I - MOBILITE - HYPERSTATICITE

Objectifs

Le schéma cinématique d'une partie opérative étant fourni, l'étudiant doit être capable de paramétrer géométriquement le système mécanique.
Il doit être capable dans le cas d'une chaîne ouverte de conduire une étude dynamique afin de déterminer certaines composantes des torseurs transmissibles, et dans le cas d'une chaîne fermée de

écrire les relations liant les paramètres géométriques afin de déterminer la position de chacun des solides en fonctions des paramètres pilotes,

écrire les relations de fermeture de la chaîne cinématique, de résoudre le système associé et d'en déduire le degré de mobilité,

conduire une étude dynamique afin de déterminer :

le degré d'hyperstaticité,
les relations éventuelles entre les efforts extérieurs appliqués
certaines composantes des torseurs transmissibles

A. Rappel : structure des mécanismes

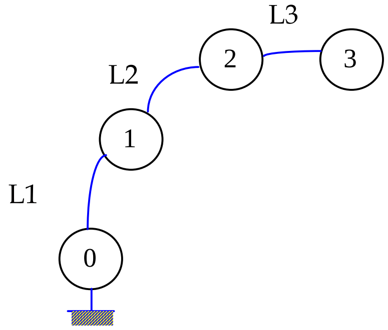
1. Hypothèses

Nous supposerons dans toute la suite que :

- les solides sont indéformables;
- les liaisons sont parfaites.

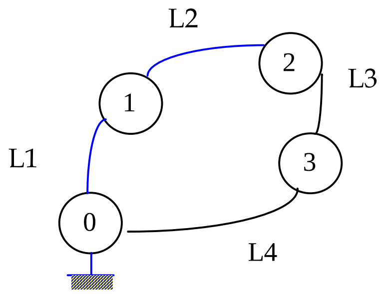
2. Mécanisme en chaîne ouverte

Dans une mécanisme en chaîne ouverte, les solides sont assemblés en série, Ce type de structure est celui des robots, pelleteuse, ...



3. Mécanisme en chaîne fermée simple

Un chaîne fermée simple est une chaîne ouverte dont les solides extrêmes sont reliés.



4. Mécanisme en chaîne fermée complexe

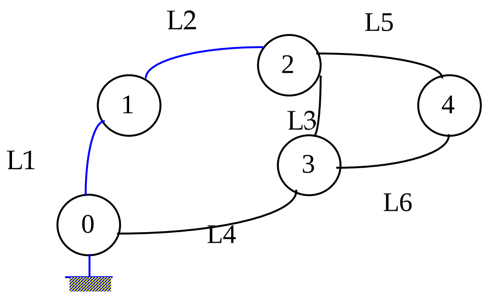
Un chaîne complexe fermée est constituée de chaînes simples imbriquées
On montre que le nombre de cycles indépendants d'une chaîne fermée complexe est donnée par :

$\gamma = L - N + 1$

γ : nombre cyclomatique;

L : nombre de liaisons;

N : nombre de pièces.



B. Définitions

1. Degré de mobilité d'un mécanisme

Le degré de mobilité (**m**) caractérise le nombre de mouvements indépendants d'un mécanisme.
Un système est immobile lorsque m=0.
Un système est mobile de mobilité m lorsque m>0.
On définit aussi les notions de mobilité utile (m_u) et mobilité interne (m_i).
Mobilité utile : c'est en général la ou les mobilités souhaitées du mécanisme mais aussi toute mobilité qui entraîne le mouvement de plusieurs pièces.
Mobilité interne : c'est une mobilité qui caractérise le mouvement d'une pièce indépendamment des autres pièces (rotation d'une pièce sur elle même).
Cette notion de mobilité interne est étendue aux mobilités du mécanisme qui ne concerne que des pièces internes dont le mouvement n'entraîne pas de mouvement des pièces en relation avec le milieu extérieur.

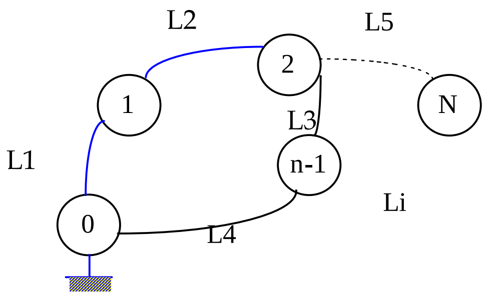
2. Degré d'hyperstaticité d'un mécanisme

Le degré d'hyperstaticité (h) d'un mécanisme caractérise la surabondance des liaisons constituants le mécanisme.
Un système est isostatique (h=0) s'il est possible de déterminer la totalité des inconnues de liaison en appliquant le principe fondamental de la statique à chacune des pièces du mécanisme.
Chaque inconnue non déterminable par le PFS est un degré d'hyperstaticité (H>0).
……

C. Formules de mobilité :

1. Analyse statique

Soit un mécanisme formé de N solides reliés par L liaisons



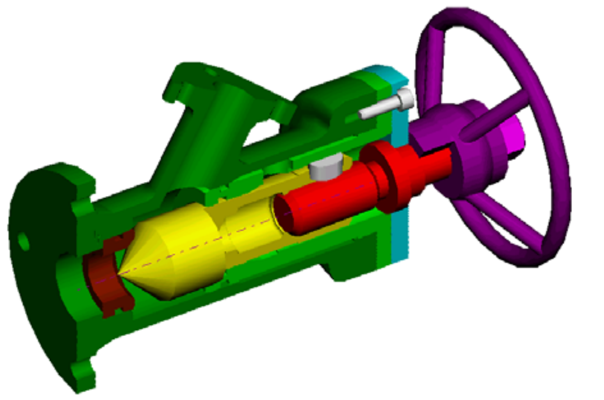
On applique le P.F.S à chaque solide hormis le bâti, pour chaque solide on peut écrire 6 équations. on a donc $E_s=6\cdot(N-1)$ équations.

Le torseur d'action mécanique transmissible (torseur statique) de chaque liaison possède n_{si} inconnues indépendantes (pour une liaison pivot 5 inconnues, 4 pour un pivot glissant, 5 pour une liaison hélicoïdale).

Le nombre total d'inconnues statiques est donc $I_s=\sum_{i=1}^{L} n_{si}$.

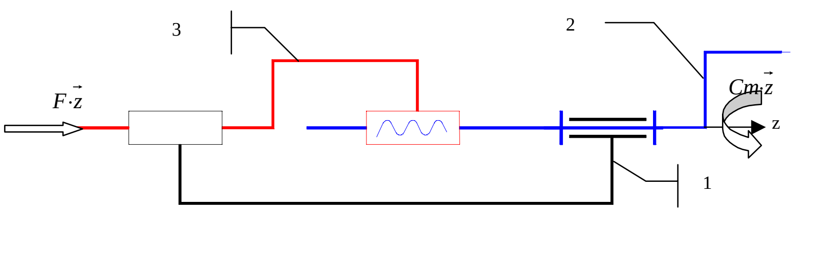
On peut donc écrire un système linéaire de E_s équations avec I_s inconnues sous la forme ci-dessous.
Le rang de ce système est noté **rs**.
Le degré d'hyperstaticité h de la chaîne complexe est : $h=I_s-r_s$ **,**
Si **h=0** alors il est possible de déterminer toutes les inconnues de liaison, le système est alors **isostatique**.
Si **h>0**, (plus d'inconnues que d'équations indépendantes) le rang du système est donc tel qu'il n'est pas possible de déterminer chaque action de liaison. Le nombre d'inconnues de liaison non déterminées représente le degré d'hyperstaticité.

a) Exemple : Vanne robinet

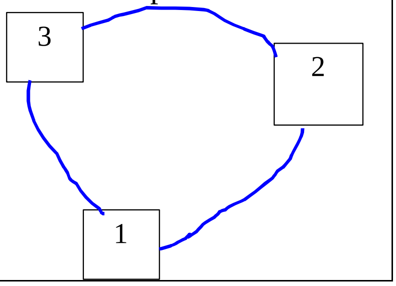


Le volant entraîne la vis de commande (liaison complète) en rotation par rapport au corps (liaison pivot)
La vis de commande entraîne par l'intermédiaire d'une liaison hélicoïdale le pointeau.
Le pointeau est en liaison glissière par rapport au corps

- Schéma cinématique



- Graphe de structure



- Liaisons

Désignation	Torseur cinématique	Torseur statique	
L31 : Liaison Glissière :	$\{V_{3/1}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & V_{31}\end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{z})}$	$\{S_{3\to1}\}=\begin{Bmatrix}X_{31} & L_{31}\\Y_{31} & M_{31}\\0 & N_{31}\end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{z})}$	
L32 : Liaison Hélicoïdale	$\{V_{3/2}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\\Omega_{32} & V_{32}\end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{z})}$	$\{S_{3\to2}\}=\begin{Bmatrix}X_{32} & L_{32}\\Y_{32} & M_{32}\\Z_{32} & N_{32}\end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{z})}$	La liaison est supposé parfaite

		avec $N_{32}=\varepsilon\frac{p}{2\pi}Z_{32}$	
L21 : liaison Pivot	$\{V_{2/1}\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Omega_{11} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{z})}$	$\{S_{2\to 1}\}=\begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{z})}$	

- efforts extérieurs

Couple moteur sur le volant	$\{F_{E\to 2}\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Cm \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{z})}$
Effort résistant sur le pointeau	$\{F_{E\to 3}\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{z})}$

- inventaire

Inventaire des inconnues statiques : $I_S=5+5+5=15$
Nombre de pièces : 3
Nombre de liaisons : 3
Nonbre cyclomatique $\gamma=1$
Nombre d'équation de la statique : $Es=6*(3-1)=12$

- PFS sur 2 en O

Remarque préalable : écrire le PFS suppose que le système est en équilibre, ce qui n'est pas le cas ici, nous supposerons donc que les masses sont négligeables ou les vitesses constantes. L'objectif de cette étude n'étant pas l'équilibre des pièces ou l'étude du mouvement mais de déterminer les mobilités et l'hyperstaticité du mécanisme, nous verrons par la suite qu'il est judicieux de réaliser les calculs avec des efforts nuls.

$$\{S_{3\to 2}\}+\{S_{1\to 2}\}+\{F_{E\to 2}\}=\{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32} \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & N_{32} \end{Bmatrix}_O - \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Cm \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32} \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & N_{32} \end{Bmatrix}_O - \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Cm \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\begin{cases} X_{32} & -X_{21} & & =0 \\ Y_{32} & -Y_{21} & & =0 \\ Z_{32} & -Z_{21} & & =0 \\ L_{32} & -L_{21} & & =0 \\ M_{32} & -M_{21} & & =0 \\ N_{32} & -0 & +Cm & =0 \end{cases}$$

- PFS sur 3 en O

$$-\{S_{3\to 2}\}+\{S_{1\to 3}\}+\{F_{E\to 3}\}=\{0\}$$

$$-\begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32} \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & N_{32} \end{Bmatrix}_O - \begin{Bmatrix} X_{31} & L_{31} \\ Y_{31} & M_{31} \\ 0 & N_{31} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F & 0 \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\begin{cases} -X_{32} & -X_{21} & & =0 \\ -Y_{32} & -Y_{21} & & =0 \\ -Z_{32} & -0 & +F & =0 \\ -L_{32} & -L_{21} & & =0 \\ -M_{32} & -M_{21} & & =0 \\ -N_{32} & -N_{31} & & =0 \end{cases}$$

- résolution

Le système comporte donc 12 équations

$$\begin{cases} X_{32} - X_{21} = 0 & (1) \\ Y_{32} - Y_{21} = 0 & (2) \\ Z_{32} - Z_{21} = 0 & (3) \\ L_{32} - L_{21} = 0 & (4) \\ M_{32} - M_{21} = 0 & (5) \\ N_{32} - 0 + Cm = 0 & (6) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} -X_{32} - X_{31} = 0 & (7) \\ -Y_{32} - Y_{31} = 0 & (8) \\ -Z_{32} - 0 + F = 0 & (9) \\ -L_{32} - L_{31} = 0 & (10) \\ -M_{32} - M_{31} = 0 & (11) \\ -N_{32} - N_{31} = 0 & (12) \end{cases}$$

le rang est au maximum de 12.

A partir des équations (3), (6), (9) et (12) avec $N_{32} = \varepsilon \frac{p}{2\pi} Z_{32}$

Ce système de 4 équations comporte 3 inconnues le rang du système est de 3.
On déduit : $Z_{32} = Z_{21} = F$ et $N_{32} = N_{21} = -Cm$
Il reste donc 8 équations avec 12 inconnues

$$\begin{cases} X_{32} - X_{21} = 0 & (1) \\ Y_{32} - Y_{21} = 0 & (2) \\ L_{32} - L_{21} = 0 & (4) \\ M_{32} - M_{21} = 0 & (5) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} -X_{32} - X_{31} = 0 & (7) \\ -Y_{32} - Y_{31} = 0 & (8) \\ -L_{32} - L_{31} = 0 & (10) \\ -M_{32} - M_{31} = 0 & (11) \end{cases}$$

Il n’est pas possible de résoudre ce système, Il faut imposer 4 inconnues pour résoudre, le rang de ce sous système est de 8.
On choisit les composantes de la liaison hélicoïdale.

$$\begin{cases} X_{32} = X_{21} & (1) \\ Y_{32} = Y_{21} & (2) \\ L_{32} = L_{21} & (4) \\ M_{32} = M_{21} & (5) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} -X_{32} = X_{31} & (7) \\ -Y_{32} = Y_{31} & (8) \\ -L_{32} = L_{31} & (10) \\ -M_{32} = M_{31} & (11) \end{cases}$$

Le système est donc hyperstatique de degré 4 h=4.

Le rang global du système est donc de 11, rs=3+8
Es=12
Is=15
Donc le degré d’hyperstatisme est : h= Is-rs= 15-11
d’où le degré d’hyperstaticité h=8-4=4.

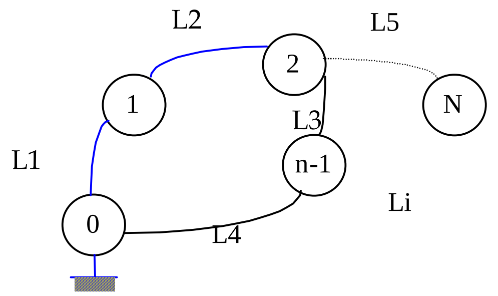
b) remarques

Ici le système comporte 11 équations principales et 1 équation supplémentaire.
Les équations supplémentaires traduisent les relations entre les actions mécaniques extérieures au système pour qu’il soit en équilibre (dans l’exemple précédent relation entre F et Cm).
Le nombre d’équations supplémentaires est égal au nombre de degré de mobilité du mécanisme, $m = E_s - r_s = 6 \cdot (N-1) - r_s$
Le caractère hyperstatique d’un mécanisme est indépendant des efforts extérieurs.
Les inconnues hyperstatiques sont choisies arbitrairement (dans l’exemple précédent Y_{32}, X_{32} M_{32}, L_{32}) pour la résolution mais lors de la réalisation ou d’une simulation, il faudra choisir judicieusement les valeurs à annuler, .
Aux inconnues hyperstatiques correspondent des conditions de cotation entre les liaisons.
- à une inconnue de résultante correspond une condition dimensionnelle (Y_{32}, X_{32} implique que le centre de la liaison Hélicoïdale doit être positionné précisément par rapport à l’axe de

la liaison pivot (ici la distance doit être nulle, coaxialité)).
- à une inconnue de moment correspond une condition angulaire (M_{32} , L_{32} implique que l'axe de la liaison en Hélicoïdale doit être parallèle à l'axe des la glissière)
……

2. Analyse cinématique

Soit un mécanisme formé de N solides reliés par L liaisons
Le nombre de cycles indépendants du mécanisme est : $\gamma = L - N + 1$.



Pour chaque liaison élémentaire on peut écrire le torseur cinématique. Chaque torseur comporte n_{ci} inconnues cinématiques indépendantes (1 pour une pivot, 2 pour une pivot glissant, 5 pour une ponctuelle,...).
Pour chaque cycle indépendant, en écrivant la fermeture cinématique $\sum_i \{V_i\} = \{0\}$ on obtient 6 équations. Donc pour toutes les boucles on écrit donc $E_c = 6 \cdot \gamma$ équations.

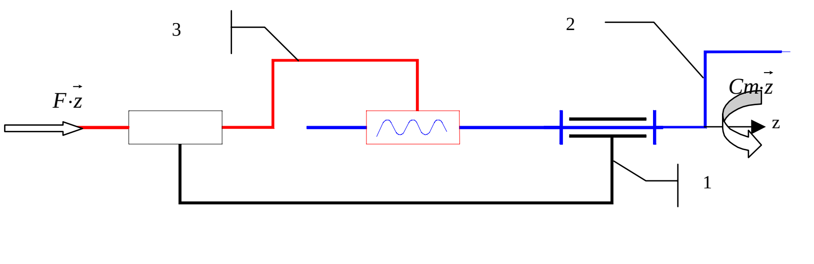
Le nombre total d'inconnues cinématiques est $I_c = \sum_{i=1}^{L} n_{ci}$.

Le système obtenu est un système de E_c équations avec I_c inconnues. Le rang de ce système est r_c .

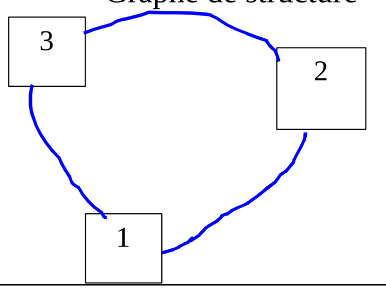
Le degré de mobilité du mécanisme est donc $m = I_c - r_c$
si $m = 0$ le mécanisme est immobile.
si $m > 0$ le système est mobile de mobilité m.

a) Exemple : suite

- Schéma cinématique



- Graphe de structure



Ici le système ne comporte qu'une seule boucle $\gamma = 1$
Nombre d'équation cinématique : $Ec = 6 * \gamma$
Nombre inconnues cinématique Ic=1+1+1=3

- fermeture de la chaîne cinématique

La fermeture de la chaîne cinématique s'écrit : $\{V_{3/1}\} + \{V_{1/2}\} + \{V_{2/3}\} = \{0\}$ avec la relation cinématique de la liaison hélicoïdale

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_{31} \end{Bmatrix}_O - \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Omega_{21} & 0 \end{Bmatrix}_O - \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Omega_{32} & V_{32} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

le système s'écrit :

$$\begin{cases} 0 & +0 & +0 & =0 \\ 0 & +0 & +0 & =0 \\ V_{31} & +0 & -V_{32} & =0 \\ 0 & +0 & +0 & =0 \\ 0 & +0 & +0 & =0 \\ 0 & -\Omega_{21} & -\Omega_{32} & =0 \end{cases}_O \quad \text{avec } V_{32} = \varepsilon \frac{p}{2\pi} \Omega_{32}$$

Le système comporte 4 équations supplémentaires nulles
Le système se ramène à un système de 2 équations à 3 inconnues le rang rc=2, il faut fixer un paramètre pour pouvoir résoudre les autres.

Ici : $V_{31} = V_{32}$ et $\Omega_{21} = -\Omega_{32}$

Mobilité : $m = I_c - rc = 3 - 2 = 1$

3. Relations entre mobilité et hyperstatisme

Pour un système mécanique formé de N solides, et L liaisons nous avons

$$\gamma = L - N + 1 \quad (1)$$

Nous avons vus dans la première étude (étude statique) que le degré d'hyperstaticité est donné par :

$$h = I_s - r_s \quad (2)$$

de même la mobilité du mécanisme peut se déduire de l'étude statique (nb d'équations supplémentaires)

$$m = E_s - r_s = 6\cdot(N-1) - r_s \quad (3)$$

mais aussi bien sur de l'étude cinématique

$$m = I_c - r_c \quad (4)$$

des relations 2 et 3 on déduit

$$m - h = E_s - I_s$$

or $E_s = 6\cdot(N-1)$ et $I_s = \sum_{i=1}^{L} n_{si} = \sum_{i=1}^{L} (6 - n_{ci})$ (le nombre d'inconnues cinématique est le complément à 6 du nombre d'inconnues statiques) donc $I_s = 6L - \sum_{i=1}^{L} n_{ci} = 6L - I_c$

en remplaçant

$$m - h = E_s - I_s = 6(N-1) - 6L + I_c$$
$$m - h = -6(L - N + 1) + I_c$$

On reconnaît le nombre cyclomatique

$$m - h = -6\gamma + I_c$$

d'où une relation entre la mobilité et l'hyperstaticité

$$h = m + 6\gamma - I_c$$

On peut aussi écrire cette relation

$$m - h = E_s - I_s = I_c - E_c$$

le paramètre m-h est parfois appelé indice de mobilité !

Dans le cas d'un mécanisme plan on peut écrire :

$$h = m + 3\gamma - I_c$$