Cor. 3 : Étude d'une voiture en virage

Sujet page 27

Q1. Justifier le tracé de la vitesse du point H du véhicule par rapport au sol $\overrightarrow{V_{H\in 1/0}}$ puis la déterminer.

O est le centre de la rotation, c'est le centre instantané de la rotation du véhicule par rapport au sol, alors $\overrightarrow{V_{H\in 1/0}} \perp \overrightarrow{OH}$.

$$\overrightarrow{V_{H\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OH}$$
$$\overrightarrow{V_{H\in 1/0}} = \vec{0} + \omega_{10}\cdot\vec{z_1} \wedge -R\cdot\vec{x_1}$$
$$\overrightarrow{V_{H\in 1/0}} = -\omega_{10}\cdot R\cdot\vec{y_1}$$

Remarque : sur le schéma $\omega_{10} < 0$

Q2. Déterminer le torseur cinématique du véhicule par rapport au sol $\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}$ en H. En déduire $\overrightarrow{V_{O_2\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_3\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_5\in 1/0}}$. Montrez que les deux dernières vitesses s'écrivent $\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}} = \ell_4\cdot\vec{y_4}$ et $\overrightarrow{V_{O_5\in 1/0}} = \ell_5\cdot\vec{y_5}$.

On a

$$\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \omega_{10}\cdot\vec{z_0}\\ \overrightarrow{V_{H\in 1/0}} = -\omega_{10}\cdot R\cdot\vec{y_1}\end{array}\right\}_H$$

$$\overrightarrow{V_{O_2\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{H\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{HO_2}$$
$$\overrightarrow{V_{O_2\in 1/0}} = -\omega_{10}\cdot R\cdot\vec{y_1} + \omega_{10}\cdot\vec{z_1} \wedge \frac{b}{2}\cdot\vec{x_1}$$
$$\overrightarrow{V_{O_2\in 1/0}} = -\left(R-\frac{b}{2}\right)\cdot\omega_{10}\cdot\vec{y_1}$$

de même

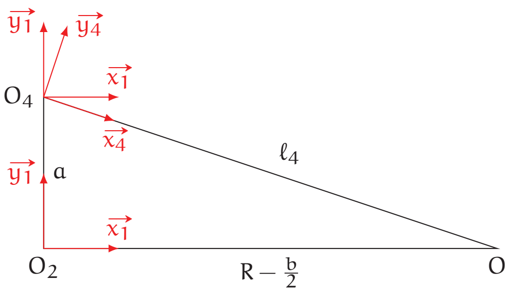
$$\overrightarrow{V_{O_3\in 1/0}} = -\left(R+\frac{b}{2}\right)\cdot\omega_{10}\cdot\vec{y_1}$$

$$\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{H\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{HO_4}$$
$$\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}} = -\omega_{10}\cdot R\cdot\vec{y_1} + \omega_{10}\cdot\vec{z_1} \wedge \left(\frac{b}{2}\cdot\vec{x_1} + a\cdot\vec{y_1}\right)$$
$$\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}} = -\left(R-\frac{b}{2}\right)\cdot\omega_{10}\cdot\vec{y_1} - a\cdot\omega_{10}\cdot\vec{x_1}$$

de même

$$\overrightarrow{V_{O_5\in 1/0}} = -\left(R+\frac{b}{2}\right)\cdot\omega_{10}\cdot\vec{y_1} - a\cdot\omega_{10}\cdot\vec{x_1}$$

Montrons que ces vitesses sont portés par $\vec{y_4}$ et $\vec{y_5}$.
Traçons le triangle (O, O_2, O_4).



On a $\overrightarrow{O_4O} = \ell_4\cdot\vec{x_4} = -a\cdot\vec{y_1} + (R-\frac{b}{2})\cdot\vec{x_1}$, on en déduit :
$\ell_4 = \sqrt{a^2 + (R-\frac{b}{2})^2}$ et de même $\ell_5 = \sqrt{a^2 + (R+\frac{b}{2})^2}$

Reprenons le calcul de $\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}}$ en passant par le point O.

$$\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OO_4}$$
$$\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}} = \vec{0} + \omega_{10}\cdot\vec{z_0} \wedge -\ell_4\cdot\vec{x_4}$$
$$\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}} = \ell_4\cdot\omega_{10}\cdot\vec{y_4}$$

La vitesse est bien portée par $\vec{y_4}$.

Q3. Tracer à l'échelle $\overrightarrow{V_{O_2\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_3\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_5\in 1/0}}$ sur le schéma.

On sait que la vitesse est proportionnelle à la distance au centre instantané de rotation O et perpendiculaire au rayon OO_i.

Pour $\overrightarrow{V_{O_2\in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{O_3\in 1/0}}$, les quatre points O, H, O_2 et O_3 étant alignées, connaissant $\overrightarrow{V_{H\in 1.0}}$ il suffit d'utiliser la représentation graphique du théorème de Thalès en traçant la droite passant par O et l'extrémité du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{H\in 1/0}}$ (voir figure 7.28).

Pour $\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{O_5\in 1/0}}$, on commence par tracer, le cercle de centre O passant par H, puis à l'intersection du cercle et de la droite (OO_4) (respectivement (OO_5)) on trace la vitesse en ce point (la norme est identique à celle de $\overrightarrow{V_{H\in 1/0}}$ et la direction perpendiculaire au rayon). On trace ensuite $\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}}$ (respectivement $\overrightarrow{V_{O_5\in 1/0}}$) à partir de Thalès.

Q4. Donner les torseurs de chaque roue par rapport au véhicule puis par rapport au sol.

Pour les roues arrière (2) et (3) :

$$\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \omega_{21}\cdot\vec{x_1}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_{O_2}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{3/1}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \omega_{31}\cdot\vec{x_1}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_{O_3}$$

Pour les roues avant : on pose $\vec{x_4} = \dfrac{\overrightarrow{O_4O}}{\left\|\overrightarrow{O_4O}\right\|}$ et $\vec{y_4} = \vec{z_0} \wedge \vec{x_4}$ le repère associé à la roue (4) (respectivement $\vec{x_5} = \dfrac{\overrightarrow{O_5O}}{\left\|\overrightarrow{O_5O}\right\|}$ et $\vec{y_5} = \vec{z_0} \wedge \vec{x_5}$). On peut écrire alors :

$$\left\{\mathcal{V}_{4/1}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega_{4/1}} = \omega_{41}\cdot\vec{x_4}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_{O_4}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{5/1}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega_{5/1}} = \omega_{51}\cdot\vec{x_5}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_{O_5}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{2/0}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}$$
$$\left\{\mathcal{V}_{3/0}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{3/1}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}$$
$$\left\{\mathcal{V}_{4/0}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{4/1}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}$$
$$\left\{\mathcal{V}_{5/0}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{5/1}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}$$

On écrit chaque torseur au centre de la roue :

$$\left\{\mathcal{V}_{2/0}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \omega_{21}\cdot\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_2} + \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \omega_{10}\cdot\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{O_2\in 1/0}}\end{array}\right\}_{O_2}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{3/0}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \omega_{31}\cdot\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_3} + \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \omega_{10}\cdot\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{O_3\in 1/0}}\end{array}\right\}_{O_3}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{4/0}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{4/1}} = \omega_{41}\cdot\overrightarrow{x_4} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_4} + \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \omega_{10}\cdot\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}}\end{array}\right\}_{O_4}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{5/0}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{5/1}} = \omega_{51}\cdot\overrightarrow{x_5} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_5} + \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \omega_{10}\cdot\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{O_5\in 1/0}}\end{array}\right\}_{O_5}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{2/0}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \omega_{21}\cdot\overrightarrow{x_1} + \omega_{10}\cdot\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{O_2\in 1/0}} = -\left(R - \dfrac{b}{2}\right)\cdot\omega_{10}\cdot\overrightarrow{y_1}\end{array}\right\}_{O_2}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{3/0}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \omega_{31}\cdot\overrightarrow{x_1} + \omega_{10}\cdot\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{O_3\in 1/0}} = -\left(R + \dfrac{b}{2}\right)\cdot\omega_{10}\cdot\overrightarrow{y_1}\end{array}\right\}_{O_3}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{4/0}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{4/1}} = \omega_{41}\cdot\overrightarrow{x_4} + \omega_{10}\cdot\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}} = -\ell_4\cdot\omega_{10}\cdot\overrightarrow{y_4}\end{array}\right\}_{O_4}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{5/0}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{5/1}} = \omega_{51}\cdot\overrightarrow{x_5} + \omega_{10}\cdot\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{O_5\in 1/0}} = -\ell_5\cdot\omega_{10}\cdot\overrightarrow{y_5}\end{array}\right\}_{O_5}$$

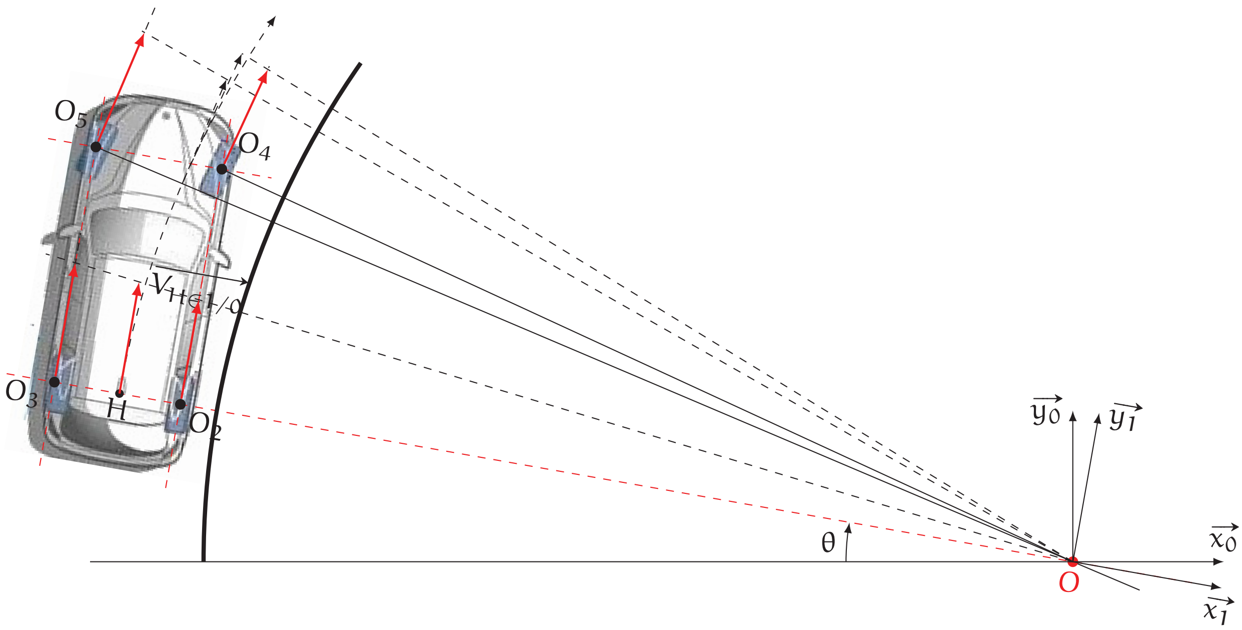


FIGURE 7.28 – Corrigé

Q5. Déterminer $\overrightarrow{V_{I_2\in 2/0}}$, $\overrightarrow{V_{I_3\in 3/0}}$, $\overrightarrow{V_{I_4\in 4/0}}$ et $\overrightarrow{V_{I_5\in 2/0}}$.

$$\overrightarrow{V_{I_2\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{O_2\in 2/0}} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{O_2 I_2}$$
$$\overrightarrow{V_{I_2\in 2/0}} = -\left(R - \frac{b}{2}\right)\cdot\omega_{10}\cdot\overrightarrow{y_1} + (\omega_{21}\cdot\overrightarrow{x_1} + \omega_{10}\cdot\overrightarrow{z_0}) \wedge (-r\cdot\overrightarrow{z_0})$$
$$\overrightarrow{V_{I_2\in 2/0}} = \left(-\left(R - \frac{b}{2}\right)\cdot\omega_{10} + r\cdot\omega_{21}\right)\cdot\overrightarrow{y_1}$$

par analogie pour la roue arrière gauche

$$\overrightarrow{V_{I_3\in 3/0}} = \left(-\left(R + \frac{b}{2}\right)\cdot\omega_{10} + r\cdot\omega_{31}\right)\cdot\overrightarrow{y_1}$$

$$\overrightarrow{V_{I_4\in 4/0}} = \overrightarrow{V_{O_4\in 4/0}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \wedge \overrightarrow{O_4 I_4}$$
$$\overrightarrow{V_{I_4\in 4/0}} = -\ell_4\cdot\overrightarrow{y_4} + (\omega_{41}\cdot\overrightarrow{x_4} + \omega_{10}\cdot\overrightarrow{z_0}) \wedge (-r\cdot\overrightarrow{z_0})$$
$$\overrightarrow{V_{I_4\in 4/0}} = (-\ell_4\cdot\omega_{10} + r\cdot\omega_{41})\cdot\overrightarrow{y_4}$$

par analogie pour la roue avant gauche

$$\overrightarrow{V_{I_5\in 5/0}} = (-\ell_5\cdot\omega_{10} + r\cdot\omega_{51})\cdot\overrightarrow{y_5}$$

Q6. Rappeler les conditions de non-glissement en I_2, I_3, I_4 et I_5 en déduire ω_{21}, ω_{31}, ω_{41} et ω_{51}.

On doit avoir : $\overrightarrow{V_{I_2\in 2/0}} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{V_{I_3\in 3/0}} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{V_{I_4\in 4/0}} = \overrightarrow{0}$,

$\overrightarrow{V_{I_5\in 5/0}} = \vec{0}$, d'où :

$$\left(-\left(R-\frac{b}{2}\right)\cdot\omega_{10}+r\cdot\omega_{21}\right)\cdot\overrightarrow{y_1}=\vec{0}\Rightarrow\omega_{21}=\frac{R-\frac{b}{2}}{r}\cdot\omega_{10}$$

$$\left(-\left(R+\frac{b}{2}\right)\cdot\omega_{10}+r\cdot\omega_{31}\right)\cdot\overrightarrow{y_1}=\vec{0}\Rightarrow\omega_{31}=\frac{R+\frac{b}{2}}{r}\cdot\omega_{10}$$

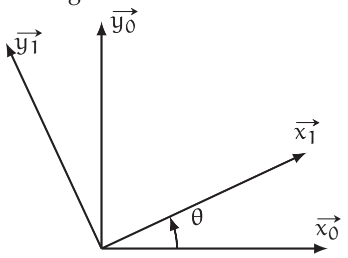
$$(-\ell_4\cdot\omega_{10}+r\cdot\omega_{41})\cdot\overrightarrow{y_4}=\vec{0}\Rightarrow\omega_{41}=\frac{\ell_4}{r}\cdot\omega_{10}$$

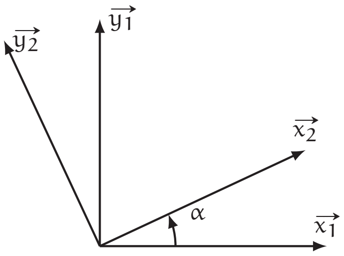
$$(-\ell_5\cdot\omega_{10}+r\cdot\omega_{51})\cdot\overrightarrow{y_5}=\vec{0}\Rightarrow\omega_{51}=\frac{\ell_5}{r}\cdot\omega_{10}$$

Cor. 4 : Manege Pieuvre

Sujet page 28

Q1. Tracer les figures de changement de base.





Q2. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

$$\overrightarrow{OB} = R_1 \cdot \overrightarrow{x_1} + R_2 \cdot \overrightarrow{x_2}$$

Q3. Déterminer les vitesses : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{B\in 2/1}}$ puis $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}$ sous la forme la plus concise possible en fonction de ω_{10}, ω_{21} , R_1 et R_2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} &= R_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_1}\\ \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} &= R_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_2}\end{aligned}$$

On peut déterminer $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}$ soit à partir de la composition des vitesses et la relation de Varignon :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} &= \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}\\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} &= R_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_2} + \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} &= R_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_2} + R_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_1} + \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge R_2 \cdot \overrightarrow{x_2}\\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} &= R_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_1} + R_2 \cdot \left(\dot{\theta} + \dot{\alpha}\right) \cdot \overrightarrow{y_2}\end{aligned}$$

soit par la dérivation vectorielle :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} &= \left[\frac{d}{dt} R_1 \cdot \overrightarrow{x_1} + R_2 \cdot \overrightarrow{x_2}\right]_0\\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} &= \left[\frac{d}{dt} R_1 \cdot \overrightarrow{x_1}\right]_0 + \left[\frac{d}{dt} R_2 \cdot \overrightarrow{x_2}\right]_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} &= R_1 \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{x_1} + R_2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{x_2}\\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} &= R_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} + R_2 \cdot \left(\dot{\theta} + \dot{\alpha}\right) \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_2}\\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} &= R_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_1} + R_2 \cdot \left(\dot{\theta} + \dot{\alpha}\right) \cdot \overrightarrow{y_2}\end{aligned}$$

soit :

$$\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = R_1 \cdot \omega_{10} \cdot \overrightarrow{y_1} + R_2 \cdot (\omega_{10} + \omega_{21}) \cdot \overrightarrow{y_2}$$

avec $\omega_{21} = -2 \cdot \omega_{10}$.

$$\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = R_1 \cdot \omega_{10} \cdot \overrightarrow{y_1} - R_2 \cdot \omega_{10} \cdot \overrightarrow{y_2}$$

Q4. Pour quelle valeur de α, $\|\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}\|$ la vitesse est-elle maximale ? Préciser alors l'expression littérale de $V_{max} = \|\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}\|_{maxi}$.

Déterminons le module

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}^2 &= (R_1 \cdot \omega_{10} \cdot \overrightarrow{y_1} - R_2 \cdot \omega_{10} \cdot \overrightarrow{y_2})^2\\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}}^2 &= R_1^2 \cdot \omega_{10}^2 - 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \omega_{10}^2 \cdot \overrightarrow{y_2} \cdot \overrightarrow{y_1} + R_2^2 \cdot \omega_{10}^2\\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}}^2 &= \left(R_1^2 - 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos(\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{y_1}) + R_2^2\right) \cdot \omega_{10}^2\\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}}^2 &= \left(R_1^2 - 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos(\theta + \alpha) + R_2^2\right) \cdot \omega_{10}^2\end{aligned}$$

de $\omega_{21} = -2 \cdot \omega_{10}$ et compte tenu des conditions initiales on déduit

$$\alpha = -2 \cdot \theta$$

$$\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}^2 = \left(R_1^2 - 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos(-\theta) + R_2^2\right) \cdot \omega_{10}^2$$

La vitesse présente un extrémum lorsque la dérivée s'annule mais il n'est pas nécessaire ici de calculer la dérivée, la norme est ici la somme de deux termes toujours positifs et constants, il suffit donc que $-2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos(\theta)$ soit maximal. Soit ici pour $\alpha = \pi \pmod{2 \cdot \pi}$

pour $\theta = 0 \pmod{2 \cdot \pi}$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}\|_{min} &= \sqrt{\left(R_1^2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 + R_2^2\right)} \cdot \omega_{10}\\ &= \sqrt{(R_1 + R_2)^2} \cdot \omega_{10}\\ &= (R_1 + R_2) \cdot \omega_{10}\end{aligned}$$

Q5. Déterminer, $\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}$, l'accélération du point B par rapport au repère $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ pendant la phase de régime permanent de la manière la plus succincte possible.

En régime permanent ω_{10} est constant :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}} &= \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}\right]_0\\ &= R_1 \cdot \omega_{10} \cdot \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{y_1}\right]_0 - R_2 \cdot \omega_{10} \cdot \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{y_2}\right]_0\\ &= R_1 \cdot \omega_{10} \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{y_1} - R_2 \cdot \omega_{10} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{y_2}\\ &= -R_1 \cdot \omega_{10}^2 \cdot \overrightarrow{x_1} - R_2 \cdot \omega_{10}^2 \cdot \overrightarrow{x_2}\end{aligned}$$

avec $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \left(\dot{\alpha} + \dot{\theta}\right) \cdot \overrightarrow{z_0} = -\omega_{10} \cdot \overrightarrow{z_0}$

Q6. Pour quelle valeur de α,

Q6a. l'accélération $\|\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}\|$ est-elle maximale ? Préciser alors l'expression littérale.

Q6b. l'accélération $\|\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}\|$ est-elle minimale ? Préciser alors l'expression littérale

Déterminons le module de l'accélération

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}^2 = \left(-R_1 \cdot \omega_{10}^2 \cdot \overrightarrow{x_1} - R_2 \cdot \omega_{10}^2 \cdot \overrightarrow{x_2}\right)^2$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}^2 = \left(R_1^2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos(\theta + \alpha) + R_2^2\right)^2 \cdot \omega_{10}^4$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}^2 = \left(R_1^2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos(-\theta) + R_2^2\right)^2 \cdot \omega_{10}^4$$

Comme pour la vitesse, il suffit d'étudier $+2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos(\theta)$

— Accélération maximale pour $\theta = 0 \pmod{2 \cdot \pi}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}\| &= \sqrt{\left(R_1^2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 + R_2^2\right)^2} \cdot \omega_{10}^2 \\ &= (R_1 + R_2) \cdot \omega_{10}^2\end{aligned}$$

— Accélération minimale pour $\theta = \pi \pmod{2 \cdot \pi}$:

$$\|\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}\| = (R_1 - R_2) \cdot \omega_{10}^2$$

Q7. Déterminer alors les valeurs numériques de R_1, R_2 et ω_{10} qui permettent de respecter le cahier des charges.

$$\begin{cases}(R_1 + R_2) \cdot \omega_{10}^2 = 1{,}5 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \\ (R_1 - R_2) \cdot \omega_{10}^2 = 0{,}5 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \\ (R_1 + R_2) \cdot \omega_{10} = 11{,}1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\end{cases}$$

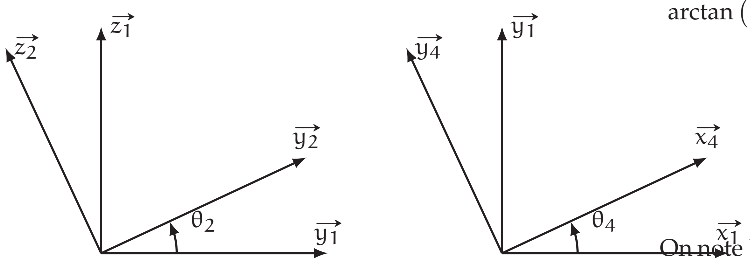
Ce qui donne :

$$\begin{cases}R_1 = 5{,}58\,\mathrm{m} \\ R_2 = 2{,}79\,\mathrm{m} \\ \omega_{10} = 1{,}32\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}\end{cases}$$

Cor. 5 : Ponceuse vibrante

Sujet page 30

Q1. Tracer les deux figures de calcul



Q2. Écrire la fermeture géométrique

$$\vec{AB}+\vec{BN}+\vec{NC}-\vec{AC}=\vec{0}$$
$$r\cdot\vec{z_2}+\mu\cdot\vec{z_1}+\lambda\cdot\vec{x_4}-d\cdot\vec{x_1}=\vec{0}$$
$$r\cdot\cos\theta_2\cdot\vec{z_1}-r\cdot\sin\theta_2\cdot\vec{y_1}+\mu\cdot\vec{z_1}+\lambda\cdot\cos\theta_4\cdot\vec{x_1}+\lambda\cdot\sin\theta_4\cdot\vec{y_1}-d\cdot\vec{x_1}=\vec{0}$$

soit en projection les trois equations scalaires :

$$\begin{cases}\lambda\cdot\cos\theta_4-d=0\\ -r\cdot\sin\theta_2+\lambda\cdot\sin\theta_4=0\\ r\cdot\cos\theta_2+\mu=0\end{cases}$$

Q3. Déterminer la relation entre θ_2 et θ_4 en fonction des différents paramètres.

À partir des deux premières équations :

$$\begin{cases}\lambda\cdot\cos\theta_4=d\\ \lambda\cdot\sin\theta_4=r\cdot\sin\theta_2\end{cases}\Rightarrow\tan\theta_4=\frac{r}{d}\cdot\sin\theta_2$$

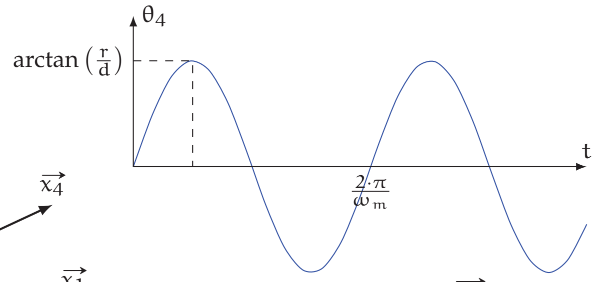
Q4. En déduire la relation entre $\dot\theta_2$ et $\dot\theta_4$ puis en fonction de ω_m.

On dérive cette relation

$$\left(1+\tan^2\theta_4\right)\cdot\dot\theta_4=\frac{r}{d}\cdot\cos\theta_2\cdot\dot\theta_2$$
$$\dot\theta_4=\frac{r}{d}\cdot\frac{\cos\theta_2}{1+\tan^2\theta_4}\cdot\dot\theta_2$$
$$\dot\theta_4=\frac{r}{d}\cdot\frac{\cos\theta_2}{1+\left(\frac{r}{d}\cdot\sin\theta_2\right)^2}\cdot\dot\theta_2$$
$$\dot\theta_4=\cdot\frac{r\cdot d\cdot\cos\theta_2}{d^2+r^2\cdot\sin^2\theta_2}\cdot\dot\theta_2$$
$$\dot\theta_4=\cdot\frac{r\cdot d\cdot\cos(\omega_m\cdot t)}{d^2+r^2\cdot\sin^2(\omega_m\cdot t)}\cdot\omega_m$$

Q5. Tracer l'allure de $\theta_4(t)$ pour ω_m constant

$$\theta_4(t)=\arctan\left(\frac{r}{d}\cdot\sin(\omega_m\cdot t)\right)$$



On note P le point extrême du plateau avec $\vec{CP}=-h\cdot\vec{z_1}+R\cdot\vec{x_4}$.

Q6. Déterminer $\vec{V_{P\in4/1}}$ en fonction de ω_m puis $\vec{\Gamma_{P\in4/1}}$.

$$\vec{V_{P\in4/1}}=\vec{V_{C\in4/1}}+\vec{\Omega_{4/1}}\wedge\vec{CP}$$
$$\vec{V_{P\in4/1}}=\vec{0}+\dot\theta_4\cdot\vec{z_1}\wedge(-h\cdot\vec{z_1}+R\cdot\vec{x_4})$$
$$\vec{V_{P\in4/1}}=R\cdot\dot\theta_4\cdot\vec{y_4}$$
$$\vec{V_{P\in4/1}}=R\cdot\frac{r\cdot d\cdot\cos(\omega_m\cdot t)}{d^2+r^2\cdot\sin^2(\omega_m\cdot t)}\cdot\omega_m\cdot\vec{y_4}$$

$$\vec{\Gamma_{P\in4/1}}=\left[\frac{d}{dt}\vec{V_{P\in4/1}}\right]_0=\left[\frac{d}{dt}R\cdot\dot\theta_4\cdot\vec{y_4}\right]_0$$
$$\vec{\Gamma_{P\in4/1}}=R\cdot\ddot\theta_4\cdot\vec{y_4}-R\cdot\dot\theta^2\cdot\vec{x_4}$$

Je vous laisse dériver !

On s'intéresse maintenant aux vitesses de glissement entre le bras et les deux solides

Q7. Déterminer $\vec{V_{B\in3/2}}$ et $\vec{V_{B\in3/4}}$.

La liaison entre les deux solides 3 et 2 permet à la fois une rotation d'axe $(B,\vec{x_1})$ et une translation suivant $\vec{x_1}$ d'où le torseur :

$$\left\{\mathcal{V}_{3/2}\right\}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega_{3/2}}=\theta_{32}\cdot\vec{x_1}\\ \vec{V_{B\in3/2}}=v_{32}\cdot\vec{x_1}\end{Bmatrix}_B.$$

La liaison entre les deux solides 3 et 4 permet à la fois une rotation d'axe $(B,\vec{z_1})$ et une translation suivant $\vec{z_1}$ d'où le torseur :

$$\left\{\mathcal{V}_{3/4}\right\}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega_{3/4}}=\theta_{34}\cdot\vec{z_1}\\ \vec{V_{B\in3/4}}=v_{34}\cdot\vec{z_1}\end{Bmatrix}_B.$$

$$\vec{V_{B\in3/2}}=\vec{V_{B\in3/1}}-\vec{V_{B\in2/1}}$$
$$\vec{V_{B\in3/2}}=\vec{V_{B\in3/4}}+\vec{V_{B\in4/1}}-\vec{V_{B\in2/1}}$$
$$v_{32}\cdot\vec{x_1}=v_{34}\cdot\vec{z_1}+\vec{V_{C\in4/1}}+\vec{\Omega_{4/1}}\wedge\vec{CB}-\vec{V_{A\in2/1}}-\vec{\Omega_{2/1}}\wedge\cdot\vec{AB}$$
$$v_{32}\cdot\vec{x_1}=v_{34}\cdot\vec{z_1}+\vec{0}+\dot\theta_4\cdot\vec{z_1}\wedge(-d\cdot\vec{x_1}+r\cdot\vec{z_2})-\vec{0}-\dot\theta_2\cdot\vec{x_1}\wedge\cdot r\cdot\vec{z_2}$$
$$v_{32}\cdot\vec{x_1}=v_{34}\cdot\vec{z_1}-d\dot\theta_4\cdot\vec{y_1}+r\cdot\dot\theta_4\cdot\sin\theta_2\cdot\vec{x_1}+r\cdot\dot\theta_2\cdot\vec{y_2}$$

On en déduit :

$$v_{32}=r\cdot\dot\theta_4\cdot\sin\theta_2$$
$$v_{34}=-r\cdot\dot\theta_2\cdot\vec{y_2}\cdot\vec{z_1}=-r\cdot\dot\theta_2\cdot\sin\theta_2$$