11.6 Corrigés n°11

Cor. 1 : Colonne de levage

Sujet page 10

Q1. Déterminer la résultante $\overrightarrow{R_{s\to C}}$ de l'action mécanique du sol sur la colonne, en fonction de q_1, q_2 et des dimensions.

On sait que $\overrightarrow{dR_{s\to C}} = q(y)\cdot ds\,\vec{z}$ avec $ds = dx\,dy$

avec $x \in [a-b, a]$ et $x \in [-a, -(a-b)]$ et $y \in [0, L]$ et $q(y) = \dfrac{q_2 - q_1}{L}\cdot y + q_1$

On calcule l'action du sol pour le pied avec $x > 0$, l'action du second est déterminée par analaogie.

$$\overrightarrow{R^1_{s\to C}} = \int_{x=a-b}^{a}\int_{Y=0}^{L} q(y)\cdot dx\,dy\,\vec{z}$$
$$\overrightarrow{R^1_{s\to C}} = \int_{x=a-b}^{a}\int_{Y=0}^{L} \left(\frac{q_2-q_1}{L}\cdot y + q_1\right) dx\,dy\,\vec{z}$$
$$\overrightarrow{R^1_{s\to C}} = b\cdot\left(\frac{q_2-q_1}{L}\cdot\frac{L^2}{2} + q_1\cdot L\right)\vec{z} = b\cdot\frac{q_2+q_1}{2}\cdot L\,\vec{z}$$

Par analogie pour l'autre pied

$$\overrightarrow{R^2_{s\to C}} = b\cdot\frac{q_2+q_1}{2}\cdot L\,\vec{z}$$

d'où

$$\overrightarrow{R_{s\to C}} = b\cdot(q_2+q_1)\,L\,\vec{z}$$

Q2. Déterminer le moment en O, $\overrightarrow{M_{O,s\to C}}$, de cette action mécanique, puis en P, $\overrightarrow{M_{P,s\to C}}$.

On détermine dans un premier temps pour le pied avec $x > 0$.

Soit un point Q avec $\overrightarrow{OQ} = x\cdot\vec{x} + y\cdot\vec{y}$

$$\overrightarrow{M_{O,s\to C}}^1 = \int_{x=a-b}^{a}\int_{Y=0}^{L} \overrightarrow{OQ}\wedge(q(y)\cdot dx\,dy\,\vec{z})$$
$$\overrightarrow{M_{O,s\to C}}^1 = \int_{x=a-b}^{a}\int_{Y=0}^{L} (x\cdot\vec{x} + y\cdot\vec{y})\wedge(q(y)\cdot dx\,dy\,\vec{z})$$
$$\overrightarrow{M_{O,s\to C}}^1 = \int_{x=a-b}^{a}\int_{Y=0}^{L} -x\cdot q(y)\cdot dx\,dy\,\vec{y} + \int_{x=a-b}^{a}\int_{Y=0}^{L} y\cdot q(y)\cdot dx\,dy\,\vec{x}$$
$$\overrightarrow{M_{O,s\to C}}^1 = \int_{x=a-b}^{a}\int_{Y=0}^{L} -x\cdot\left(\frac{q_2-q_1}{L}\cdot y + q_1\right) dx\,dy\,\vec{y} + \int_{x=a-b}^{a}\int_{Y=0}^{L} y\cdot\left(\frac{q_2-q_1}{L}\cdot y + q_1\right) dx\,dy\,\vec{x}$$

Il n'est pas utile de calculer l'intégrale suivant $\vec{y}$, compte tenu de la symétrie de la répartition des actions mécaniques sur les deux pieds, le moment autour de $(O, \vec{y})$ ne peut être que nul, je vous laisse vérifier. On ne calcule que le moment suivant $(O, \vec{x})$.

$$\overrightarrow{M_{O,s\to C}}^1 = \int_{x=a-b}^{a}\int_{Y=0}^{L} y\cdot\left(\frac{q_2-q_1}{L}\cdot y + q_1\right) dx\,dy\,\vec{x}$$
$$\overrightarrow{M_{O,s\to C}}^1 = b\int_{Y=0}^{L}\left(\frac{q_2-q_1}{L}\cdot y^2 + q_1\cdot y\right)\cdot dy\,\vec{x}$$
$$\overrightarrow{M_{O,s\to C}}^1 = b\left(\frac{q_2-q_1}{L}\cdot\frac{L^3}{3} + q_1\cdot\frac{L^2}{2}\right)\vec{x}$$
$$\overrightarrow{M_{O,s\to C}}^1 = b\left(\frac{q_2}{3} + \frac{q_1}{6}\right)L^2\cdot\vec{x}$$

Par analogie, on déduit le moment des deux pieds :

$$\overrightarrow{M_{O,s\to C}} = 2\cdot b\left(\frac{q_2}{3} + \frac{q_1}{6}\right)L^2\cdot\vec{x}$$

En P ce moment s'écrit :

$$\overrightarrow{M_{P,s\to C}} = \overrightarrow{M_{O,s\to C}} + \overrightarrow{PO}\wedge\overrightarrow{R_{s\to C}}$$
$$\overrightarrow{M_{P,s\to C}} = 2\cdot b\left(\frac{q_2}{3} + \frac{q_1}{6}\right)L^2\cdot\vec{x} + ((e-d)\cdot\vec{y} + h\cdot\vec{z})\wedge b\cdot(q_2+q_1)\,L\,\vec{z}$$
$$\overrightarrow{M_{P,s\to C}} = \left(2b\left(\frac{q_2}{3} + \frac{q_1}{6}\right)L^2 + (e-d)b\,(q_2+q_1)\,L\right)\vec{x}$$

Q3. En déduire le torseur de l'action mécanique du sol, $\{\mathcal{T}_{s\to C}\}$ sur la colonne en P.

$$\{\mathcal{T}_{s\to C}\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_{s\to C}} = b\cdot(q_2+q_1)\,L\,\vec{z}\\ \overrightarrow{M_{P,s\to C}} = \left(2b\left(\frac{q_2}{3}+\frac{q_1}{6}\right)L^2 + (e-d)b\,(q_2+q_1)\,L\right)\vec{x}\end{array}\right\}_P$$

Q4. Déterminer q_1 et q_2 en fonction de F_T et de d.

On écrit l'équilibre de la colonne en P. Elle est soumise à deux actions mécaniques : $\{\mathcal{T}_{s\to C}\}$ et $\{\mathcal{A}_{T\to C}\} = \left\{\begin{array}{c}-F_T\cdot\vec{z}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_P$

On en déduit les deux équations de l'équilibre :

$$\left\{\begin{array}{r}-F_T + b\cdot(q_2+q_1)\,L = 0\\ \left(2\cdot b\left(\frac{q_2}{3}+\frac{q_1}{6}\right)L^2 + (e-d)\cdot b\cdot(q_2+q_1)\,L\right) = 0\end{array}\right.$$

$$q_1 = F_T\cdot\frac{2\cdot L + 3\cdot e - 3\cdot d}{b\cdot L^2}$$
$$q_2 = -F_T\cdot\frac{2\cdot L + 3\cdot e - 3\cdot d}{b\cdot L^2}$$

Q5. Pour éviter la déformation du sol, les valeurs q_1 et q_2 ne doivent jamais être nulles. En déduire les valeurs mini et maxi de d.

On résout :

$$q_1 = F_T\cdot\frac{2\cdot L + 3\cdot e - 3\cdot d}{b\cdot L^2} = 0 \Rightarrow d_{max} = e + \frac{2}{3}\cdot L$$

et

$$q_2 = -F_T\cdot\frac{2\cdot L + 3\cdot e - 3\cdot d}{b\cdot L^2} = 0 \Rightarrow d_{min} = e + \frac{1}{3}\cdot L$$

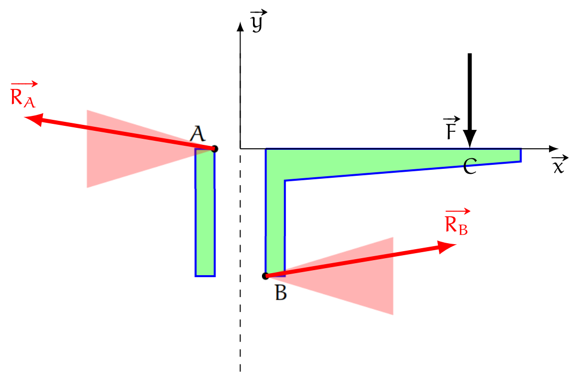
Cor. 2 : Arc-boutement

Sujet page 11

Q1. Préciser les actions mécaniques en A et B de la colonne (1) sur la console (2), préciser vos hypothèses. Représenter ces actions mécaniques sur le schéma.

Pour que la console soit en équilibre, il faut nécessairement que les contacts en A et B soient des contacts ponctuels avec frottements. La tendance au mouvement de la colonne est suivant la verticale descendante ($-\vec{y}$). La console étant en équilibre, les deux actions sont dans le cône de frottements.

On peut donc écrire les deux torseurs d'actions mécaniques : $\{\mathcal{A}_{A,0\to1}\} = \left\{\begin{matrix} N_A & 0 \\ -T_A & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{A}$, $\{\mathcal{A}_{B,0\to1}\} = \left\{\begin{matrix} -N_B & 0 \\ -T_B & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{B}$ avec $T_A \leqslant f \cdot N_A$ et $T_B \leqslant f \cdot N_B$. On reconnaît des torseurs glisseurs. Sans hypothèses supplémentaires, il n'est pas possible d'affiner la description.



Q2. À quelle condition la console reste-t-elle immobile ? Représenter graphiquement cette condition.

Pour que la console soit en équilibre, il est nécessaire que la somme des actions mécaniques soient nulles. Ici la console est soumise à l'action de trois glisseurs coplanaires, ils sont donc concourants et respectent la condition de $T_i \leqslant f \cdot N_i$.

On se place dans le cas limite, à la limite du glissement en A et B. On constate sur le schéma, qu'il existe une valeur position limite pour l'action en C pour que la console soit en équilibre.

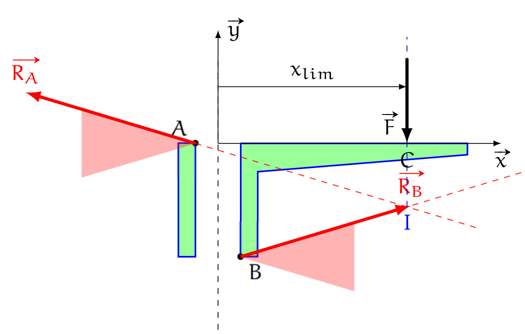


FIGURE 11.17 – Cas limite

— Si $x = x_{lim}$ il existe une solution (figure 11.17).

— Si $x < x_{lim}$ il n'est pas possible de déterminer $\vec{R_A}$ et $\vec{R_B}$ tel que $T_i \leqslant f \cdot N_i$. La figure 11.18 présente un cas où on suppose que l'action en B est sur le cône de frottement, alors l'action en A doit être hors du cône.

— si $x > x_{lim}$, il existe une infinité de solution. Les deux figures 11.19 montrent les deux cas extrêmes, dans le premier on considère que le contact en A est à la limite du glissement, dans le second on considère que c'est en B.

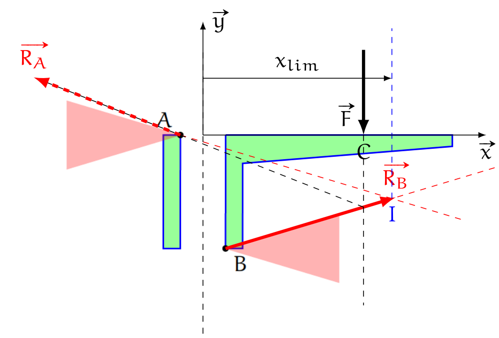


FIGURE 11.18 – Cas $x < x_{lim}$

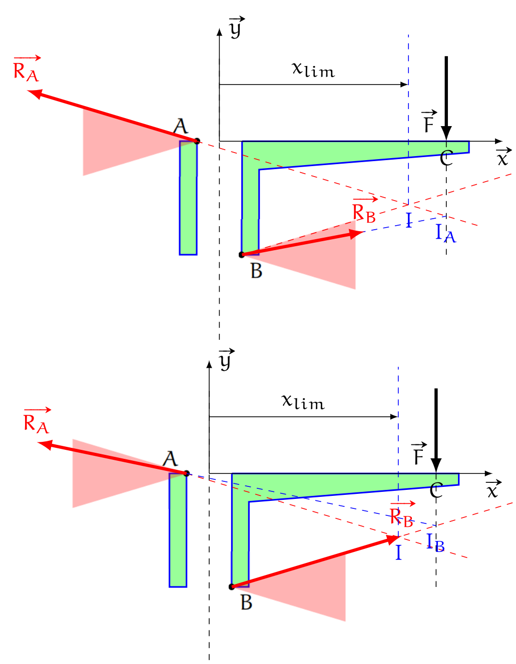


FIGURE 11.19 – Cas $x > x_{lim}$

Q3. Déterminer la condition sur la distance x_{lim} en fonction de H et f pour que la console soit immobile.

On montre rapidement que $x_{lim} = \dfrac{H}{2 \cdot f}$.

On note $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{R_B}$ la résultante de l'action mécanique respectivement en A et B.

Q4. Déterminer $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{R_B}$ en fonction de F, x_{lim} et H.

Les trois glisseurs sont concourants en I et à la limite du glissement en A et B, on peut donc écrire ;

$$\left\{\begin{matrix} N_A & 0 \\ -T_A & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{I} + \left\{\begin{matrix} -N_B & 0 \\ -T_B & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{I} + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{I} = \left\{0\right\}$$

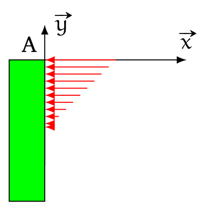
$$\left\{\begin{matrix} N_A & 0 \\ -f\cdot N_A & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{I} + \left\{\begin{matrix} -N_B & 0 \\ -f\cdot N_B & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{I} + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{I} = \left\{0\right\}$$

soit $T_A = T_B = -\dfrac{F}{2}$ et $N_A = N_B = -\dfrac{F}{2\cdot f}$

Q5. Calculer la répartition de pression $P(y)$ en fonction de H, P_{Max} et z .

Pour la répartition de pression en A, on a (on prend l'origine en A) :

$$P_A(y) = \frac{2\cdot P_{Max}}{H}\cdot y + P_{Max}$$



Q6. Déterminer la résultante de l'action mécanique équivalente $\overrightarrow{R^A_{0\to 1}}$ à cette répartition de pression en fonction de H, P_{Max} et f du côté A. Montrez que cette action est représentable en un glisseur en A^* avec $\overrightarrow{AA^*} = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{H}{2}\cdot\vec{y}$.

On se place à la limte du glissement pour décrire la résultante équivalente de l'action du coté A.

On a

$$\overrightarrow{dR_{0\to 1}} = -P(y)\cdot dy\cdot\vec{x} + f\cdot P(y)\cdot dy\cdot\vec{y}$$

$$\overrightarrow{dR_{0\to 1}} = -\left(\frac{2\cdot P_{Max}}{H}\cdot y + P_{Max}\right)\cdot dy\cdot\vec{x} + f\cdot\left(\frac{2\cdot P_{Max}}{H}\cdot y + P_{Max}\right)\cdot dy\cdot\vec{y}$$

soit

$$\overrightarrow{R^A_{0\to 1}} = -\int_{-\frac{H}{2}}^{0}\left(\frac{2\cdot P_{Max}}{H}\cdot y + P_{Max}\right)\cdot dy\cdot\vec{x} + \int_{-\frac{H}{2}}^{0} f\cdot\left(\frac{2\cdot P_{Max}}{H}\cdot y + P_{Max}\right)\cdot dy\cdot\vec{y}$$

$$\overrightarrow{R^A_{0\to 1}} = -\left(-P_{Max}\cdot\frac{H}{4} + P_{Max}\cdot\frac{H}{2}\right)\cdot\vec{x} + f\cdot\left(-P_{Max}\frac{\cdot H}{4} + P_{Max}\cdot\frac{H}{2}\right)\cdot\vec{y}$$

$$\overrightarrow{R^A_{0\to 1}} = -P_{Max}\cdot\frac{H}{4}\cdot\vec{x} + f\cdot P_{Max}\frac{\cdot H}{4}\cdot\vec{y}$$

Déterminons le moment en A :

$$\overrightarrow{M_{A,0\to 1}} = \int_{\frac{-H}{2}}^{0}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{dR_{0\to 1}} = \int_{\frac{-H}{2}}^{0} y\cdot\vec{y}\wedge\left(-P(y)\cdot dy\cdot\vec{x} + f\cdot P(y)\cdot dy\cdot\vec{y}\right)$$

$$\overrightarrow{M_{A,0\to 1}} = \int_{\frac{-H}{2}}^{0} y\cdot\vec{y}\wedge -P(y)\cdot dy\cdot\vec{x}$$

$$\overrightarrow{M_{A,0\to 1}} = \int_{\frac{-H}{2}}^{0}\left(\frac{2\cdot P_{Max}}{H}\cdot y^2 + P_{Max}\cdot y\right)\cdot dy\cdot\vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_{A,0\to 1}} = -\frac{1}{24}\cdot P_{Max}\cdot H^2\vec{z}$$

Montrons que le moment en A^* est nul.

$$\overrightarrow{M_{A^*,0\to 1}} = \overrightarrow{M_{A,0\to 1}} + \overrightarrow{A^*A}\wedge\overrightarrow{R^A_{0\to 1}}$$

$$\overrightarrow{M_{A^*,0\to 1}} = -\frac{1}{24}\cdot P_{Max}\cdot H^2\vec{z} + \frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\vec{y}\wedge\left(-P_{Max}\cdot\frac{H}{4}\cdot\vec{x} + f\cdot P_{Max}\frac{\cdot H}{4}\cdot\vec{y}\right)$$

$$\overrightarrow{M_{A^*,0\to 1}} = \vec{0}$$

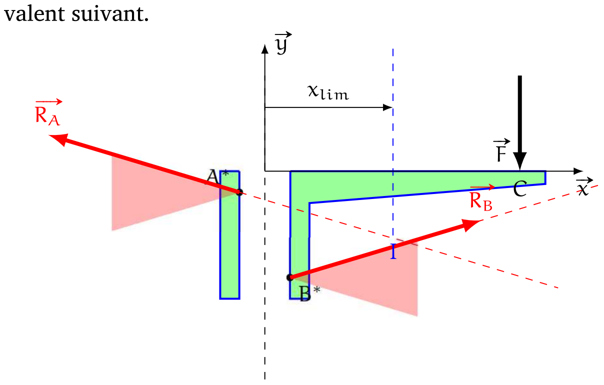
En A^* l'action mécanique de la colonne sur la console est représentable par un glisseur

$$\{\mathcal{A}_{A,0\to 1}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R^A_{0\to 1}} = -P_{Max}\cdot\dfrac{H}{4}\cdot\vec{x} + f\cdot P_{Max}\dfrac{\cdot H}{4}\cdot\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{A^*}$$

Par analogie, on déduit le torseur de l'action en B^* avec $\overrightarrow{BB^*} = \dfrac{1}{3}\dfrac{H}{2}\cdot\vec{y}$.

$$\{\mathcal{A}_{B,0\to 1}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R^B_{0\to 1}} = P_{Max}\cdot\dfrac{H}{4}\cdot\vec{x} + f\cdot P_{Max}\dfrac{\cdot H}{4}\cdot\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{B^*}$$

On peut donc modéliser l'ensemble par le schéma équivalent suivant.



Q7. On note x_{lim2} la distance limite, la distance x_{lim} calculée pour l'étude du premier modèle, est-elle modifiée ? Conclure.

On peut donc déterminer $x_{lim2} = \dfrac{H-\frac{H}{3}}{2\cdot f} = \dfrac{2}{3}\dfrac{H}{2\cdot f} = \dfrac{2}{3}x_{lim}$

Le second modèle est « plus stable ».

Q8. Déterminer $\overrightarrow{R^A_{0\to 1}}$ en fonction de F, f.

Nous avons déterminé précédemment $N_A = N_B = -\dfrac{-F}{2\cdot f}$ et $T_A = T_B = -\dfrac{F}{2}$.

Q9. Déterminer P_{Max} en fonction de F, f et H.

$$P_{Max} \cdot \frac{H}{4} = \frac{F}{2 \cdot f} \Rightarrow P_{Max} = \frac{2 \cdot F}{H \cdot f}$$

Cor. 3 : Simulateur de vol - Compensateur de pesanteur

Sujet page 13

Q1. Écrire la fermeture géométrique. En déduire les deux relations reliant y, β et α.

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$$

$$c \cdot \vec{x_3} + d \cdot \vec{x_3} + b \cdot \vec{y_2} - a \cdot \vec{x_0} - y \cdot \vec{y_0} = \vec{0}$$

Soit

$$\begin{cases} c + d \cdot \cos\beta - b \cdot \sin\alpha - a = 0 \\ d \cdot \sin\beta + b \cdot \cos\alpha - y = 0 \end{cases}$$

Q2. Simplifier ces relations en considérant que la manivelle (3) reste pratiquement horizontale au cours du mouvement de translation du cockpit et que la bielle (2) reste pratiquement perpendiculaire au plan du cockpit (β et α petits). En déduire une relation reliant y à β.

On pose donc : $\cos\beta = 1$ et $\sin\beta = \beta$ d'une part et $\cos\alpha = 1$ et $\sin\alpha = \alpha$ d'autre part.

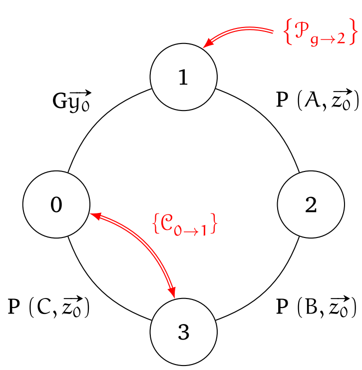
Les équations deviennent :

$$\begin{cases} c + d - b \cdot \alpha - a = 0 \\ d \cdot \beta + b - y = 0 \end{cases}$$

soit

$$y = d \cdot \beta + b$$

Q3. Tracer le graphe de structure en précisant les torseurs des actions transmissibles par les liaisons dans le cas du modèle plan et les actions mécaniques.



Actions de liaisons :

$$\{\mathcal{A}_{0\to1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & [0] \\ 0 & [0] \\ [0] & N_{01} \end{Bmatrix}_{\forall P}^{(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})} ;$$

$$\{\mathcal{A}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & [0] \\ Y_{12} & [0] \\ [0] & O \end{Bmatrix}_{A}^{(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})} ;$$

$$\{\mathcal{A}_{2\to3}\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & [0] \\ Y_{23} & [0] \\ [0] & O \end{Bmatrix}_{B}^{(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})} ;$$

$$\{\mathcal{A}_{0\to3}\} = \begin{Bmatrix} X_{03} & [0] \\ Y_{03} & [0] \\ [0] & O \end{Bmatrix}_{C}^{(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})} .$$

Actions mécaniques « extérieures » :

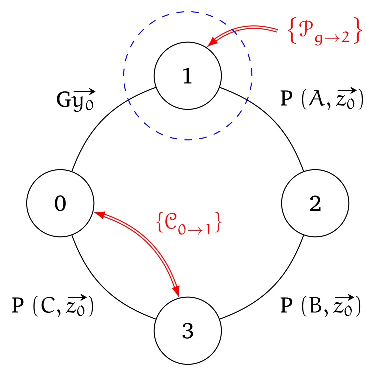
$$\{\mathcal{C}_{0\to1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_O ;$$

$$\{\mathcal{P}_{g\to2}\} = \begin{Bmatrix} -M \cdot g \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G .$$

On isole successivement les solides (2), (1) puis (3).

Q4. Écrire les équations relatives au solide (2).

On isole le solide (2) : soumis à deux actions mécaniques (glisseurs) ces deux glisseurs sont opposés, on écrit le PFS en A.



$$\overrightarrow{M_{A,2\to3}} = \overrightarrow{M_{B,2\to3}} + \overrightarrow{AB} \wedge (X_{23} \cdot \vec{x_0} + Y_{23} \cdot \vec{y_0})$$
$$\overrightarrow{M_{A,2\to3}} = b \cdot \vec{y_2} \wedge (X_{23} \cdot \vec{x_0} + Y_{23} \cdot \vec{y_0})$$
$$\overrightarrow{M_{A,2\to3}} = (\cos\alpha \cdot \vec{y_0} - \sin\alpha \cdot \vec{x_0}) \wedge (X_{23} \cdot \vec{x_0} + Y_{23} \cdot \vec{y_0})$$

$$\overrightarrow{M_{A,2\to3}} = (-b \cdot X_{23}\cos\alpha - b \cdot Y_{23}\sin\alpha)\ \vec{z}0$$

$$\{\mathcal{A}_{1\to2}\} - \{\mathcal{A}_{2\to3}\} = \{0\}$$

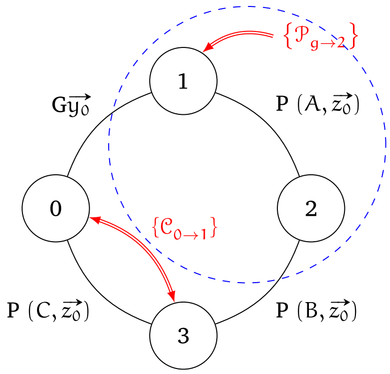
$$\begin{Bmatrix} X_{12} & [0] \\ Y_{12} & [0] \\ [0] & O \end{Bmatrix}_{A}^{(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})} - \begin{Bmatrix} X_{23} & [0] \\ Y_{23} & [0] \\ [0] & -bX_{23}\cos\alpha - bY_{23}\sin\alpha \end{Bmatrix}_{A}^{(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})} = \{0\}$$

On déduit :

$$\begin{cases} X_{12} = X_{23} \\ Y_{12} = Y_{23} \\ \dfrac{X_{23}}{Y_{23}} = \dfrac{X_{12}}{Y_{12}} = -\tan\alpha \end{cases}$$

Q5. Déterminer l'action de liaison en A en fonction de M et α.

On isole maintenant (S1) : soumis à trois actions mécaniques :



$$\{\mathcal{P}_{g\to 1}\} + \{\mathcal{A}_{0\to 1}\} - \{\mathcal{A}_{1\to 2}\} = \{0\}$$

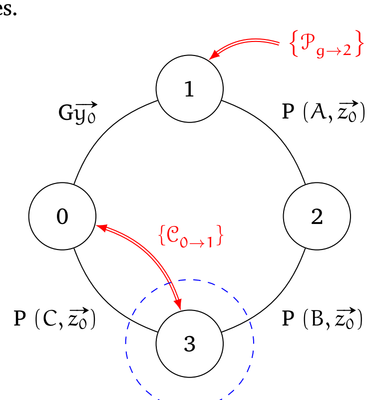
Il n'est pas nécessaire d'écrire ici toutes les équations, il suffit d'écrire le theorème de la résultante en projection sur $\vec{y}0$.

On obtient alors

$$Y_{12} = -M \cdot g$$
$$X_{12} = M \cdot g \cdot \tan\alpha$$

Q6. Déterminer C_m.

On isole maintenant la manivelle (3) : soumise à 3 actions mécaniques.



$$\{\mathcal{C}_{0\to 1}\} + \{\mathcal{A}_{2\to 3}\} + \{\mathcal{A}_{0\to 3}\} = \{0\}$$

On connaît complètement
$$\{\mathcal{A}_{2\to 3}\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{23} = -M \cdot g \cdot \tan\alpha & [0] \\ Y_{23} = -M \cdot g & [0] \\ [0] & O \end{array}\right\}_{\substack{B \\ (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})}} .$$

On ne cherche pas à déterminer $\{\mathcal{A}_{0\to 3}\}$ nous allons donc écrire uniquement le théorème du moment en C, en projection suivant $\overrightarrow{z_0}$.

$$\overrightarrow{M_{C,2\to 3}} = \overrightarrow{M_{B,2\to 3}} + d \cdot \overrightarrow{x_3} \wedge (X_{23} \cdot \overrightarrow{x_0} + Y_{23} \cdot \overrightarrow{y_0})$$
$$\overrightarrow{M_{C,2\to 3}} = (d \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x_0} + d \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{y_0}) \wedge (X_{23} \cdot \overrightarrow{x_0} + Y_{23} \cdot \overrightarrow{y_0})$$

$$\overrightarrow{M_{C,2\to 3}} = (d \cdot Y_{23} \cdot \cos\beta - d \cdot X_{23} \cdot \sin\beta)\, \overrightarrow{z_0}$$

Le théorème du moment s'écrit :

$$C_m + d \cdot Y_{23} \cdot \cos\beta - d \cdot X_{23} \cdot \sin\beta = 0$$

en remplaçant

$$C_m = -d \cdot Y_{23} \cdot \cos\beta + d \cdot X_{23} \cdot \sin\beta$$
$$C_m = d \cdot M \cdot g \cdot \cos\beta + d \cdot M \cdot g \cdot \tan\alpha \cdot \sin\beta$$
$$C_m = d \cdot M \cdot g \cdot (\cos\beta + \tan\alpha \cdot \sin\beta)$$

Si on admet l'hypothèse des petits angles :

$$C_m = d \cdot M \cdot g \cdot (1 + \alpha \cdot \beta) \approx d \cdot M \cdot g$$

Q7. Reprendre l'équilibre de la manivelle, déterminer F_r en fonction de M.

Les deux ressorts doivent fournir un couple équivalent à celui du moteur. On a donc

$$2 \cdot f \cdot F_r = C_m$$
$$F_r = \frac{d}{2 \cdot f} M \cdot g$$

Cor. 4 : Ascenseur à bateau de Strepy-Thieu - Freiange

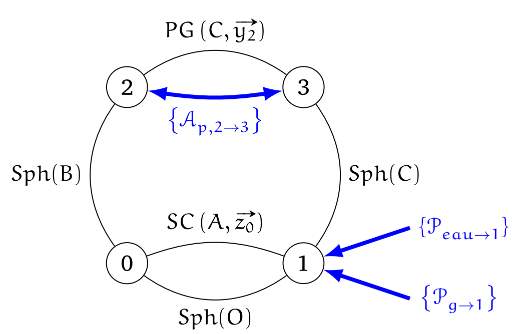
Sujet page 15

A Faire n 1

Cor. 5 : Écluse de Canal

Sujet page 17

Q1. Tracer le graphe des liaisons du mécanisme complet constituée par le bajoyer, le corps du vérin, la tige du vérin et le vantail.



Q2. Préciser sur le graphe les actions mécaniques.

En gras sur le graphe

- action de la gravité : $\{\mathcal{P}_{g\to 1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{P_1} = -M_1 g \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_{G_1}$
- action de l'eau sur (1) : $\{\mathcal{P}_{eau\to 1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{e\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{O,e\to 1}} \end{Bmatrix}_O$
- action de la pression dans le vérin : $\{\mathcal{A}_{p,2\to 3}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to 3}} = R_{23}\cdot\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_C$

Q3. Préciser les différents torseurs d'action transmissibles par les liaisons.

- Sphérique en O entre (0) et (1)
$$\{\mathcal{A}^O_{0\to 1}\} = \begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ Y_O & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{O\\ \forall B}}$$
- Sphère cylindre en A entre (0) et (1)
$$\{\mathcal{A}^A_{0\to 1}\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{A\\ (\vec{?},\vec{?},\overrightarrow{z_0})}}$$
- Sphérique en C entre (1) et (3)
$$\{\mathcal{A}_{1\to 3}\} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{C\\ \forall B}}$$
- Sphérique en B entre (0) et (2)
$$\{\mathcal{A}_{0\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{B\\ \forall B}}$$
- Pivot glissant d'axe $(C,\overrightarrow{y_2})$ entre (2) et (3)
$$\{\mathcal{A}_{2\to 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ 0 & 0 \\ Z_{23} & Z_{23} \end{Bmatrix}_{\substack{O\\ (\vec{?},\overrightarrow{y_2},\vec{?})}}.$$

Q4. Soit P un point du vantail de coordonnées $(x,0,z)$ dans $(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\vec{z})$, exprimer sa vitesse par rapport au bajoyer $\overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$ en fonction de ω_1.

$$\overrightarrow{V_{P\in 1/0}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_= \frac{d\, x\cdot\overrightarrow{x_1} + z\cdot\overrightarrow{z_0}}{dt}$$
$$\overrightarrow{V_{P\in 1/0}} = \Omega_{1/0}\wedge(x\cdot\overrightarrow{x_1} + z\cdot\overrightarrow{z_0})$$
$$\overrightarrow{V_{P\in 1/0}} = \omega_1\cdot\overrightarrow{z_0}\wedge(x\cdot\overrightarrow{x_1} + z\cdot\overrightarrow{z_0}) = x\cdot\omega_1\cdot\overrightarrow{y_1}$$

Q5. Exprimer $\overrightarrow{dF_{eau\to 1}}$ en fonction de ω_1 et x. Préciser l'élément de surface ds ainsi que les bornes d'intégration.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dF_{eau\to v}} &= -p_r\cdot ds\cdot\overrightarrow{y_1} = -k\cdot\rho\cdot\overrightarrow{V_{P\in v/b}}^2\cdot ds\cdot\overrightarrow{y_1}\\ &= -k\cdot\rho\cdot x^2\cdot\omega_1^2\cdot ds\cdot\overrightarrow{y_1}\\ &= -k\cdot\rho\cdot x^2\cdot\omega_1^2\cdot dx\cdot dz\cdot\overrightarrow{y_1}\end{aligned}$$

avec $x\in[0,L]$ et $z\in[0,h_e]$

Q6. Déterminer $\overrightarrow{F_{eau\to 1}}$ en fonction de ω_1 et des différents paramètres géométriques. Faire l'application numérique.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{eau\to v}} &= \int_S \overrightarrow{dF_{eau\to v}} = \int_S -k\cdot\rho\cdot x^2\cdot\omega_1^2\cdot ds\cdot\overrightarrow{y_1}\\ &= \int_0^L\int_0^{\frac{H}{2}} -k\cdot\rho\cdot x^2\cdot\omega_1^2\cdot dxdz\cdot\overrightarrow{y_1}\\ &= -k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\cdot\frac{L^3}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\overrightarrow{y_1}\end{aligned}$$

Q7. Déterminer $\overrightarrow{M_{O,eau\to 1}} = \int_S \overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{dF_{eau\to 1}}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{O,eau\to v}} &= \int_S \overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{dF_{eau\to v}}\\ &= \int_S (x\cdot\overrightarrow{x_1} + z\cdot\overrightarrow{z_0})\wedge -k\cdot\rho\cdot x^2\cdot\omega_1^2\cdot ds\cdot\overrightarrow{y_1}\\ &= -k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\cdot\int_S x^3\cdot\overrightarrow{x_1}\wedge\cdot\overrightarrow{y_1}\cdot ds\\ &\quad - k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\int_S x^2\cdot z\cdot\overrightarrow{z_0}\wedge\overrightarrow{y_1}\cdot ds\\ &= -k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\cdot\int_0^L\int_0^{\frac{H}{2}} x^3\cdot dxdz\cdot\overrightarrow{z_0}\\ &\quad + k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\int_0^L\int_0^{\frac{H}{2}} x^2\cdot z\cdot\cdot dxdz\cdot\overrightarrow{x_1}\\ &= -k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\cdot\frac{L^4}{4}\frac{H}{2}\cdot\overrightarrow{z_0} + k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\frac{L^3}{3}\frac{H^2}{8}\cdot\overrightarrow{x_1}\end{aligned}$$

Q8. Exprimer le torseur de l'action mécanique de l'eau sur le vantail en O.

$$\{\mathcal{A}_{eau\to v}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{eau\to v}} = -k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\cdot\frac{L^3}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{M_{O,eau\to v}} = -k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\cdot\frac{L^4}{4}\frac{H}{2}\cdot\overrightarrow{z_0} + k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\frac{L^3}{3}\frac{H^2}{8}\cdot\overrightarrow{x_1} \end{Bmatrix}_O$$

Q9. Déterminer le point P du vantail pour lequel $\overrightarrow{M_{P,eau\to 1}} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{M_{P,eau\to 1}} = \vec{0}\\ &\overrightarrow{M_{P,eau\to 1}} = \overrightarrow{M_{O,eau\to 1}} + \overrightarrow{PO}\wedge\overrightarrow{F_{eau\to v}}\\ &\overrightarrow{M_{P,eau\to 1}} = -k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\cdot\frac{L^4}{4}\frac{H}{2}\cdot\overrightarrow{z_0} + k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\frac{L^3}{3}\frac{H^2}{8}\cdot\overrightarrow{x_1}\\ &\qquad -(x\cdot\overrightarrow{x_1} + z\cdot\overrightarrow{z_0})\wedge -k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\cdot\frac{L^3}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\overrightarrow{y_1} = \vec{0}\end{aligned}$$

soit

$$-\frac{L^4}{4}\frac{H}{2}\cdot\vec{z_0}+\frac{L^3}{3}\frac{H^2}{8}\cdot\vec{x_1}-(x\cdot\vec{x_1}+z\cdot\vec{z_0})\wedge-\frac{L^3}{3}\frac{H}{2}\cdot\vec{y_1}=\vec{0}$$
$$-\frac{L}{4}\cdot\vec{z_0}+\frac{1}{3}\frac{H}{4}\cdot\vec{x_1}-(x\cdot\vec{x_1}+z\cdot\vec{z_0})\wedge-\frac{1}{3}\cdot\vec{y_1}=\vec{0}$$
$$-\frac{L}{4}\cdot\vec{z_0}+\frac{1}{3}\frac{H}{4}\cdot\vec{x_1}+\frac{1}{3}\cdot x\cdot\vec{z_0}-\frac{1}{3}\cdot z\cdot\vec{x_1}=\vec{0}$$
$$\left(-\frac{L}{4}+\frac{1}{3}\cdot x\right)\cdot\vec{z_0}+\left(\frac{1}{3}\frac{H}{4}-\frac{1}{3}\cdot z\right)\cdot\vec{x_1}=\vec{0}$$

finalement

$$-\frac{L}{4}+\frac{1}{3}\cdot x=0\Rightarrow\quad x=\frac{3}{4}\cdot L$$
$$\frac{1}{3}\frac{H}{4}-\frac{1}{3}\cdot z=0\Rightarrow\quad z=\frac{H}{4}$$

Q10. Déterminer le moment en O du torseur de l'action mécanique transmissible par la liaison sphère cylindre entre (0) et (1).

On sait $\left\{\mathcal{A}^A_{0\to1}\right\}=\begin{Bmatrix}X_A & 0\\ Y_A & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}^{A}_{(\vec{?},\vec{?},\vec{z_0})}$

$$\overrightarrow{M_{O,0\to1}}^A=\overrightarrow{M_{A,0\to1}}^A+\overrightarrow{OA}\wedge(X_A\cdot\vec{x_0}+Y_A\cdot\vec{y_0})$$
$$\overrightarrow{M_{O,0\to1}}^A=H\cdot\vec{z_0}\wedge(X_A\cdot\vec{x_0}+Y_A\cdot\vec{y_0})$$
$$\overrightarrow{M_{O,0\to1}}^A=H\cdot X_A\cdot\vec{y_0}-H\cdot Y_A\cdot\vec{y_0}$$

d'où

$$\left\{\mathcal{A}^A_{0\to1}\right\}=\begin{Bmatrix}X_A & -H\cdot Y_A\\ Y_A & H\cdot X_A\\ 0 & 0\end{Bmatrix}^{O}_{(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})}$$

Q11. Déterminer le torseur résultant des deux liaisons entre le bajoyer (0) et le vantail (1) en O.

$$\{\mathcal{A}_{0\to1}\}=\left\{\mathcal{A}^O_{0\to1}\right\}+\left\{\mathcal{A}^A_{0\to1}\right\}$$
$$\{\mathcal{A}_{0\to1}\}=\begin{Bmatrix}X_O & 0\\ Y_O & 0\\ Z_O & 0\end{Bmatrix}^{O}_{(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})}+\begin{Bmatrix}X_A & -H\cdot Y_A\\ Y_A & H\cdot X_A\\ 0 & 0\end{Bmatrix}^{O}_{(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})}$$
$$\{\mathcal{A}_{0\to1}\}=\begin{Bmatrix}X_O+X_A & -H\cdot Y_A\\ Y_O+Y_A & H\cdot X_A\\ Z_O & 0\end{Bmatrix}^{O}_{(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})}$$

On reconnaît le torseur des actions transmissibles d'une liaison Pivot.

Q12. En isolant l'ensemble {2,3}, justifier que la résultante de l'action mécanique en A de la tige du vérin sur le vantail s'écrit : $\overrightarrow{R_{3\to1}}=F\cdot\vec{y_2}$.

L'ensemble {2,3} est soumis à l'action de deux glisseurs (sphérique en B et C). On sait que l'ensemble est en équilibre si les deux résultantes sont opposées et colinéaires portées par la droite passant par les deux points d'application des actions mécaniques (B et C). La droite (BC) a pour vecteur unitaire $\vec{y_2}$, on a donc bien :

$$\overrightarrow{R_{3\to1}}=F\cdot\vec{y_2}$$

On a donc $\{\mathcal{A}_{3\to1}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ F & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}^{C}_{(\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_0})}$

Q13. Déterminer le moment en O de cette action $\overrightarrow{M_{O,3\to1}}$.

$$\overrightarrow{M_{O,3\to1}}=\vec{0}+\overrightarrow{OC}\wedge F\cdot\vec{y_2}$$
$$\overrightarrow{M_{O,3\to1}}=(H\cdot\vec{z_0}+a\cdot\vec{x_1})\wedge F\cdot\vec{y_2}$$
$$\overrightarrow{M_{O,3\to1}}=-H\cdot F\cdot\vec{x_2}+a\cdot F\cdot\sin(\vec{x_1},\vec{y_2})\cdot\vec{z_0}$$
$$\overrightarrow{M_{O,3\to1}}=-H\cdot F\cdot\vec{x_2}+a\cdot F\cdot\sin(\frac{\pi}{2}+\beta-\alpha)\cdot\vec{z_0}$$
$$\overrightarrow{M_{O,3\to1}}=-H\cdot F\cdot\vec{x_2}+a\cdot F\cdot\cos(\beta-\alpha)\cdot\vec{z_0}$$

Le torseur devient $\{\mathcal{A}_{3\to1}\}=\begin{Bmatrix}0 & -H\cdot F\\ F & 0\\ 0 & a\cdot F\cdot\cos(\beta-\alpha)\end{Bmatrix}^{O}_{(\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_0})}$.

Q14. Déterminer F en fonction de la pression p_v.

En isolant la tige du vérin, elle est soumise à la pression, l'action du corps et l'action du vantail. En écrivant le théorème de la résultante suivant $\vec{y_2}$, on déduit :
$F=p_v\cdot S_u$

Q15. Préciser les autres actions mécaniques extérieures sur le vantail, et leur moment en O en projection sur $\vec{z_0}$.

La dernière action extérieure sur le portail est le poids.

Ici le poids est porté par $\vec{z_0}$ le moment en O en projection sur $\vec{z_0}$ est donc nul.

Q16. Énoncer le P.F.S.

pour le vantail, on a

$$\{\mathcal{A}_{0\to1}\}+\{\mathcal{A}_{eau\to1}\}+\left\{\mathcal{P}_{g\to1}\right\}+\{\mathcal{A}_{3\to1}\}=\left\{0\right\}$$

Q17. Quelle équation doit-on écrire pour obtenir une relation entre l'action de l'eau et l'action du vérin sur le vantail, justifier ?

On cherche une relation entre l'action de l'eau et l'action développée par le vérin.

L'action du vérin doit entraîner en rotation le vantail autour de $(O,\vec{z_0})$, l'action de l'eau s'opposant à ce mouvement. Il semble donc pertinent ici d'écrire l'équation du moment en projection en O suivant $\vec{z_0}$

Q18. Déterminer la relation donnant F en fonction de la vitesse de rotation ω_1 du vantail, en déduire p_v en fonction de ω_1.

$$\left(\overrightarrow{M_{O,0\to1}}+\overrightarrow{M_{O,eau\to1}}+\overrightarrow{M_{O,g\to1}}+\overrightarrow{M_{O,3\to1}}\right)\cdot\vec{z}(0)=0$$

$$0-k\cdot\rho\cdot\omega_1^2\cdot\frac{L^4}{4}\frac{H}{2}+0+a\cdot F\cdot\cos(\beta-\alpha)=0$$

d'où

$$F=\frac{k\cdot\rho\cdot\omega_1^2}{a\cdot\cos(\beta-\alpha)}\cdot\frac{H\cdot L^4}{8}$$