Système du second ordre
a=1
Recherche de la réponse à un échelon unitaire.

Michel Huguet

Préambule :

La forme canonique d'un système du second ordre est de la forme :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2\cdot a}{\omega_n}\cdot p+\frac{1}{\omega_n^2}\cdot p^2}$$

Le système étant sollicité par un échelon unitaire de type $e(t)=1\cdot u(t)$, l'image de cette entrée dans le domaine de Laplace est notée E(p) et vaut : $E(p)=\frac{1}{p}$. L'image de la réponse du système notée S(p) vaut alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} S(p)=H(p)\cdot E(p) \\ S(p)=\frac{K}{1+\frac{2\cdot a}{\omega_n}\cdot p+\frac{1}{\omega_n^2}\cdot p^2}\cdot\frac{1}{p}\end{array}}$$

1) Décomposition de S(p) en éléments simples :

1.1)Recherche des racines de $1+\frac{2\cdot a}{\omega_n}\cdot p+\frac{1}{\omega_n^2}\cdot p^2=0$. Pour a=1 on trouve une racine double :

$$p_1=-a\cdot\omega_n$$

et comme a = 1 alors : $p_1=-\omega_n$

Une fois factorisée l'équation se met sous la forme : $\frac{1}{\omega_n^2}\cdot(p-p_1)^2=0$

Donc S(p) peut se mettre sous la forme :

$$S(p)=\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}\cdot(p-p_1)^2}\cdot\frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad S(p)=\frac{K\cdot\omega_n^2}{p\cdot(p-p_1)^2}$$

En posant : $\tau=-\frac{1}{p_1}$ S(p) s'écrit :

$$S(p)=\frac{\frac{K\cdot\omega_n^2}{p_1^2}}{p\cdot(-\frac{p}{p_1}+1)^2}$$

or $p_1^2=\omega_n^2$, donc S(p) prend la forme « habituelle » :

$$\boxed{S(p)=\frac{K}{p\cdot(1+\tau\cdot p)^2}}$$ où τ est appelée constante de temps du système.

1.2) Recherche des coefficients :

$$S(p)=\frac{K}{p\cdot(1+\tau\cdot p)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{1+\tau\cdot p}+\frac{C}{(1+\tau\cdot p)^2}$$

*<u>Recherche de A</u> : On forme $p \cdot S(p)$ puis on pose p=0

$$p \cdot S(p) = \frac{K}{(1+\tau \cdot p)^2}$$ et en posant p=0

<u>On obtient A = K</u>

* <u>Recherche de C</u> : On forme $(1+\tau \cdot p)^2 \cdot S(p)$ et on pose $p = -\frac{1}{\tau}$

$$(1+\tau \cdot p)^2 \cdot S(p) = \frac{K}{p}$$ et en posant $p = -\frac{1}{\tau}$ on obtient : $C = \frac{K}{-\frac{1}{\tau}}$

<u>Finalement on obtient</u> $\underline{C = -K \cdot \tau}$

* <u>Recherche de B</u> :

On remplace, dans la décomposition de S(p), A et C par leurs valeurs, ce qui donne :

$$S(p) = \frac{K}{p \cdot (1+\tau \cdot p)^2} = \frac{K}{p} + \frac{B}{1+\tau \cdot p} - \frac{K \cdot \tau}{(1+\tau \cdot p)^2}$$

Puis on pose, par exemple, p=1 :

$$S(1) = \frac{K}{(1+\tau)^2} = K + \frac{B}{1+\tau} - \frac{K \cdot \tau}{(1+\tau)^2}$$

<u>Finalement on obtient :</u> $\underline{B = -K \cdot \tau}$

Globalement S(p) se décompose donc de la manière suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} S(p) &= \frac{K}{p \cdot (1+\tau \cdot p)^2} \\ S(p) &= K\left(\frac{1}{p} - \tau \cdot \frac{1}{1+\tau \cdot p} - \tau \cdot \frac{1}{(1+\tau \cdot p)^2}\right) \\ S(p) &= K\left(\frac{1}{p} - \tau \cdot \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau}+p} - \tau \cdot \frac{\frac{1}{\tau^2}}{\left(\frac{1}{\tau}+p\right)^2}\right) \\ S(p) &= K\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p} - \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau}+p\right)^2}\right) \end{aligned}}$$

<u>2) Transformation inverse :</u>

La transformation inverse de S(p) donne s(t) qui est égale à :

$$\boxed{s(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

<u>Nota</u> : $L^{-1}\left(\frac{1}{(p+a)^2}\right) = t \cdot e^{-a \cdot t}$