

## Système du second ordre $a > 1$ Recherche de la réponse à un échelon unitaire.

*Michel Huguet*

### Préambule :

La forme canonique d'un système du second ordre est de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

Le système étant sollicité par un échelon unitaire de type  $e(t) = 1 \cdot u(t)$ , l'image de cette entrée dans le domaine de Laplace est notée  $E(p)$  et vaut :  $E(p) = \frac{1}{p}$ . L'image de la réponse du système

notée  $S(p)$  vaut alors :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

$$S(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p}$$

### 1) Décomposition de $S(p)$ en éléments simples :

1.1) Recherche des racines de  $1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2 = 0$ . Pour  $a > 1$  on trouve deux racines réelles :

$$p_1 = -a \cdot \omega_n - \omega_n \cdot \sqrt{a^2 - 1}$$

$$p_2 = -a \cdot \omega_n + \omega_n \cdot \sqrt{a^2 - 1}$$

Une fois factorisée l'équation se met sous la forme :  $\frac{1}{\omega_n^2} \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) = 0$

Donc  $S(p)$  peut se mettre sous la forme :

$$S(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2)} \cdot \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad S(p) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2)}$$

En posant :  $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$  et  $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$   $S(p)$  s'écrit :

$$S(p) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p \cdot \left(-\frac{p}{p_1} + 1\right) \cdot \left(-\frac{p}{p_2} + 1\right)}$$

or le produit  $p_1 \cdot p_2 = \omega_n^2$ , donc  $S(p)$  prend la forme « habituelle » :

$$S(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \quad \text{ou} \quad \tau_1 \text{ et } \tau_2 \text{ sont appelées constantes de temps du système.}$$

### 1.2) Recherche des coefficients :

$$S(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau_1 \cdot p} + \frac{C}{1 + \tau_2 \cdot p}$$



\*Recherche de A : On forme  $p \cdot S(p)$  et on pose  $p=0$

$$p \cdot S(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \text{ et en posant } p=0 \text{ on obtient} \quad A = K$$

\* Recherche de B : On forme  $(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot S(p)$  et on pose  $p = -\frac{1}{\tau_1}$

$$(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot S(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \text{ et en posant } p = -\frac{1}{\tau_1} \text{ on obtient :}$$

$$B = \frac{K}{-\frac{1}{\tau_1} \cdot \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right)} \Rightarrow B = \frac{K}{-\frac{1}{\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1^2}} \text{ Finalement on obtient} \quad B = \frac{K \cdot \tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}$$

\* Recherche de C : On forme  $(1 + \tau_2 \cdot p) \cdot S(p)$  et on pose  $p = -\frac{1}{\tau_2}$

De la même manière on obtient :

$$C = \frac{K \cdot \tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2}$$

Finalement il vient :

$$S(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

$$S(p) = K \left( \frac{1}{p} + \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot p} + \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 \cdot p} \right)$$

$$S(p) = K \left( \frac{1}{p} + \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau_1} + p} + \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau_2} + p} \right)$$

$$S(p) = K \left( \frac{1}{p} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau_1} + p} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau_2} + p} \right)$$

## 2) Transformation inverse :

La transformation inverse de  $S(p)$  donne  $s(t)$  qui est égale à :

$$s(t) = K \cdot \left( 1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

$$s(t) = K \cdot \left( 1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \tau_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right)$$

