réponse d'un système à des sollicitations simples de déterminer par additivité et proportionnalité la réponse à des sollicitations plus complexes.

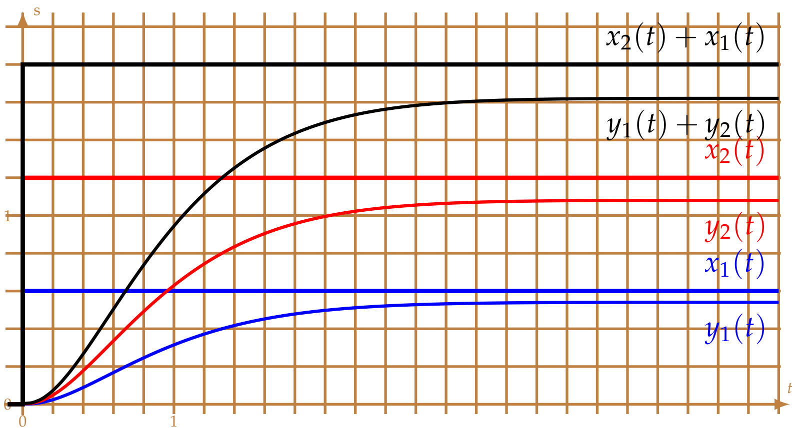


Figure 3.3 – Principe de superposition

3.2.3 Systèmes continus

Un système est dit continu lorsque les grandeurs physiques qui le caractérisent, évoluent de manière continue en fonction du temps.

On oppose les systèmes continus aux systèmes discrets et aux systèmes numériques pour lesquels l'évolution d'un état à un autre se fait par « saut » d'une valeur à la suivante.

3.2.4 Systèmes invariants

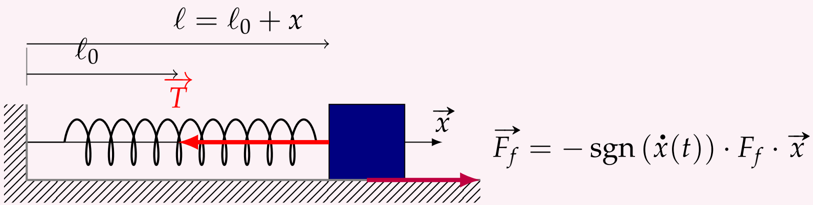
On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques du système ne se modifient pas dans le temps.

Remarque : Les systèmes réels ne sont ni linéaires, ni continus, ni invariants. Il est en général souvent possible de modéliser correctement le système afin que celui ci puisse être considéré comme linéaire, continu et invariant dans la zone d'étude.

3.3 Principales non-linéarités

Les systèmes physiques présente en général des non linéarités, ainsi si nous reprenons le premier exemple de l'oscillateur harmonique en ajoutant un frottement solide (frottement sec) qui s'oppose avec un effort constant au déplacement, le système n'est plus linéaire.

Exemple : Oscillateur harmonique horizontal avec frottement sec

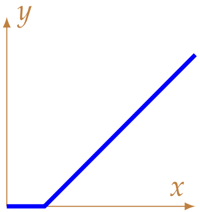


La deuxième loi de de Newton en projection sur l'axe $(O, \overrightarrow{x})$ s'écrit :

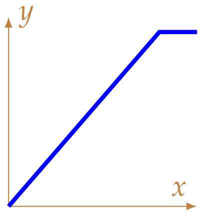
$$K \cdot x(t) - \operatorname{sgn}\left(\dot{x}(t)\right) \cdot F_f = m \cdot \ddot{x}(t)$$
$$m \cdot \ddot{x}(t) + \operatorname{sgn}\left(\dot{x}(t)\right) \cdot F_f + K \cdot x(t) = 0$$

Cette équation n'est plus une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant. Elle est non linéaire.

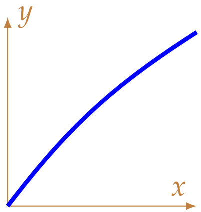
Malgré tout, dans ce cas là, il est encore possible de résoudre cette équation en l'étudiant par morceau suivant le signe de la vitesse $(\dot{x}(t))$.



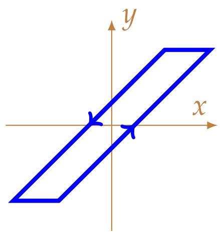
(a) seuil



(b) saturation



(c) courbure



(d) hystérésis

FIGURE 3.4 – Non-linéarités

Seuil : Un système présente un seuil si la sortie n'évolue que lorsque l'entrée dépasse une valeur minimale (seuil). Les seuils ont souvent pour origine des frottements secs.

Saturation Un système présente une saturation lorsque la sortie n'évolue plus au-delà d'une valeur limite.

Ces saturations sont dues soit aux limites mécaniques du système (butées) soit aux limites des interfaces de puissance (saturation des amplificateurs opérationnels).

Courbure : La quasi totalité des systèmes présente des courbures plus ou moins prononcées.

Dans la plupart des cas le système est approché par une droite passant par l'origine, mais il est aussi possible de linéariser autour d'un point de fonctionnement.

Hystérésis : Un système présente une réponse avec une hystérésis lorsque le comportement est différent suivant le sens d'évolution de la variable d'entrée.

3.4 Étude des systèmes linéaires

L'étude et la caractérisation des systèmes linéaires ne passent pas obligatoirement par la résolution de l'équation différentielle surtout qu'il n'est pas toujours possible de résoudre celle-ci.

Nous allons voir dans un premier temps les principes de la résolution des équations différentielles avec les outils mathématiques classiques puis en utilisant la **transformation de Laplace** qui permet de travailler dans un espace dans lequel les équations différentielles sont représentées par des polynômes.

3.5 Description par les équations différentielles

Un système dynamique linéaire peut être décrit par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.

L'équation générale d'un système linéaire est de la forme :

$$\begin{aligned} b_m \frac{\mathrm{d}^m y(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 \cdot y(t) = a_n \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} \\ + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 \cdot x(t) \end{aligned}$$

on note :

$$\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{y}(t) \qquad \text{dérivée } 1^{\text{re}} \text{ de } y(t) \text{ par rapport au temps}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,y(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y}(t) \qquad \text{dérivée } 2^{\text{nd}} \text{ de } y(t) \text{ par rapport au temps}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n\,y(t)}{\mathrm{d}t^n} \qquad \text{dérivée } \mathrm{n}^{\text{me}} \text{ de } y(t) \text{ par rapport au temps}$$

Pour les systèmes réels, $m \geq n$ (principe de causalité [2])

À partir de cette représentation il est possible de déterminer l'évolution temporelle de la sortie en résolvant l'équation différentielle.

3.5.1 Principe de résolution

Nous n'allons pas ici faire un cours de math, juste montrer les principes de la résolution dans des exemples simples.

On considère deux formes d'équations différentielles à coefficients constants, les équations sans second membre, et celle avec second membre.

2. La cause précède toujours l'effet. Nous verrons plus loin dans le cours

équation sans second membre :

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2} + b \cdot \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + c \cdot s(t) = 0$$

équation avec second membre :

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2} + b \cdot \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + c \cdot s(t) = e(t)$$

Résoudre une équation avec second membre commence par résoudre une équation sans second membre puis il faut rechercher une solution particulière égale au second membre.

a) Équation différentielle du premier ordre sans second membre

Pour une équation différentielle du 1er ordre,

$$\tau \cdot \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + s(t) = 0$$

la réponse est de la forme :

$$s(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec A une constante déterminée en fonction des conditions initiales.

Activité 1 - Équation différentielle du premier ordre

Corrigé page **??**

Q1. Vérifier que $s(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ est solution de $\tau \cdot \dfrac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + s(t) = 0$.

b) Équation du second ordre sans second membre

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2\, s(t)}{\mathrm{dt}^2} + b \cdot \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + c \cdot s(t) = 0$$

Montrons qu'une solution est de la forme

$$s(t) = A \cdot e^{r \cdot t} \quad \text{avec } A \text{ réel et } r \text{ réel ou complexe}$$

existe.

Remplaçons $s(t)$ dans l'équation différentielle, avec $\dfrac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} = A \cdot r \cdot e^{r \cdot t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\, s(t)}{\mathrm{dt}^2} = A \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot t}$.

$$\begin{aligned} a \cdot A \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot t} + b \cdot A \cdot r \cdot e^{r \cdot t} + c \cdot A \cdot e^{r \cdot t} &= 0 \\ A \cdot \left(a \cdot r^2 + b \cdot r + c\right) \cdot e^{r \cdot t} &= 0 \end{aligned}$$

Cette égalité n'est nulle que si r est solution de l'équation du second degré :

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$$

On appelle cette équation, l'équation caractéristique de l'équation différentielle.

Si

— $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ alors il existe deux racines réelles : $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$ et $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$. La solution est alors de la forme :

$$s(t) = A_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

— $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ alors il existe deux racines complexes conjuguées : $r_1 = \dfrac{-b + j \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}$ et $r_2 = \dfrac{-b - j \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}$. La solution est alors de la forme :

$$s(t) = A_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

Remarque : l'exponentielle complexe : $e^{j \cdot \theta} = \cos \theta + j \cdot \sin \theta$.

Comme les solutions sont réelles, il est d'usage d'écrire :

$$s(t) = e^{-\dfrac{b}{2\cdot a}\cdot t} \cdot \left(A_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\cdot a}\cdot t\right) + A_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\cdot a}\cdot t\right) \right)$$

$$s(t) = A \cdot e^{-\dfrac{b}{2\cdot a}\cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\cdot a}\cdot t + \phi \right)$$

— $\Delta = 0$, alors l'équation à une racine réelle double $r_1 = \dfrac{-b}{2\cdot a}$. On montre que la solution de l'équation différentielle est alors :

$$s(t) = (A_1 \cdot t + A_2) \cdot e^{r_1 \cdot t}$$

On le voit, on pourra étudier le comportement d'un système linéaire à partir de la réponse temporelle. Mais cette méthode est peu utilisé en automatique, on préfère utiliser une autre méthode, la transformation de Laplace.

Exemple : Enceinte chauffée

Le système représenté figure 3.11 est chargé de maintenir la température d'une enceinte Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne v, permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur. On note :

- $\alpha(t)$: l'angle d'ouverture de la vanne.
- $q(t)$: débit dans l'échangeur.
- θ_1 : température en sortie de l'échangeur.
- θ : température dans l'enceinte

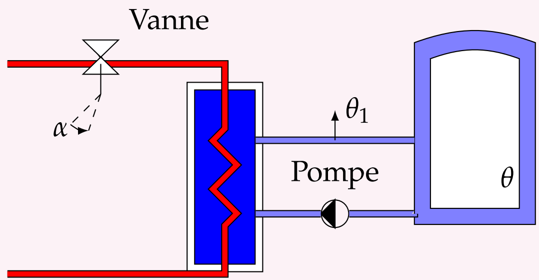


FIGURE 3.5 – Échangeur thermique

La loi de fonctionnement de la vanne est caractérisée par l'équation

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$$

donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture (le débit est proportionnel à l'ouverture de la vanne).

Les deux autres équations caractérisent le transfert de chaleur :

- dans l'échangeur : $\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \dfrac{\mathrm{d}\,\theta_1(t)}{\mathrm{d}t} = k_1 \cdot q(t)$;

— et dans l'enceinte : $\theta(t) + \tau_2 \cdot \dfrac{\mathrm{d}\,\theta(t)}{\mathrm{dt}} = k_2 \cdot \theta_1(t)$.

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles.

L'entrée du système est l'angle d'ouverture de la vanne $\alpha(t)$ et la température de l'enceinte θ, la sortie.

Q1. Écrire l'équation différentielle donnant $\theta(t)$ en fonction de $\alpha(t)$. Quel est l'ordre de la fonction de transfert ?

Q2. De quelle forme est la solution si $\alpha(t) = \alpha_0$ une constante à l'instant $t = 0$. Résoudre l'équation différentielle.

Exercice 2 - Moteur à courant continu - équation différentielle

Corrigé page **??**

Le comportement simplifié d'un moteur à courant continu peut être décrit par les équations suivantes :

$$u(t) = R \cdot i(t) + e(t)$$

$u(t)$: la tension d'alimentation, $i(t)$: le courant et $e(t)$ la force contre électromotrice.

$$J \cdot \frac{\mathrm{d}\,\omega(t)}{\mathrm{dt}} = C_m(t)$$

$\omega(t)$: la vitesse de rotation du moteur, $C_m(t)$: le couple moteur.

$$\begin{aligned} C_m(t) &= K_t \cdot i(t) \\ e(t) &= K_e \cdot \omega(t) \end{aligned}$$

Q1. Donner l'équation différentielle donnant la vitesse de rotation $\omega(t)$ en fonction de la tension d'alimentation $u(t)$.

3.6 Description par la transformation de Laplace

L'utilisation de la transformée de Laplace pour la résolution des équations différentielles, a été développée par Heaviside. Nous allons, en préalable à cette partie nous intéresser à la transformation de Laplace

3.6.1 Transformation de Laplace

a) Définition

Soit f une fonction de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$ et supposée nulle pour $t < 0$, on appelle transformée de Laplace de f, la fonction F définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t) \mathrm{d}t$$

avec p une variable réelle ou complexe.

On note :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$$

avec $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$.

Remarque : : En France, on utilise préférentiellement la variable p mais les pays anglo-saxons utilisent plutôt la variable s. Il est d'usage de noter les transformées de Laplace par une lettre majuscule.

En automatique, on n'utilise que la transformée de Laplace restreinte qui ne s'applique qu'aux fonctions causales (c'est à dire aux fonctions $f(t)$ telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$).

Pour transformer une fonction quelconque en fonction causale, on la combine avec la fonction existence ou fonction de *Heaviside* notée $\mathcal{H}(t)$ et définie par : $\begin{cases} t < 0 : & \mathcal{H}(t) = 0 \\ t \geq 0 : & \mathcal{H}(t) = 1 \end{cases}$

Ainsi on ne calcule pas la transformée de Laplace de $\cos(\omega \cdot t)$ mais de $\mathcal{H}(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

Conditions d'éxistence Il sort du cadre de ce cours de préciser les conditions d'existence de la transformée de Laplace.

On pourra admettre que la transformée existe si

— f est continue et bornée sur $[0, +\infty[$, alors la transformée de Laplace F existe pour tout $p > 0$. En effet, dans ce cas :

$$|f(t) \cdot e^{-pt}| \leq M \cdot e^{-pt}$$

et l'intégrale de e_{-pt} est convergente.

b) Propriétés

Les trois premières propriétés sont évidentes et déduites des propriétés de l'exponentielle et de l'intégrale.

Unicité : à une fonction temporelle $f(t)$, il correspond une transformée de Laplace $F(p)$ unique et réciproquement

Additivité :

$$\mathcal{L}(f(t) + g(t)) = \mathcal{L}(f(t)) + \mathcal{L}(g(t)) = F(p) + G(p)$$

Linéarité :

$$\mathcal{L}\left(a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\right)=a\cdot\mathcal{L}\left(f(t)\right)+b\cdot\mathcal{L}\left(g(t)\right)=a\cdot F(p)+b\cdot G(p)$$

Les suivantes sont celles qui justifient l'utilisation des transformées de Laplace dans l'étude des systèmes linéaires.

Dérivation :

— dérivée première :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\right)=p\cdot F(p)-f(0)$$

— dérivée seconde :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2\,f(t)}{\mathrm{dt}^2}\right)=p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-\dot{f}(0)$$

Si le système est dans les *les conditions de Heaviside*, c'est à dire $f(0)=0$, $\dot{f}(0^+)=0$ et toutes les dérivées en 0 sont nulles, alors :

— dérivée première :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\right)=p\cdot F(p)$$

— dérivée seconde :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2\,f(t)}{\mathrm{dt}^2}\right)=p^2\cdot F(p)$$

Dans les conditions de Heaviside, dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine symbolique (domaine de Laplace).

Intégration :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right) = \frac{F(p)}{p} + \frac{A_0}{p}$$

en posant : $g(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ et $g(0^+) = A_0$
Dans les conditions de Heaviside ($g(0^+) = 0$) cette relation devient :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right) = \frac{F(p)}{p}$$

Dans les conditions de Heaviside, intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine symbolique.

Théorème de la valeur finale

Si la fonction $f(t)$ est une fonction convergente (elle possède une limite) alors :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot F(p)$$

Théorème de la valeur initiale

Si la fonction $f(t)$ possède une limite en 0, alors :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p \cdot F(p)$$

Théorème du retard :

$$\mathcal{L}\left(f(t-\tau)\right) = e^{-\tau \cdot p} \cdot F(p)$$

c) Quelques transformées

Échelon $f(t) = A \cdot \mathcal{H}(t)$: A une constante et $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t) \mathrm{d}t$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} A \cdot \mathcal{H}(t) \mathrm{d}t$$

$$F(p) = \left[\frac{-A}{p} \cdot e^{-p \cdot t} \right]_0^{+\infty} = \frac{A}{p}$$

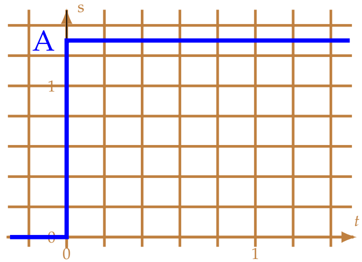


Figure 3.6 – Échelon d'amplitude A

Créneau Pour déterminer la transformée de ce signal, on le décompose en deux fonctions :

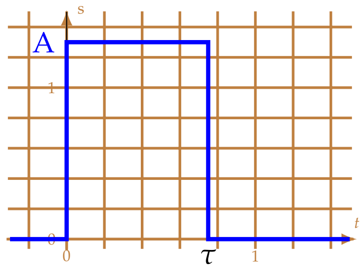


FIGURE 3.7 – Créneau

$f_1(t)$ est une fonction échelon et $f_2(t)$ est une fonction échelon retardée d'amplitude opposée à celle de $f_1(t)$, on a donc $f_2(t) = -f_1(t-\tau)$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$
$$f(t) = f_1(t) + -f_1(t-\tau)$$

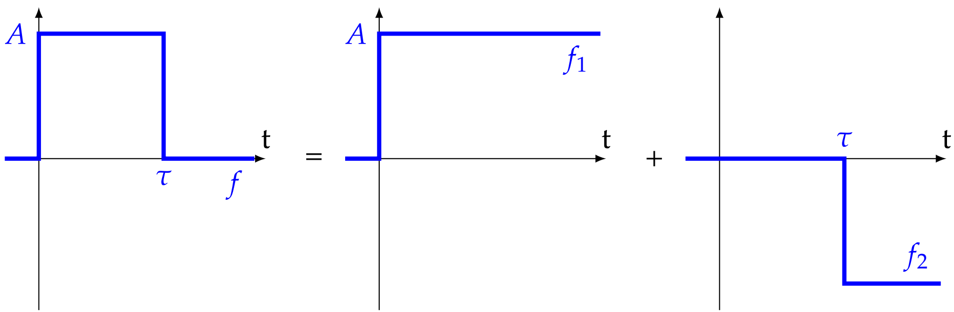


FIGURE 3.8 – Créneau

On peut donc déduire, à partir de la transformée de Laplace d'un échelon et du théorème du retard la transformée d'un créneau :

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \mathcal{L}\left(f_1(t) - f_1(t-\tau)\right) = \mathcal{L}\left(f_1(t)\right) - \mathcal{L}\left(f_1(t-\tau)\right)$$
$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{A}{p} - \frac{A \cdot e^{-\tau \cdot p}}{p} = \frac{A}{p}\left(1 - e^{-\tau \cdot p}\right)$$

Impulsion de Dirac Pour réaliser ce calcul, on modélise la fonction de Dirac par le graphe ci-contre définie par : $\begin{cases} 0 < t < \varepsilon & ,\delta(t) = \frac{1}{\varepsilon} \\ \text{sinon,} & \delta(t) = 0 \end{cases}$

L'impulsion de Dirac est obtenue en faisant tendre ε vers 0.

On peut reprendre le calcul précédent en posant $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$ et en faisant tendre ε vers 0 :
$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{\varepsilon \cdot p}\left(1 - e^{-\varepsilon \cdot p}\right)$

À partir du developpement au premier ordre de

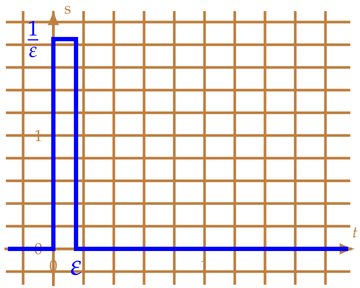


FIGURE 3.9 – Implusion de Dirac

l'exponentielle : $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + o(x)$

$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot p}\left(1 - e^{-\varepsilon \cdot p}\right)$$
$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot p}\left(1 - (1 + \varepsilon \cdot p)\right) = 1$$

Rampe $f(t) = A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t) \mathrm{d}t$$
$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t) \mathrm{d}t$$

Pour résoudre, il faut utiliser l'intégration par parties [3] :
$\int u \cdot v' \, \mathrm{d}t = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}t$

avec ici $\begin{cases} u(t) = t, & \dot{v}(t) = e^{-p \cdot t} \\ \dot{u}(t) = 1, & v(t) = -\dfrac{e^{-p \cdot t}}{p} \end{cases}$

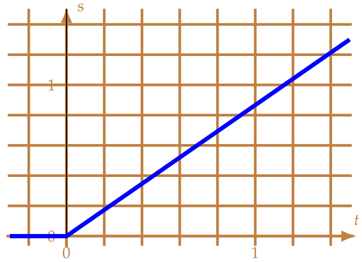


FIGURE 3.10 – Échelon

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t) \mathrm{d}t$$
$$F(p) = A \cdot \left[t \cdot \frac{-e^{-p \cdot t}}{p} \right]_0^{+\infty} - A \cdot \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-p \cdot t}}{p} \mathrm{d}t$$
$$F(p) = 0 + A \cdot \left[\frac{-e^{-p \cdot t}}{p^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{A}{p^2}$$

3. l'intégration par parties sera vue en math

Tableau des transformées Les tableaux ci dessous présentent les transfomées des principales fonctions. Il est utilisé aussi bien pour déterminer la transformée que la transformée inverse.

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau\cdot p}$
$a\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p}$
$a\cdot u(t-\tau)$	$\dfrac{a}{p}\cdot e^{-\tau\cdot p}$
$a\cdot t\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p^2}$
$t^n\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-a\cdot t}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\dfrac{1-e^{-a\cdot t}}{a}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p\cdot(p+a)}$

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p(1+\tau.p)}$
$e^{-a.t}\cdot t^n\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\sin(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-a\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{\omega^2+(p+a)^2}$
$e^{-a\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{\omega^2+(p+a)^2}$
$\dfrac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\dfrac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$

Transformées des systèmes du 1er et du 2nd ordre

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\frac{1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{1+\tau\cdot p}$
$\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)}$
$\left(t-\tau\cdot\left(1-\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p^2\cdot(1+\tau\cdot p)}$
$t\cdot\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{(1+\tau\cdot p)^2}$
$\left(1-(t+\tau)\cdot\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)^2}$
$\frac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$
$\left(1+\frac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p.(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$
$\frac{1}{\omega_0\cdot\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\cdot\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{{\omega_0}^2+2\cdot z\cdot\omega_0\cdot p+p^2}$ avec $z<1$
$\frac{1}{\omega_0^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\cdot\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\cdot t+\varphi\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$ et $\varphi=\arccos z$	$\frac{1}{p\left({\omega_0}^2+2\cdot z\cdot\omega_0\cdot p+p^2\right)}$ avec $z<1$

Transformées inverses Soit $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$. On appelle transformée de Laplace inverse, ou original, de $F(p)$ la fonction $f(x)$. On note :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right)$$

La transformation de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une fonction $F(p)$ donnée.

Lorsque la fonction $F(p)$ est sous la forme d'une fraction rationnelle en p, la méthode à utiliser est la décomposition en éléments simples puis à rechercher dans le tableau des transformées la fonction temporelle de chaque fraction rationnelle. La transformée inverse de $F(p)$ est la somme des fonctions temporelles élémentaires.

Tout polynôme possède et / ou : des racines nulles, des racines réelles, simples et / ou multiples, des racines complexes, simple et / ou multiples.

Ainsi un polynôme du troisième ordre $D(p) = a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p^1 + 1$, en fonction des racines pourra se mettre sous la forme suivante :

— 3 racines réelles distinctes : $D(p) = (1 + \lambda_1 \cdot p) \cdot (1 + \lambda_2 \cdot p) \cdot (1 + \lambda_3 \cdot p)$

— 1 racine réelle double et un racine réelle distincte :$D(p) = (1 + \lambda_1 \cdot p)^2 \cdot (1 + \lambda_3 \cdot p)$

— 1 racine réelles et deux racines complexes conjuguées : $D(p) = (1 + \lambda_1 \cdot p) \cdot (1 + \lambda_2 \cdot p + \lambda_3 \cdot p^2)$

Ainsi, dans le cas général, le polynôme du dénominateur peut donc se mettre sous la forme d'un produit de fonctions du premier et du second ordre :

$$H(p) = K' \cdot \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_m \cdot p^m}{\prod_j (p - c_j)^{\alpha_j} \cdot \prod_l \left((p - a_l)^2 + b_l^2\right)^{\alpha_l} \cdot \prod_k (p^2 + b_l^2)^{\alpha_k}}$$

avec :

p^α :	racines nulles d'ordre α,
$\prod_j (p - c_j)^{\alpha_j}$:	racines réelles multiples d'ordre α_j,
$\prod_l \left((p - a_l)^2 + b_l^2\right)^{\alpha_l}$:	racines complexes multiples d'ordre α_l,
$\prod_k (p^2 + b_l^2)^{\alpha_k}$:	racines imaginaires pures multiples d'ordre α_k.

Nous allons traiter les différents type de racines et d'ordre à partir d'exemples

Racines réelles simples Si la fonction de transfert ne présente que des pôles réels simples, la décomposition s'écrit comme la somme des fractions simples de chaque pôle.

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2 + 15 \cdot p + 50} = \frac{p+2}{(p+5) \cdot (p+10)}$$

sa décomposition en fractions simples est donc de la forme suivante :

$$F(p) = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}$$

Racines réelles multiples Dans le cas de racines réelles multiples, la décomposition en fractions simples de la racine multiple est la somme des fractions simples des puissances décroissantes.

Pour

$$F(p) = \frac{p+2}{p^3 + 20 \cdot p^2 + 125 \cdot p + 250} = \frac{p+2}{(p+5)^2 \cdot (p+10)}$$

la décomposition en fractions simples s'écrit :

$$F(p) = \frac{A}{(p+5)^2} + \frac{B}{(p+5)} + \frac{C}{(p+10)} = -\frac{3}{5 \cdot (p+5)^2} - \frac{8}{25 \cdot (p+5)} + \frac{8}{25 \cdot (p+10)}$$

Racine complexe simple Dans le cas d'une racine complexe, il est possible de raisonner comme dans le cas des racines réelles mais cela fait apparaitre des coefficients complexe.Il est préférable de ne travailler qu'avec des coefficients réels. Pour cela, on réalisera la décomposition en gardant les polynômes du second ordre au dénominateur.

Ainsi

$$F(p) = \frac{3}{p \cdot (p^2 + 2 \cdot p + 5)}$$

se décompose sous la forme :

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B \cdot p + C}{(p^2 + 2 \cdot p + 5)} = \frac{3}{5 \cdot p} + \frac{-3 \cdot p - 6}{5 \cdot (p^2 + 2 \cdot p + 5)}$$

Détermination des coefficients Pour déterminer les coefficients, on peut soit

- résoudre par identification,
- déterminer les coefficients en utilisation la valeur de la fonction en des points particuliers,
- déterminer les coefficients après les avoir isolés.

Détermination de la solution Pour déterminer la solution, il ne reste plus qu'à rechercher dans les tableaux des transformées inverse, la transformée inverse de chaque fraction simple.

Activité 3 - Détermination des coefficients des décompositions en fractions simples

Corrigé page **??**

Q1. Verifier les coefficients des décompositions ci-dessus.
Q2. Déterminer les fonctions temporelles correspondantes.

3.6.2 Utilisation pour la résolution d'équations différentielles

La transformation permet de ramener l'étude des équations différentielles dans le domaine temporel, à une étude d'un polynôme dans le domaine symbolique.

Soit l'équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants

$$b_2 \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + b_1 \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 \cdot s(t) = e(t)$$

On considère que les conditions initiales sont nulles pour $s(t)$ et ses dérivées. Si ce n'est pas le cas, en général un simple changement de variable permet de se placer dans le cas de conditions initiales nulles.

On pose :

$$E(p) = \mathcal{L}\left(e(t)\right)$$
$$S(p) = \mathcal{L}\left(s(t)\right)$$

on a aussi :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{d}t}\right) = p \cdot S(p)$$
$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}\right) = p^2 \cdot S(p)$$

En substituant :

$$\begin{aligned} b_2 \left(p^2 \cdot S(p) + b_1 \cdot p \cdot S(p) + b_0\right) \cdot S(p) &= E(p) \\ \left(b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0\right) \cdot S(p) &= E(p) \end{aligned}$$

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot E(p)$$

La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.

Ce résultat est important, il permet de montrer que dans le domaine symbolique, la sortie (la solution de l'équation différentielle) s'obtient comme le produit de :

— la transformée de Laplace du signal d'entrée : $E(p) = \mathcal{L}\left(e(t)\right)$

— et d'une fraction rationnelle.

On appelle $H(p)$ la **fonction de transfert** du système linéaire :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}.$$

On utilisera pour représenter le système, une représentation graphique, le schéma bloc :

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}} \longrightarrow S(p)$$

La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.

Il faut encore préciser l'entrée $e(t)$ et sa transformée de Laplace, ainsi si

— l'entrée est un échelon $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ alors $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot \frac{E_0}{p}$$

— l'entrée est une rampe $e(t) = a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ alors $E(p) = \dfrac{a}{p^2}$

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot \frac{a}{p^2}$$

— une entrée sinusoïdale $e(t) = A_0 \cdot \sin(\omega_t)$ alors $E(p) = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

On constate sur ces exemples que $S(p)$ est une fraction rationnelle qu'il suffit de décomposer pour obtenir la transformée inverse.

Nous allons le montrer sur un exemple.

Exemple : Enceinte chauffée - transformation de Laplace et schéma blocs

On reprend l'exemple de l'enceinte

Le système représenté figure 3.11 est chargé de maintenir la température d'une enceinte Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne v, permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur. On note :

— $\alpha(t)$: l'angle d'ouverture de la vanne.

— $q(t)$: débit dans l'échangeur.

— θ_1 : température en sortie de l'échangeur.

— θ : température dans l'enceinte

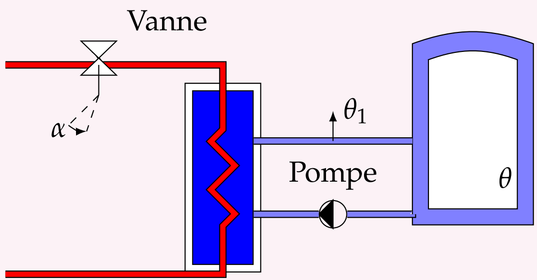


FIGURE 3.11 – Échangeur thermique

Les équations :

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$$
$$\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{\mathrm{d}\,\theta_1(t)}{\mathrm{dt}} = k_1 \cdot q(t)$$
$$\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{\mathrm{d}\,\theta(t)}{\mathrm{dt}} = k_2 \cdot \theta_1(t)$$

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles.

On note : $A(p)$ la transformée de Laplace de $\alpha(t)$ et $Q(tp)$, $\Theta(p)$ et $\Theta_1(p)$ respectivement les transformées de $q(t)$, $\theta(t)$ et $\theta_1(t)$.

Q1. Écrire la transformée de Laplace de chaque équation.
Q2. Représenter à l'aide d'un schéma bloc la relation entre $\Theta(p)$ et $A(p)$.
Q3. Donner la relation donnant $\Theta(p)$ en fonction de $A(p)$. en déduire la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{\Theta(p)}{A(p)}$.
Q4. Déterminer $\theta(t)$ pour $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \mathcal{H}(t)$.

La transformée de Laplace permet donc de résoudre les équations différentielles à coefficients constants. Cette méthode ne permet pas de résoudre d'autres équations que celle que l'on pourraient résoudre par la méthode classique, par contre elle permet de prendre en compte rapidement les conditions initiales et surtout les signaux d'entrées composés.

3.7 Fonction de transfert – Transmittance

Un système dynamique linéaire est décrit par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.

$$b_m \frac{\mathrm{d}^m y(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 \cdot y(t) = a_n \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 \cdot x(t)$$

On se place dans les conditions de Heaviside (toutes les conditions initiales sont nulles).

On pose : $\mathcal{L}\left(x(t)\right) = X(p)$ et $\mathcal{L}\left(y(t)\right) = Y(p)$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité les conditions initiales étant nulles.

$$\left(b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0\right) \cdot Y(p) = \left(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0\right) \cdot X(p)$$

ce qui permet d'écrire

$$Y(p) = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0} \cdot X(p)$$

On appelle

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0}$$

la fonction de transfert (ou transmittance) du système.

Dans le cas des systèmes physiques, le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur : $m > n$.

3.8 Forme canonique

Il est toujours possible de mettre la fonction de transfert sous la forme suivante dite forme canonique avec :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \cdot \frac{N(p)}{p^\alpha \cdot D_1(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + 1}{p^\alpha \left(b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + 1\right)}$$

avec

— $N(p)$: un polynôme en p avec $N(0) = 1$;

— $D_1(p)$: un polynôme en p avec $D_1(0) = 1$;

— K : le gain de la fonction de transfert ;

— α : la classe de la fonction de transfert.

Pour les systèmes du premier et du second ordre, on mettra les fonctions de transfert sous la forme :

Premier ordre

$$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

avec K le gain statique et τ la constante de temps.

Second ordre

$$H_2(p) = \frac{K}{1 + \dfrac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \dfrac{p^2}{\omega_n^2}}$$

avec K le gain statique, ξ le coefficient d'amortissement et ω_n la pulsation propre.

3.9 Schéma bloc

À partir de la fonction de transfert, on établit le schéma bloc du système

$$\xrightarrow{\text{X(p)}} \boxed{H(p)} \xrightarrow{\text{Y(p)}} \quad \text{soit} \quad \xrightarrow{\text{X(p)}} \boxed{\dfrac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0}} \xrightarrow{\text{Y(p)}}$$

3.10 Pôles et zéros

On appelle

zéros : les racines de $N(p) = 0$, le polygone du numérateur.

pôles : les racines de $D(p) = 0$, le polynôme du dénominateur