Cinématique des Solides

Présentation

Robert Papanicola

Lycée Charlemagne- Paris 4e

24 août 2015

Sommaire

1. Coordonnées d'un point dans l'espace
   - Repère et référentiel
   - Repère orthonormé
   - Sens trigonométrique
   - Coordonnées cartésiennes
   - Coordonnées cylindriques
   - Coordonnées sphériques
   - Relations
2. Position et orientation d'un solide
3. Solides et repères associés
   - Solides
   - Repères associés
   - Exercices
4. Trajectoire et vitesse d'un point matériel
   - Trajectoire
   - Exemple : trajectoire de la valve d'une roue de vélo
   - Vitesse et accélération d'un point
     - Vitesse d'un point
     - Accélération d'un point
   - Vecteur vitesse de rotation
5. Compléments mathématiques
   - Produit scalaire
   - Produit vectoriel
   - Produit mixte
   - Double produit vectoriel
   - Dérivation vectorielle
6. Exercices
   - Valve de roue
   - Éolienne

Objectifs

La cinématique du solide est l'étude des mouvements des corps solides indépendamment des causes de ces mouvements.

Objectif :

- Déterminer la position d'un point dans l'espace, sa vitesse et son accélération
- Déterminer la position d'un solide dans l'espace, sa vitesse et son accélération
- Déterminer la position et la vitesse d'un solide par rapport à un autre

Coordonées

Repère orthonormé

On montre qu'il est possible décrire de manière unique la position d'un point dans l'espace à partir de sa projection dans un repère constitué d'un point origine et d'une base de trois vecteurs orthonormés (orthogonaux et de norme unitaire).
Lorsque c'est trois vecteurs sont orientés dans le sens direct, on dit que l'on a un repère orthonormé direct.
La figure 1 présente deux repères orthonormés directs et la méthode de la main droite pour tracer un repère direct.

Coordonées

Repère orthonormé

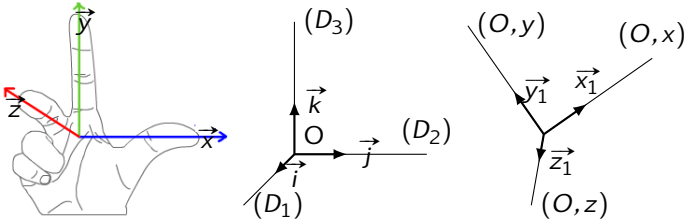


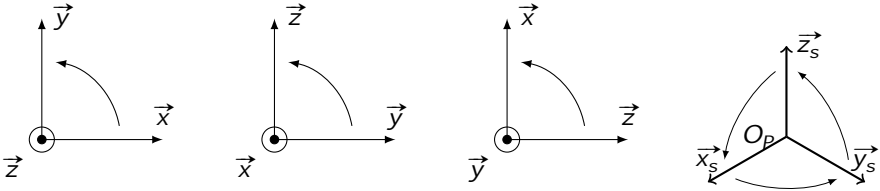
FIGURE: Repères orthonormés

Remarque : L'usage en Sciences Industrielles est de noter la base de travail avec le nom des axes soit $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Coordonées

Sens trigonométrique

Il est important pour l'étude et la description des mouvements de faire attention au sens direct.
Le sens direct dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ se confond avec le sens trigonométrique (figure 2(a)). La figure 2 précise l'orientation directe dans les autres plans.



(a) Sens direct dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ (b) Sens direct dans le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$ (c) Sens direct dans le plan $(O, \vec{z}, \vec{x})$ (d) trièdre dans le plan sens direct

FIGURE: Sens direct

Coordonées

Coordonnées cartésiennes

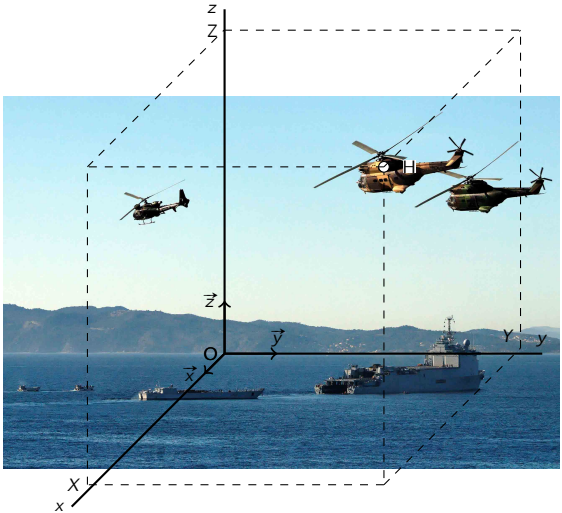
La manière la plus naturelle pour décrire la position d'un point est d'utiliser les coordonnées cartésiennes (figure 3), pour cela, on définit un repère orthonormée direct dit repère cartésien constitué de 3 vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux et d'un point pour origine.
Il est nécessaire de préciser 3 dimensions pour décrire de manière unique la position d'un point. Sur l'exemple de la figure 3 le vecteur $\overrightarrow{OH}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OH} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$$

On note (X, Y, Z) les coordonnées cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{OH}$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
X, Y et Z sont les trois projections de suivant les axes $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$ de $\overrightarrow{OH}$.

Coordonées

Coordonnées cartésiennes



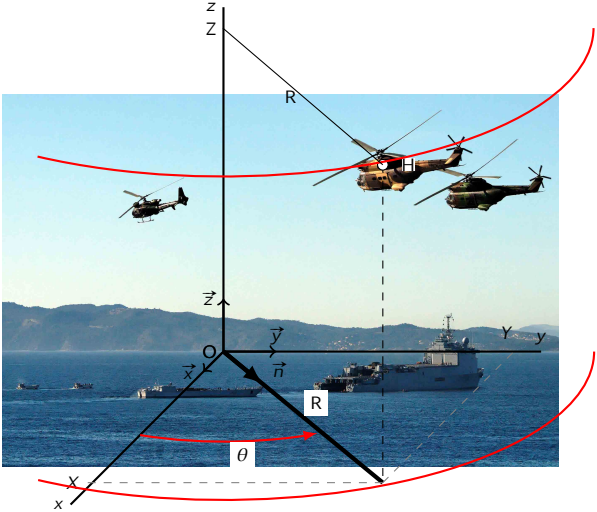
Coordonées

Coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindrique (figure 4) est une extension du système de coordonnées polaires utilisé dans le plan, en ajoutant à l'angle polaire orienté et au rayon polaire un troisième dimension perpendiculaire au plan.

Coordonées

Coordonnées cylindriques



Coordonées

Coordonnées cylindriques

Sur la figure 4, le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est défini par :

$$\overrightarrow{OH} = R \cdot \vec{n} + Z \cdot \vec{z}$$

Le vecteur $\vec{n}$ est précisé par l'angle θ tel que $\theta = (\vec{x}, \vec{n})$ et la figure de calcul (figure 5).
Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est décrit de manière unique par les trois dimensions : R, θ et Z.

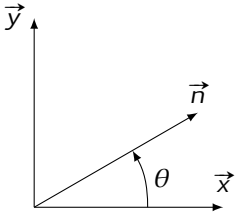


FIGURE: Figure de calcul

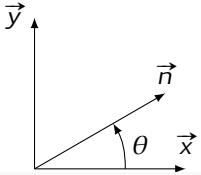
Coordonées

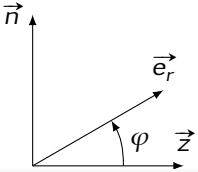
Coordonnées sphériques

Un point en coordonnées sphériques est défini par une distance et deux angles. Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ s'écrit $\overrightarrow{OH} = \rho \cdot \vec{e_r}$. avec ρ la distance entre l'origine du repère et le point H et $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par la droite (OH) et défini par les deux figures de calculs de la figure 6.
le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est défini par :

$$\overrightarrow{OH} = \rho \cdot \vec{e_r}$$

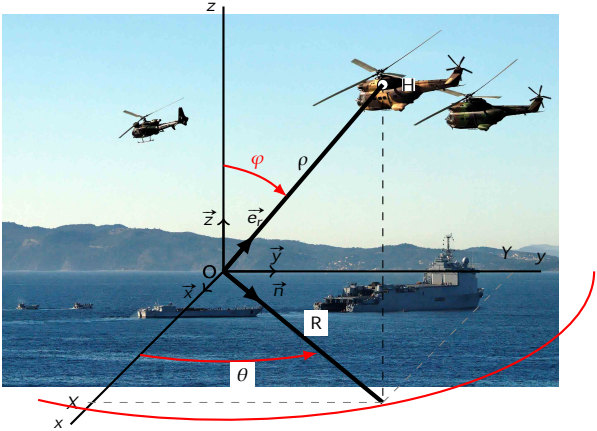
Le vecteur $\vec{n}$ est porté par la projection de la droite (OH) dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.
Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est décrit de manière unique par les trois dimensions ρ, φ et θ.





Coordonées

Coordonnées sphériques



Coordonées

Relations

Cartésiennes $\leftrightarrow$ Cylindriques :

$$\overrightarrow{OH} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} : \begin{cases} X = R \cdot \cos\theta \\ Y = R \cdot \sin\theta \\ Z = Z \end{cases} \leftrightarrow \overrightarrow{OH} = R \cdot \vec{r} + Z \cdot \vec{z} : \begin{cases} R = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{Y}{X} \\ Z = Z \end{cases}$$

Cartésiennes $\leftrightarrow$ Sphériques :

$$\overrightarrow{OH} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} : \begin{cases} X = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ Y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ Z = \rho \cdot \cos\varphi \end{cases} \leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \rho \cdot \vec{u} : \begin{cases} \rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{Y}{X} \\ \varphi = \arctan \dfrac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z} \end{cases}$$

Cylindriques $\leftrightarrow$ Sphériques :

$$\overrightarrow{OH} = R \cdot \vec{r} + Z \cdot \vec{z} \quad \begin{cases} R = \rho \cdot \sin\varphi \\ Z = \rho \cdot \cos\varphi \end{cases} \leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \rho \cdot \vec{u} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{R^2 + Z^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{R}{Z} \end{cases}$$

Position et orientation d'un solide

Si pour décrire la position d'un point, trois dimensions sont nécessaires et suffisante, ce n'est plus suffisant pour décrire la position d'un solide et son orientation :

- En ne précisant qu'un point, le solide peut pivoter librement autour de ce point.
- En précisant deux points, le solide a une direction imposée, mais il peut tourner librement autour de l'axe formé par les deux points.
- En précisant, trois points non colinéaires, la position du solide est complètement définie.

Soit trois points A, B et C non colinéaires d'un solide, on peut écrire les relations suivantes pour préciser la position du solide :

$$\overrightarrow{O_0A} = X_A \cdot \overrightarrow{x_0} + Y_A \cdot \overrightarrow{y_0} + Z_A \cdot \overrightarrow{z_0}$$
$$\overrightarrow{O_0B} = X_B \cdot \overrightarrow{x_0} + Y_B \cdot \overrightarrow{y_0} + Z_B \cdot \overrightarrow{z_0}$$
$$\overrightarrow{O_0C} = X_C \cdot \overrightarrow{x_0} + Y_C \cdot \overrightarrow{y_0} + Z_C \cdot \overrightarrow{z_0}$$

Position et orientation d'un solide

Si pour décrire la position d'un point, trois dimensions sont nécessaires et suffisante, ce n'est plus suffisant pour décrire la position d'un solide et son orientation :

- En ne précisant qu'un point, le solide peut pivoter librement autour de ce point.
- En précisant deux points, le solide a une direction imposée, mais il peut tourner librement autour de l'axe formé par les deux points.
- En précisant, trois points non colinéaires, la position du solide est complètement définie.

Soit trois points A, B et C non colinéaires d'un solide, on peut écrire les relations suivantes pour préciser la position du solide :

$$\overrightarrow{O_0A} = X_A \cdot \overrightarrow{x_0} + Y_A \cdot \overrightarrow{y_0} + Z_A \cdot \overrightarrow{z_0}$$
$$\overrightarrow{O_0B} = X_B \cdot \overrightarrow{x_0} + Y_B \cdot \overrightarrow{y_0} + Z_B \cdot \overrightarrow{z_0}$$
$$\overrightarrow{O_0C} = X_C \cdot \overrightarrow{x_0} + Y_C \cdot \overrightarrow{y_0} + Z_C \cdot \overrightarrow{z_0}$$

rajoutent la distance entre chaque point :

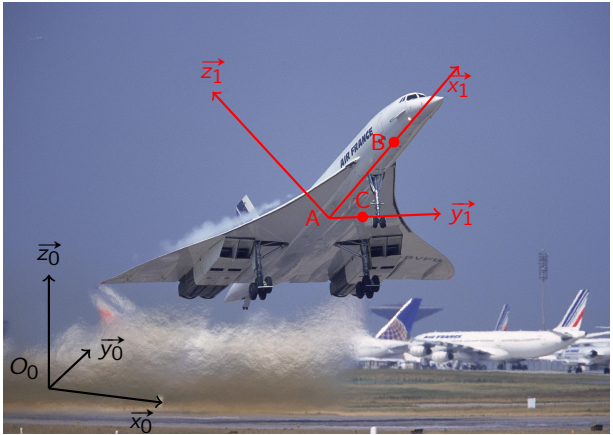
$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$
$$d_{AC} = \sqrt{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2 + (Z_C - Z_A)^2}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2 + (Z_C - Z_B)^2}$$

On montre donc, à partir de ces 6 équations, qu'il est nécessaire de préciser 6 dimensions pour positionner

Position et orientation d'un solide

Repères

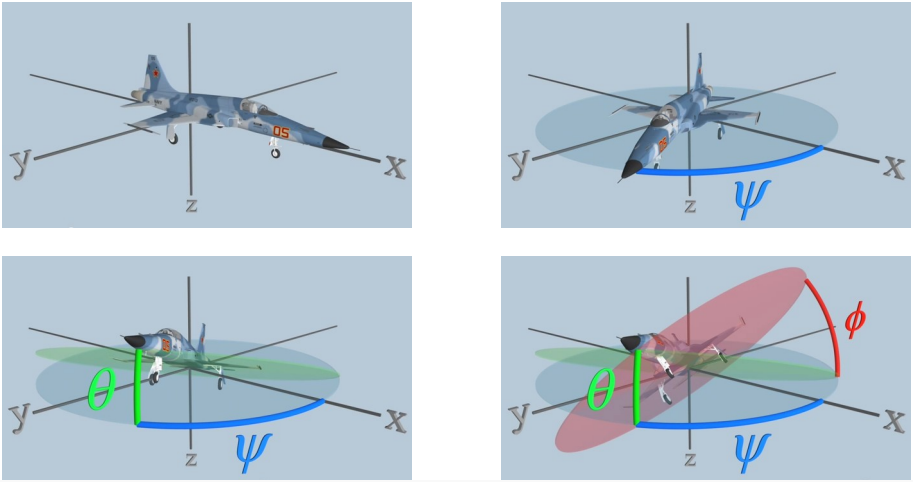
Plutôt que de positionner le solide avec 3 points on préfère lui associer un repère et positionner ce repère dans l'espace avec 3 distances et trois angles(figure 8).



Position et orientation d'un solide

Repères

La figure 9 montre l'orientation d'un solide dans l'espace à l'aide de 3 angles.



Solides et repères associés

Solides

En mécanique classique, nous supposerons que les solides sont indéformables.

$$\forall A, B \in S \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = d$$

avec S un solide, A et B deux points du solide S et d une constante.

Ce modèle sera précisé plus loin dans ce cours.

Solides et repères associés

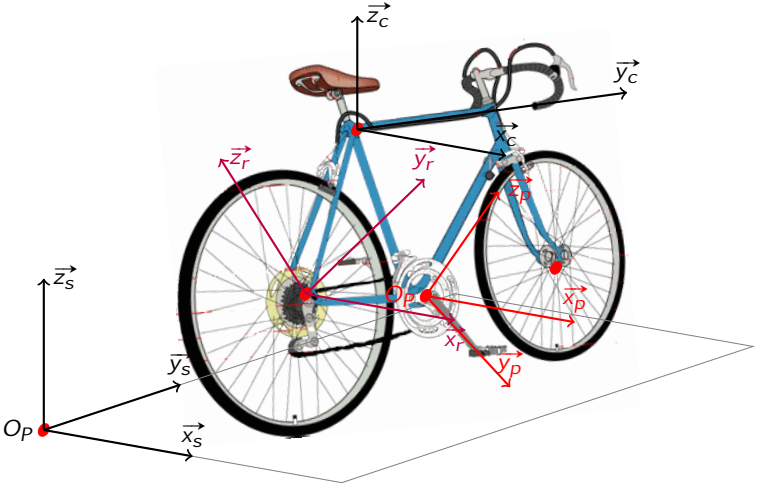
Repères associés

A chaque solide, on convient d'associer un repère représentant le solide.
Sur la figure 10, pour quelques solides de la bicyclette sont précisés les repères associés :

- L'origine de chaque repère est placé sur un point caractéristique du solide (l'axe de la roue arrière, l'axe du pédalier,...).
- Les axes du repère sont orientés en fonctions des caractéristiques du solide (pour le pédalier, un des axes est porté par l'axe de rotation, l'autre par le bras du pédalier).

Solides et repères associés

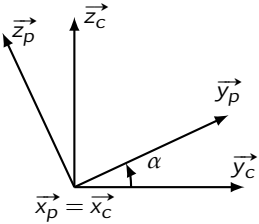
Repères associés



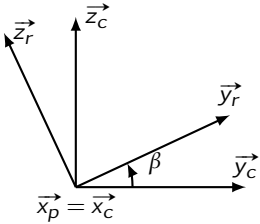
Solides et repères associés

Repères associés

Le passage d'un repère à un autre est représenté graphiquement par des figures nommées figure plane de changement de base ou figure de calcul. Sur cette figure, on représente la rotation plane qui permet de passer d'une base à une autre, ainsi sur la figure 11(a) on précise le passage de la base liée au cadre à celle liée au pédalier par une rotation d'angle α autour de l'axe $\overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{x_c}$.



(a) passage du repère du cadre au repère du pédalier



(b) passage du repère du cadre au repère de la roue arrière

Solides et repères associés

Exercices

Exercice :Repères et figures planes

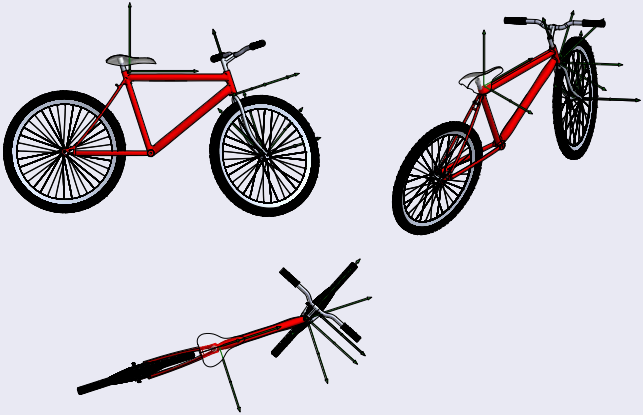
On considère, la salle, la porte de la salle et sa poignée.
Q1. Associer à chacun des solides un repère, précisez les axes et points caractéristiques de chaque solide.
Q2. Tracer les figures planes qui permettent de décrire la position et l'orientation de chaque solide.

Solides et repères associés

Exercices

Exercice :Repères et figures planes de la bicyclette

On reprend l'exemple de la bicyclette à partir de la figure ci dessous.



Solides et repères associés

Exercices

Exercice :Repères et figures planes de la bicyclette

Q3. Préciser pour chaque repère, dans chaque vue, les axes, le point origine.
Q4. Préciser les rotations et translations à réaliser pour passer du repère lié au cadre, à celui lié à la roue avant.
Q5. Tracer les figures planes correspondantes

Trajectoire et vitesse d'un point matériel

Trajectoire

On appelle point matériel ou corps ponctuel tout corps ou toute partie de corps très petit à l'échelle d'observation. Par extension, c'est également un corps dont on ne peut définir le mouvement de rotation sur lui-même.
On appelle trajectoire de M par rapport R_0 l'ensemble des positions successives de M par rapport à R_0 quand la date t varie. La trajectoire est une courbe liée à R_0.
La trajectoire dépend du repère R_0 dans lequel elle est décrite. On utilise généralement une représentation paramétrique en fonction temps t pour décrire la trajectoire. La courbe C_{M/R_0} qui décrit la trajectoire dans un repère cartésien est donc de la forme :

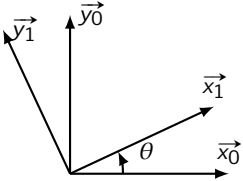
$$\mathrm{C}_{M/R_0} = \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

avec $f_1(t)$, $f_2(t)$ et $f_3(t)$ trois fonction de la variable t. Pour la suite ces trois fonctions seront nommées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
Pour déterminer l'équation paramétrique de la trajectoire d'un point, on écrira les projections dans le référentiel d'étude de $\overrightarrow{OM}$.

Trajectoire et vitesse d'un point matériel

Trajectoire valve

On se propose de déterminer l'équation de la trajectoire de la valve de la roue de vélo



Trajectoire et vitesse d'un point matériel

Trajectoire valve

On pose :
Le repère $R_0 = (O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est lié au sol.
Le repère $R_1 = (O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ est lié à la roue avec O_1 confondu avec l'axe de rotation de la roue par rapport au cadre. On suppose que la roue reste dans le plan vertical donc $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$.
On note $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$ l'angle orienté de $\overrightarrow{x_0}$ vers $\overrightarrow{x_1}$.
Cet angle est proportionnel à la vitesse angulaire de la roue $\theta = \omega \cdot t$.
Le point V associé à la valve est défini par :
$\overrightarrow{O_1 V} = R_v \cdot \overrightarrow{x_1}$.
Le vélo se déplace à la vitesse $v(t)$ suivant $\overrightarrow{x_0}$, la roue ne patine pas, elle roule sans glisser, on a donc $v = -R \cdot \omega$. Pour la suite nous supposerons que la vitesse est constante : $v(t) = v$.
La position du centre de la roue (O_1) par rapport au sol est donc définie par :
$\overrightarrow{O_0 O_1} = v \cdot t \cdot \overrightarrow{x_0} + R \cdot \overrightarrow{y_0}$.
La position de la valve (V) par rapport au sol est définie par :
$\overrightarrow{O_0 V} = v \cdot t \cdot \overrightarrow{x_0} + R \cdot \overrightarrow{y_0} + R_v \cdot \overrightarrow{x_1}$.

Trajectoire et vitesse d'un point matériel

Vitesse et accélération

On note $\overrightarrow{V_{M/R_0}}$ le vecteur vitesse de M par rapport à R_0. Par définition :

$$\overrightarrow{V_{M/R_0}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{O_0M}\right]_{B_0} \tag{1}$$

Avec O_0 origine du repère R_0 et B_0 base de R_0
Le vecteur vitesse d'un point M dans une base donnée correspond à la dérivée de ce vecteur dans cette base.
On appelle B_0 la base de dérivation, il ne faut pas confondre cette base avec la base de projection.
Le vecteur vitesse est tangent en M à la trajectoire.

Trajectoire et vitesse d'un point matériel

Vitesse et accélération

on note $\overrightarrow{\Gamma_{M/R_0}}$ le vecteur accélération de M par rapport à R_0 Par définition :

$$\overrightarrow{\Gamma_{M/R_0}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_{M/R_0}}\right]_{B_0} = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\overrightarrow{O_0M}\right]_{B_0}$$

Le vecteur accélération du point M dans son mouvement par rapport au repère R_0, correspond à la dérivée du vecteur vitesse de ce point dans cette base.
Nous verrons dans le chapitre suivant comment calculer ces dérivées vectorielles.
Remarque importante : ces grandeurs dépendent du repère (de la base) par rapport auquel on étudie le mouvement.

Trajectoire et vitesse d'un point matériel

Vecteur rotation

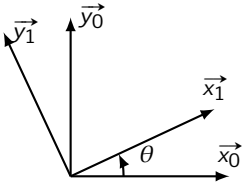
De la même manière que l'on définit le vecteur vitesse d'un point, on définit le vecteur vitesse de rotation d'un repère par rapport à un autre.
On note

$$\overrightarrow{\Omega_{R_1/R0}}$$

le vecteur vitesse de rotation du repère R_1 par rapport au repère R_0.

Cas d'une rotation autour d'un axe

Soit le repère R_1 en mouvement de rotation autour de l'axe $(O_0, \vec{z})$ par rapport au repère R_0, avec $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_1}) = (\vec{y_0}, \vec{y_1})$.
Le vecteur rotation est porté par le vecteur perpendiculaire au plan de la rotation (ici $\vec{z_0} = \vec{z_1}$) et sa mesure algébrique est la dérivée temporelle du paramètre angulaire de mouvement entre les deux repères.



$$\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{dt}} \cdot \vec{z_0} = \dot{\theta} \cdot \vec{z_0}$$

Trajectoire et vitesse d'un point matériel

Vecteur rotation

Dans le cas général, le mouvement de rotation du repère R_1 par rapport au repère R_0 est constitué de plusieurs rotations élémentaires d'angle θ_i autour de l'axe $(O_i, \vec{e_i})$. Alors :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = \sum_0^n \frac{\mathrm{d}\,\theta_i}{\mathrm{dt}} \cdot \vec{e_i} = \sum_0^n \dot{\theta}_i \cdot \vec{e_i}$$

Le vecteur vitesse de rotation se construit comme la somme des vecteurs vitesses des rotations élémentaires.

Trajectoire et vitesse d'un point matériel

Exemple

Vitesse et accélération de la valve

Q6. Déterminer la vitesse de la valve de la roue arrière par rapport au sol le vélo se déplaçant en translation suivant $(O, \overrightarrow{x_0})$, le cadre restant dans le plan vertical.
Q7. Déterminer la vitesse de la valve de la roue arrière par rapport au sol le vélo se déplaçant suivant une trajectoire circulaire de centre d'axe $(O_0, \overrightarrow{y_0})$, le cadre restant dans le plan vertical.
Q8. Déterminer le vecteur rotation de la roue arrière par rapport au sol.

Compléments mathématiques

Produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

avec

- $(\vec{u}, \vec{v})$: l'angle orienté de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont définis dans la base B :

$$\vec{u} = x_u \cdot \vec{x} + y_u \cdot \vec{y} + z_u \cdot \vec{z}$$
$$\vec{v} = x_v \cdot \vec{x} + y_v \cdot \vec{y} + z_v \cdot \vec{z}$$

alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$$

Compléments mathématiques

Produit vectoriel

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

avec

- $(\vec{u}, \vec{v})$: l'angle orienté de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$
- $\vec{w}$: le vecteur unitaire perpendiculaire aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme un trièdre direct (figure 2(d)).

Compléments mathématiques

Produit vectoriel

Soit $B = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base orthonormée directe alors :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$$
$$\vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x}$$
$$\vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y}$$

$$\vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z}$$
$$\vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x}$$
$$\vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y}$$

Compléments mathématiques

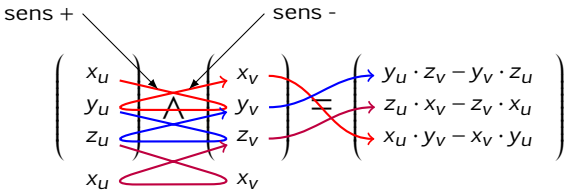
Produit vectoriel

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont définis dans la même base B :

$$\vec{u} = x_u \cdot \vec{x} + y_u \cdot \vec{y} + z_u \cdot \vec{z}$$
$$\vec{v} = x_v \cdot \vec{x} + y_v \cdot \vec{y} + z_v \cdot \vec{z}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{matrix} +(y_u \cdot z_v - y_v \cdot z_u) \cdot \vec{x} \\ +(z_u \cdot x_v - z_v \cdot x_u) \cdot \vec{y} \\ +(x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u) \cdot \vec{z} \end{matrix}$$

On utilisera la petite figure mnémotechnique ci-dessous pour mémoriser le produit vectoriel.



Compléments mathématiques

Produit vectoriel

- Distributivité :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \tag{2}$$

- Linéarité

$$\lambda \cdot \vec{u} \wedge \mu \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \mu \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

- anti-symétrie :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{w}$$

Attention : Le produit vectoriel est anti-symétrique.

Compléments mathématiques

Produit mixte

Le produit mixte est la quantité scalaire notée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et définie par

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Le produit mixte se conserve par permutation circulaire

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{v}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

Le produit mixte se calcule comme de la matrice constitué des 3 vecteurs en colonne0

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Compléments mathématiques

Dérivation vectorielle

Dérivation vectorielle d'une somme de vecteurs Si a et b sont deux fonctions scalaires et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}\right]_B = \frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u} + a \cdot \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{u}\right]_B + \frac{\mathrm{d}\,b}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} + b \cdot \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{v}\right]_B$$

dérivation d'un vecteur de la base de dérivation Si $\vec{u_0} = a_0 \cdot \vec{x_0} + b_0 \cdot \vec{y_0} + c_0 \cdot \vec{z_0}$ est un vecteur dont les coordonnées (a_0, b_0, c_0) dans de la base $B_0 = (\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ sont constantes alors :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{u_0}\right]_{B_0} = \vec{0}$$

La dérivée d'un vecteur constant d'une base dans sa base d'écriture est nulle.

Pour les vecteurs il est obligatoire de toujours préciser la basse de dérivation.

Il ne faut pas confondre la base de dérivation et la base de projection (d'écriture) du vecteur. Il n'est pas nécessaire de projeter un vecteur pour le dériver.

Compléments mathématiques

Dérivation vectorielle

Dérivation d'un vecteur quelconque Il est toujours possible de projeter le vecteur quelconque dans la base de dérivation et utiliser les propriétés ci-dessus pour n'avoir à dériver que les coordonnées, mais souvent cela n'est pas recommandé. Dans le cas général :

Soit $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur défini dans la base B_1, et B_0 la base de dérivation alors

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{u_1}\right]_{B_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{u_1}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{u_1}$$

avec $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}$ le vecteur rotation du repère R_1 par rapport au repère R_0

La quantité $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{u_1}$ est le **produit vectoriel** du vecteur $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}$ et du vecteur $\overrightarrow{u_1}$.

Compléments mathématiques

Dérivation vectorielle

Dérivation d'un vecteur de base Soit $\overrightarrow{u_1}$, un vecteur constant de la base de la base $B_1 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$. Soit $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur défini dans la base B_1, et B_0 la base de dérivation alors

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{u_1}\right]_{B_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{u_1}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{u_1}$$

Or $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{u_1}\right]_{B_1} = \overrightarrow{0}$ (vecteur constant) on déduit :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{u_1}\right]_{B_0} = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{u_1}$$

Le vecteur dérivé d'un vecteur constant dans une base B_1 est un vecteur orthogonal à ce vecteur.

Exercices

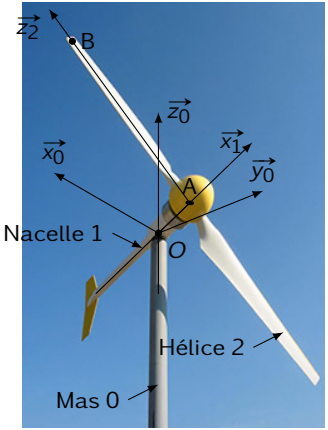
Valve de roue

Vitesse et accélération de la valve

Après cet intermède mathématique, reprenons la détermination de la vitesse du point V de la valve par rapport au sol (R_0).
Q9. Déterminer la vitesse de la valve et son accélération par rapport au repère R_0 sans projeter le vecteur dans la base B_0.

Exercices

Éolienne



Soit l'éolienne de la figure ci-contre : La nacelle (1) pivote autour du mas (0) suivant l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$. On note $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$ le paramètre de rotation. L'hélice (2) pivote autour de l'axe $(A, \overrightarrow{x_1})$. On note $\beta = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_1})$ le paramètre de rotation.

- $\overrightarrow{OA} = a \cdot \overrightarrow{x_1}$
- B le point à l'extrémité de la pale $\overrightarrow{AB} = b \cdot \overrightarrow{z_2}$ avec $b = 2{,}3\,\mathrm{m}$.

Q1. Tracer les figures de changement de base
Q2. Déterminer la vitesse et l'accélération du point A et du point B par rapport au repère R_0
Q3. la vitesse maximale admissible au bout de la pale est $V_{max} = 70\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, en déduire $\omega_{21} = \dfrac{\mathrm{d}\,\beta(t)}{\mathrm{dt}}$ pour θ constant.