

Analyse fréquentielle des systèmes linéaires

6.1 De la réponse temporelle à la réponse fréquentielle

6.1.1 Réponse fréquentielle

On appelle réponse fréquentielle, la réponse temporelle du système linéaire décrit par une équation différentielle à coefficients constants pour une entrée sinusoïdale.

Nous allons sur un exemple simple montrer la relation qu'il existe entre la fonction de transfert dans le domaine de Laplace et la réponse temporelle en régime permanent d'un signal sinusoïdal. Soit l'équation différentielle du 1^{er} ordre :

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t).$$

On se place dans les conditions de Heaviside et on détermine la réponse temporelle $s(t)$ pour une entrée

$$e(t) = \cos(\omega \cdot t) \cdot \mathcal{H}(t)(t).$$

La solution de l'équation générale de cette équation différentielle est :

$$s_g(t) = G \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec G à déterminer en fonction des conditions initiales. La solution particulière est de la forme que $e(t)$:

$$s_p(t) = A \cdot \cos \omega \cdot t + B \cdot \sin \omega t.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\begin{aligned} -A \cdot \tau \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot t + B \cdot \tau \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot t + A \cdot \cos \omega \cdot t + B \cdot \sin \omega t &= K \cdot \cos \omega \cdot t \\ (-A \cdot \tau \cdot \omega + B) \cdot \sin \omega t + (B \cdot \tau \cdot \omega + A) \cdot \cos \omega \cdot t &= K \cdot \cos \omega \cdot t \end{aligned}$$

soit

$$\begin{cases} B \cdot \tau \cdot \omega + A = K \\ -A \cdot \tau \cdot \omega + B = 0 \end{cases}$$

On déduit

$$s_p(t) = K \left(\frac{1}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2} \cdot \cos \omega t + \frac{\tau \cdot \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2} \sin \omega t \right)$$

On pose φ tel que $\sin \varphi = \frac{\tau \cdot \omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$ et $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$ d'où $\varphi = \arctan(\tau \cdot \omega)$.

$$s_p(t) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} (\cos \varphi \cdot \cos \omega t + \sin \varphi \cdot \sin \omega t)$$

$$s_p(t) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} \cdot (\omega \cdot t - \varphi)$$

La solution complète s'écrit donc :

$$s(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$$

On en déduit le comportement en régime permanent, c'est-à-dire lorsque t est suffisamment grand

$$s_{perm}(t) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$$

On en déduit :

- l'amplitude de $s_{perm}(t)$: $\frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$
- le déphasage à l'origine $\varphi(\omega) = \arctan(\tau \cdot \omega)$.

6.1.2 De la transformée de Laplace à la réponse fréquentielle

À partir de l'équation différentielle du premier ordre on peut écrire la fonction de transfert $H(p)$:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On sait que la variable de Laplace p est un nombre complexe $p = a + j \cdot b$. On choisit pour p le domaine limité aux imaginaires purs soit $p = j \cdot \omega$.

Remplaçons $p = j \cdot \omega$ dans $H(p)$.

$$H(j \cdot \omega) = \frac{S(j \cdot \omega)}{E(j \cdot \omega)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot j \cdot \omega}$$

$H(j \cdot \omega)$ est une fonction complexe dont on peut calculer le module et l'argument d'où

Module :

$$|H(j \cdot \omega)| = A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$$

Argument

$$\arg(H(j \cdot \omega)) = \Phi(\omega) = -\arctan(\tau \cdot \omega)$$

On reconnaît l'amplitude et le déphasage à l'origine de $s_{perm}(t)$.

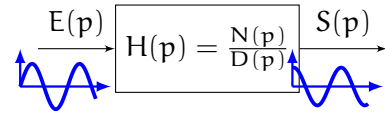
On peut donc, directement à partir de la fonction de transfert, retrouver les caractéristiques de la réponse en régime permanent d'un système sollicité avec une entrée sinusoïdale.

On appelle réponse fréquentielle d'un système la réponse temporelle en régime permanent d'un système linéaire sollicité par une entrée sinusoïdale.

6.2 Réponse fréquentielle

L'objectif de l'analyse fréquentielle est d'étudier le comportement d'un système à partir de sa réponse à une sollicitation sinusoïdale de la forme :

$$e(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \mathcal{H}(t)$$



avec $\mathcal{H}(t)$, la fonction Heaviside est définie par :
$$\begin{cases} t \leq 0 & \mathcal{H}(t) = 0 \\ t \geq 0 & \mathcal{H}(t) = 1 \end{cases}$$

On sollicite donc le système avec une entrée sinusoïdale de pulsation ω et on relève la réponse temporelle de la sortie pour chacune des fréquences. La figure 6.1 présente quelques mesures.

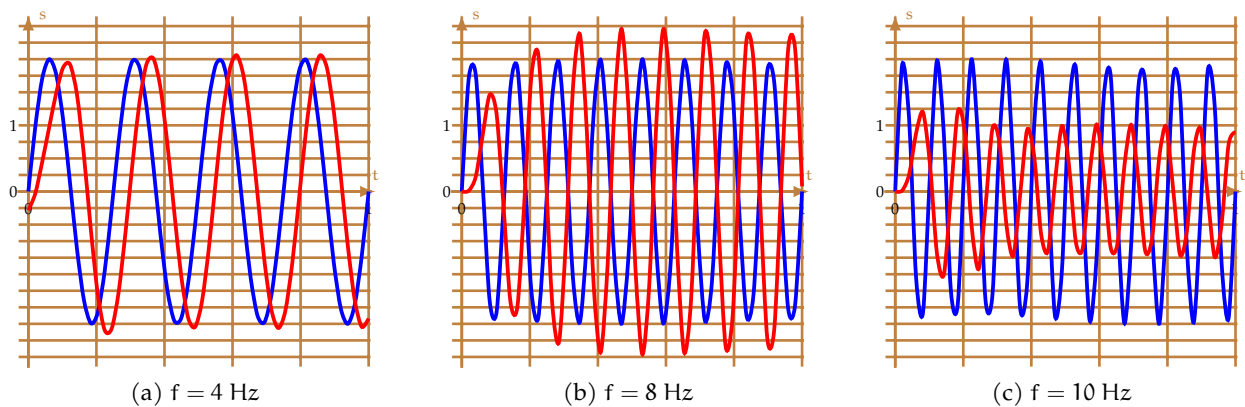


FIGURE 6.1 – Relevés fréquentiels

On remarque sur ces tracés :

- la présence de deux zones :
 - le régime transitoire (la phase de démarrage) ;
 - le régime permanent ou régime établi ;
- que le déphasage du régime permanent avec le signal d'entrée augmente avec la pulsation ;
- que l'amplitude de la sortie varie avec la pulsation.

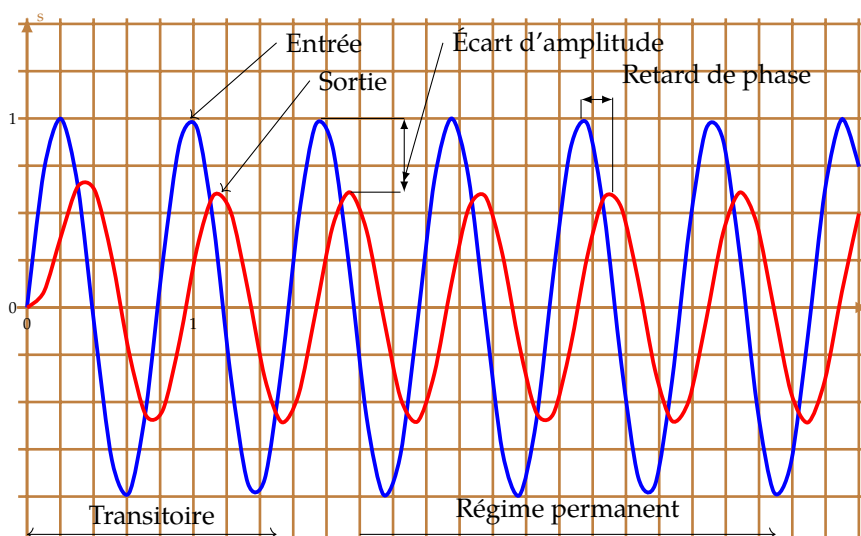


FIGURE 6.2 – Réponse fréquentielle

On constate que la réponse (pour le régime permanent) a l'allure d'une sinusoïde de même pulsation mais en retard par rapport au signal d'entrée.

Pour caractériser la réponse fréquentielle du système il est possible d'étudier l'évolution pour le régime permanent de la variation d'amplitude et du déphasage entre le signal d'entrée et la sortie (figure 6.2).

Pour un système linéaire, nous savons que la sortie en régime permanent est de même nature que l'entrée, l'équation temporelle du régime permanent de la sortie se met donc sous la forme :

$$s(t) = A_0 \cdot A(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi(\omega))$$

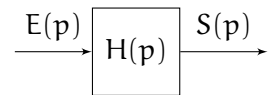
avec

- $A(\omega)$: le rapport des amplitudes du signal permanent, entre l'entrée et la sortie ;
- $\Phi(\omega)$: le déphasage entre l'entrée et la sortie.

Ces deux fonctions sont des fonctions de la pulsation ω .

6.2.1 Fonction de transfert complexe

Soit un système linéaire continu invariant (SLCI) connu par sa fonction de transfert dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert du système est par définition : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$



On note $E(p)$ et $S(p)$ les transformées dans le domaine de Laplace des fonctions temporelles $e(t)$ et $s(t)$ et $H(p)$ la fonction de transfert.

On appelle fonction de transfert complexe (ou **transmittance isochrone**) la fonction obtenue en remplaçant la variable de Laplace p par le terme imaginaire pur $j \cdot \omega$:

$$H(j \cdot \omega) = \frac{S(j \cdot \omega)}{E(j \cdot \omega)}$$

Cette fonction est une fonction complexe de la variable ω , comme toute fonction complexe, pour en réaliser l'étude, on peut soit s'intéresser :

- à la partie réelle et à la partie imaginaire,
- au module et à l'argument.

6.2.2 Lieux de transfert

On appelle lieux de transfert, le tracé des différentes représentations graphiques de la fonction de transfert $H(j \cdot \omega)$. Seule la représentation graphique des lieux de transfert par les diagrammes de **Bode** est au programme.

À partir de cette représentation graphique, nous pourrions caractériser le comportement global du système linéaire (passe-bas, passe-bande, résonance, ...).

6.3 Étude des SLCI à partir des diagrammes de Bode

6.3.1 Diagrammes de Bode

Les diagrammes de Bode représentent séparément le module et la phase de la fonction $H(j \cdot \omega)$. On note :

- $A(\omega) = |H(j \cdot \omega)|$ le module,
- $\Phi(\omega) = \arg(H(j \cdot \omega))$ l'argument.

Pour ces diagrammes :

6.3 Étude des SLCI à partir des diagrammes de Bode

- l'abscisse est une échelle logarithmique de la pulsation : $\log_{10}(\omega)$;
- l'ordonnée du diagramme d'amplitude est graduée en décibels (dB) :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10}(|H(j\omega)|),$$

- l'ordonnée du diagramme de phase, en degré ou radian.

On superpose en général au tracé exact le tracé asymptotique, celui-ci est souvent suffisant pour analyser la fonction. La figure 6.3 montre un exemple de tracé des diagrammes de Bode.

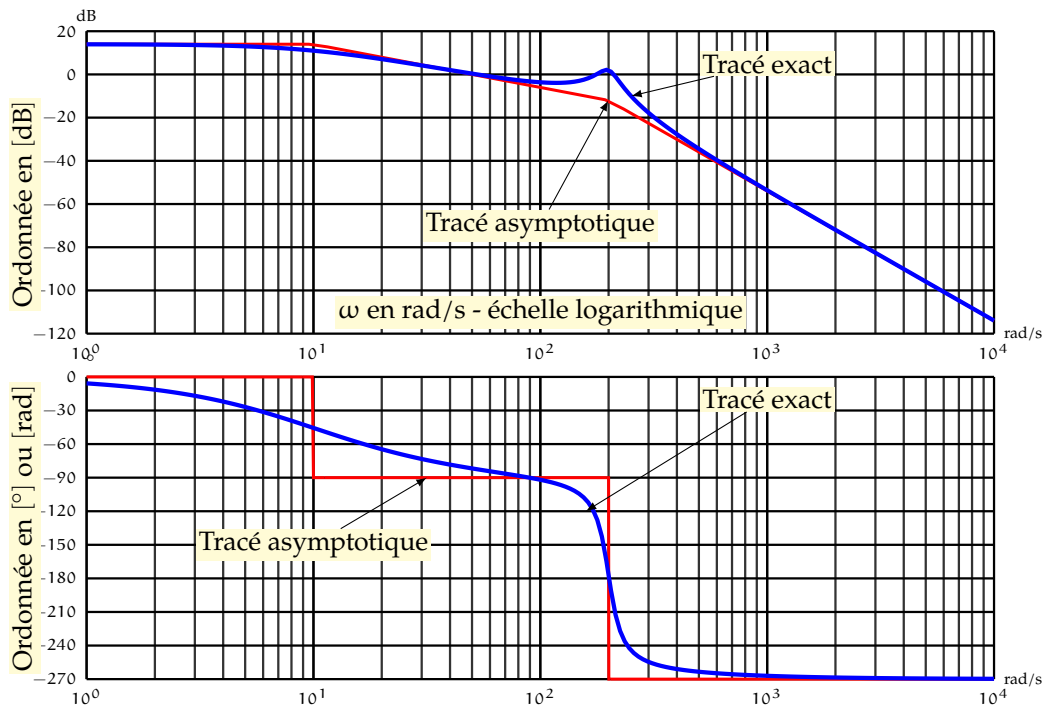
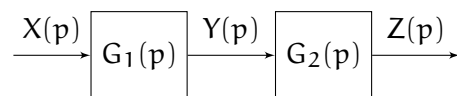


FIGURE 6.3 – Diagrammes de Bode

6.3.2 Propriétés graphiques des diagrammes de Bode

Soit un système linéaire décrit par le schéma-bloc ci-contre :

$$G(p) = G_1(p) \cdot G_2(p)$$



Soit en complexe avec $p = j \cdot \omega$

$$G(j \cdot \omega) = G_1(j \cdot \omega) \cdot G_2(j \cdot \omega)$$

d'où le module réel

$$|G(j \cdot \omega)| = |G_1(j \cdot \omega)| \cdot |G_2(j \cdot \omega)|$$

et le module en dB et puis l'argument

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log (|G_1(j \cdot \omega)|) + 20 \log (|G_2(j \cdot \omega)|) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$$

$$\arg (G(j \cdot \omega)) = \arg (G_1(j \cdot \omega)) + \arg (G_2(j \cdot \omega))$$

Le module en décibels et l'argument d'un produit de fonction de transfert s'obtient donc en ajoutant le module en décibels et l'argument des différentes fonctions.

Graphiquement, il suffit donc d'ajouter les diagrammes de Bode des fonctions $G_1(j \cdot \omega)$ et $G_2(j \cdot \omega)$ aussi bien pour le diagramme d'amplitude que pour le diagramme des phases pour obtenir les diagrammes de $G(j \cdot \omega)$ avec $G(p) = G_1(p) \cdot G_2(p)$.

6.4 Système du premier ordre

Un système du premier ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \tau : \text{constante de temps} \\ K : \text{gain statique} \end{array}$$

On pose : $e(t) \xrightarrow{L} E(p)$ et $s(t) \xrightarrow{L} S(p)$. On se place dans les conditions de Heaviside.
Fonction de transfert et schéma-bloc d'un système du premier ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \quad \begin{array}{c} E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{1 + \tau \cdot p}} \longrightarrow S(p) \end{array}$$

6.4.1 Représentation fréquentielle

On obtient la fonction de transfert complexe en posant $p = j \cdot \omega$:

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 + \tau \cdot j \cdot \omega}$$

On détermine rapidement :

— la partie réelle :

$$\operatorname{Re}(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$$

— le module :

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$$

— la partie imaginaire :

$$\operatorname{Im}(j \cdot \omega) = \frac{-K \cdot \tau \cdot \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$$

— l'argument :

$$\Phi(\omega) = -\arctan(\tau \cdot \omega)$$

— le module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log(A(\omega)) = 20 \cdot \log\left(\frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}\right)$$

soit en développant,

$$A_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)$$

La figure 6.4 présente l'allure des diagrammes de Bode d'un système du premier ordre.

Diagramme d'amplitude : le diagramme d'amplitude présente deux asymptotes

— une horizontale lorsque $\omega \rightarrow 0$: $\lim_{\omega \rightarrow 0} (A_{dB}(\omega)) = 20 \cdot \log K$;

— une asymptote de pente -20dB/dec (décibel par décade) lorsque $\omega \rightarrow \infty$;

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} (A_{dB}(\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} (20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} (20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(\tau^2 \cdot \omega^2)) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} (20 \cdot \log K - 20 \cdot \log(\tau) - 20 \cdot \log(\omega)) \end{aligned}$$

6.4 Système du premier ordre

L'amplitude en décibel $A_{dB}(\omega)$ tend asymptotiquement vers $20 \cdot \log K - 20 \cdot \log(\tau) - 20 \cdot \log(\omega)$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$.

L'abscisse évoluant en $\log \omega$, chaque fois que la pulsation augmente d'une décade ($\times 10$) l'amplitude en décibels diminue de 20dB/dec;

- les asymptotes se croisent pour la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$;
- le diagramme asymptotique en amplitude est assez proche de la courbe réelle et suffit en général pour étudier la fonction;
- pour la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ l'écart par rapport au point d'intersection des asymptotes est de -3dB ;

$$A_{dB}\left(\frac{1}{\tau}\right) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log\left(1 + \tau^2 \cdot \left(\frac{1}{\tau}\right)^2\right)$$

$$A_{dB}\left(\frac{1}{\tau}\right) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(2) = 20 \cdot \log K - 3 \text{ dB}$$

- pour les pulsations double $2 \cdot \omega_c$ et moitié $\frac{\omega_c}{2}$ l'écart est de -1dB par rapport aux asymptotes.

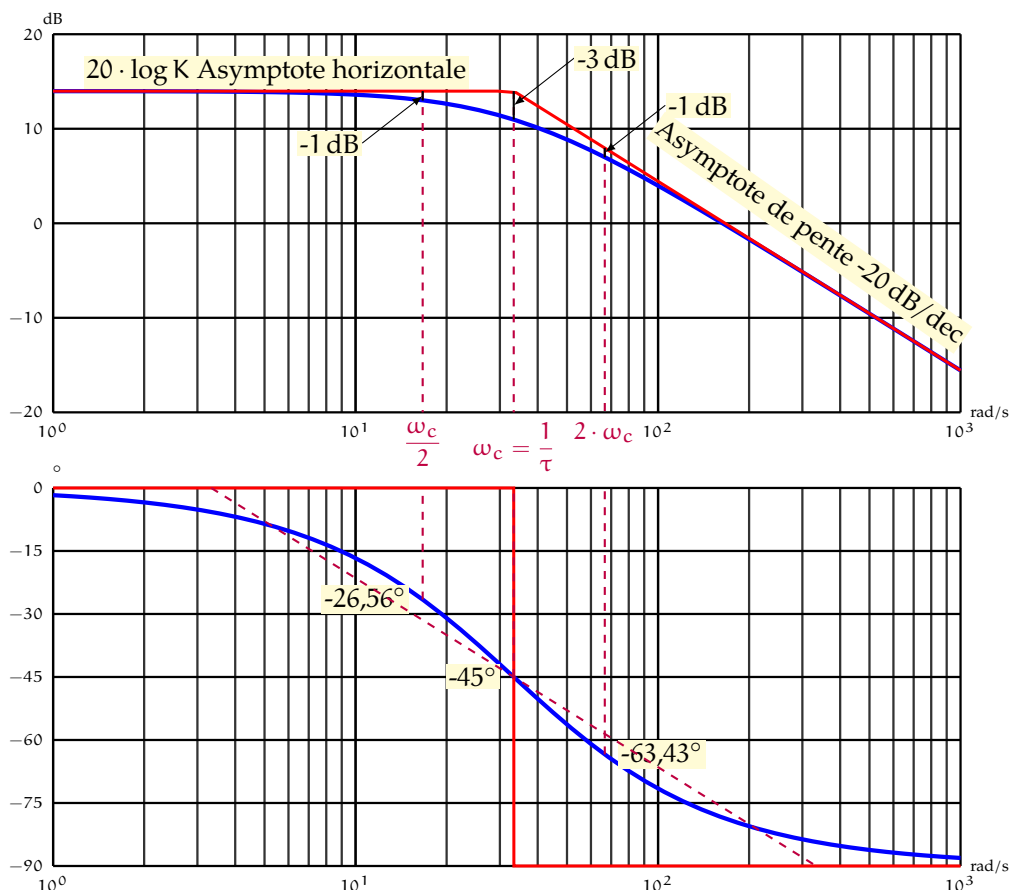


FIGURE 6.4 – Diagrammes de Bode - Système du 1^{er} ordre

Diagramme de phase : le diagramme des phases présente lui aussi deux asymptotes :

- lorsque $\omega \rightarrow 0$, $\lim_{\omega \rightarrow 0} (\Phi(\omega)) = 0$;
- lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\Phi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} (= -90^\circ)$.

- Le diagramme asymptotique à la forme d'une marche d'escalier, il n'est pas suffisamment précis pour représenter correctement l'évolution de la phase. Pour mieux approcher le tracé, il est possible de tracer le segment passant par les points $(\log(\frac{1}{10\tau}), 0)$ et $(\log(\frac{10}{\tau}), -90)$ (en pointillés sur le graphe, attention ce n'est pas une tangente mais uniquement une aide de tracé!).
- Quelques valeurs particulières de l'argument :
 - pulsation de cassure : $\Phi(\omega_c) = -45^\circ$
 - pulsation moitié : $\Phi(\frac{\omega_c}{2}) = -\arctan(\tau \cdot \frac{\omega_c}{2}) \approx -26,56^\circ$
 - pulsation double : $\Phi(2 \cdot \omega_c) = -\arctan(\tau \cdot 2 \cdot \omega_c) \approx -63,43^\circ$

6.4.2 Premier ordre au numérateur

Soit la fonction définie par le polynôme du premier degré :

$$N_1(p) = (1 + \tau \cdot p).$$

On se propose de comparer ce polynôme à la fonction de transfert du premier ordre :

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p}.$$

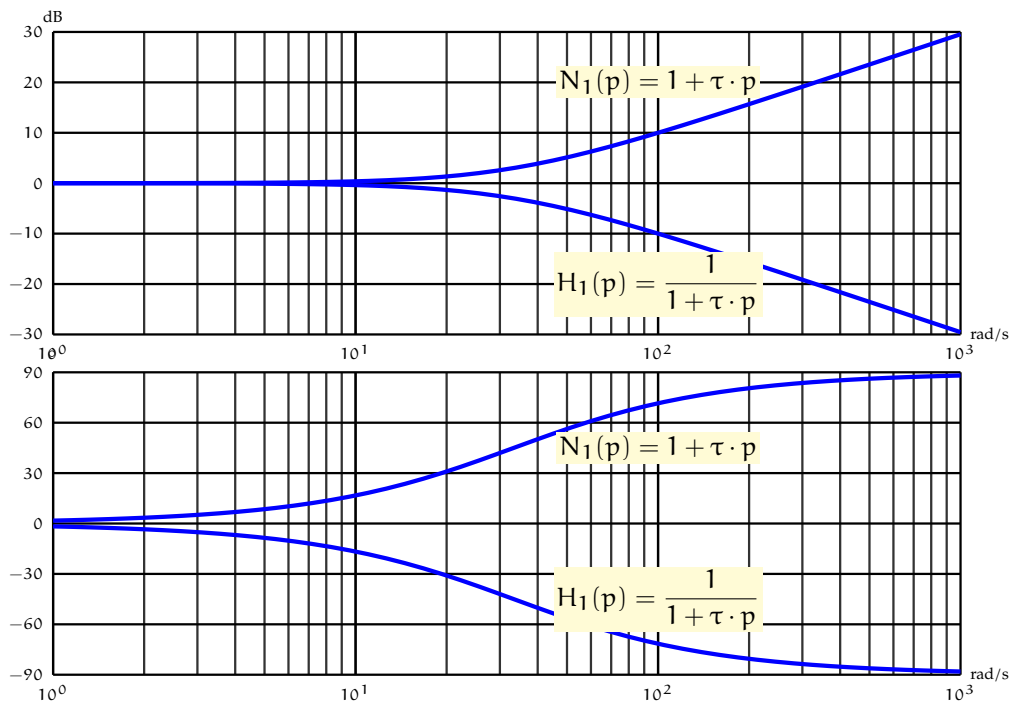


FIGURE 6.5 – Diagrammes de Bode - 1^{er} ordre au numérateur

- Le module se déduit directement de $|N_1(j \cdot \omega)| = \left| \frac{1}{H_1(j \cdot \omega)} \right|$,
soit en décibel

$$20 \log (|N_1(j \cdot \omega)|) = 20 \log \left(\left| \frac{1}{H_1(j \cdot \omega)} \right| \right) = -20 \log (|H_1(j \cdot \omega)|)$$

— L'argument se déduit de la même manière

$$\arg(N_1(j \cdot \omega)) = \arg\left(\frac{1}{H_1(j \cdot \omega)}\right) = -\arg(H_1(j \cdot \omega))$$

On constate donc que le tracé (fig. 6.5) des diagrammes de Bode d'un polynôme du premier ordre est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du diagramme de Bode d'une fonction de transfert du premier ordre (pour un gain unitaire $K = 1$). Cela est généralisable quel que soit l'ordre de la fonction de transfert.

6.5 Système du second ordre

6.5.1 Rappels

Un système du second ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

avec

— K : gain

— ω_n : pulsation propre $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

— ξ : coefficient (facteur) d'amortissement

La fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + 1}$$

6.5.2 Représentation fréquentielle

À partir de la fonction de transfert d'un second ordre on détermine la fonction de transfert complexe :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \cdot 2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}$$

On déduit :

— la partie réelle :

$$\text{Re}(\omega) = \frac{K \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

— la partie imaginaire :

$$\text{Im}(\omega) = -\frac{2 \cdot K \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

— le module :

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

— le module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log K - 10 \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)$$

— l'argument :

$$\Phi(\omega) = -\arctan \left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \right)$$

Nous avons vu, lors de l'étude de la réponse temporelle, que l'allure de cette réponse dépend du coefficient d'amortissement ξ . Étudions donc dans un premier temps le module et l'influence de ξ sur celui-ci.

Soit $A_1(u)$, le module réduit déduit du module de la fonction de transfert, en posant $u = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$A_1(u) = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot u)^2}}$$

Calculons la dérivée par rapport à u :

$$\frac{dA_1(u)}{du} = K \frac{d}{du} \left((1-u^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot u)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = K \frac{4 \cdot u (u^2 + 2 \cdot \xi^2 - 1)}{\left((1-u^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot u)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Le numérateur s'annule pour :

— $u = 0$ soit $\omega = 0$ cette racine correspond à une asymptote horizontale dans le diagramme de Bode en amplitude,

— $u^2 + 2 \cdot \xi^2 - 1 = 0$, cette équation n'admet de racines réelles que pour $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, la racine est alors

$$u_r = \frac{\omega_r}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} \text{ soit } \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}.$$

On appelle **pulsation de résonance** la pulsation :

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}.$$

Pour cette pulsation, le module présente un maximum :

$$A(\omega_r) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega_r}{\omega_n} \right)^2}} = \frac{K}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

On définit Q_r , le **coefficient de résonance** (ou facteur de surtension) tel que

$$Q_r = \frac{A(\omega_r)}{A(\omega_0)} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Le tracé du module (fig. 6.6) d'un système du second ordre dépend donc de la valeur du coefficient d'amortissement.

— $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$: présence d'un maximum pour la pulsation de résonance ω_r ;

— $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi$: pas de maximum.

L'argument lui ne présente pas de maximum :

$$\Phi(\omega) = -\arctan \left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \right).$$

Il est possible d'affiner encore cette étude, en étudiant la forme de la fonction de transfert en fonction de ξ . On distingue trois cas en fonction des racines du polynôme du dénominateur de la fonction de transfert du second ordre :

$$D(p) = 1 + \frac{2 \cdot \xi \cdot p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2} = 0$$

— $0 < \xi < 1$: les deux racines du dénominateur sont complexes conjuguées, la fonction de transfert ne peut être simplifiée, l'étude a été réalisée précédemment :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} p + 1}$$

— $\xi > 1$: les deux racines sont réelles, la fonction de transfert alors peut se mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions du premier ordre :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

— module :

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T_1^2 \cdot \omega^2} \cdot \sqrt{1 + T_2^2 \cdot \omega^2}}$$

— module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log(\sqrt{1 + T_1^2 \cdot \omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + T_2^2 \cdot \omega^2})$$

— l'argument :

$$\Phi(\omega) = -\arctan(T_1 \cdot \omega) - \arctan(T_2 \cdot \omega)$$

— $\xi = 1$: le dénominateur possède une racine réelle double, la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T \cdot p)^2}$$

— module :

$$A(\omega) = \frac{K}{1 + T^2 \cdot \omega^2}$$

— module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log(1 + T^2 \cdot \omega^2)$$

— argument :

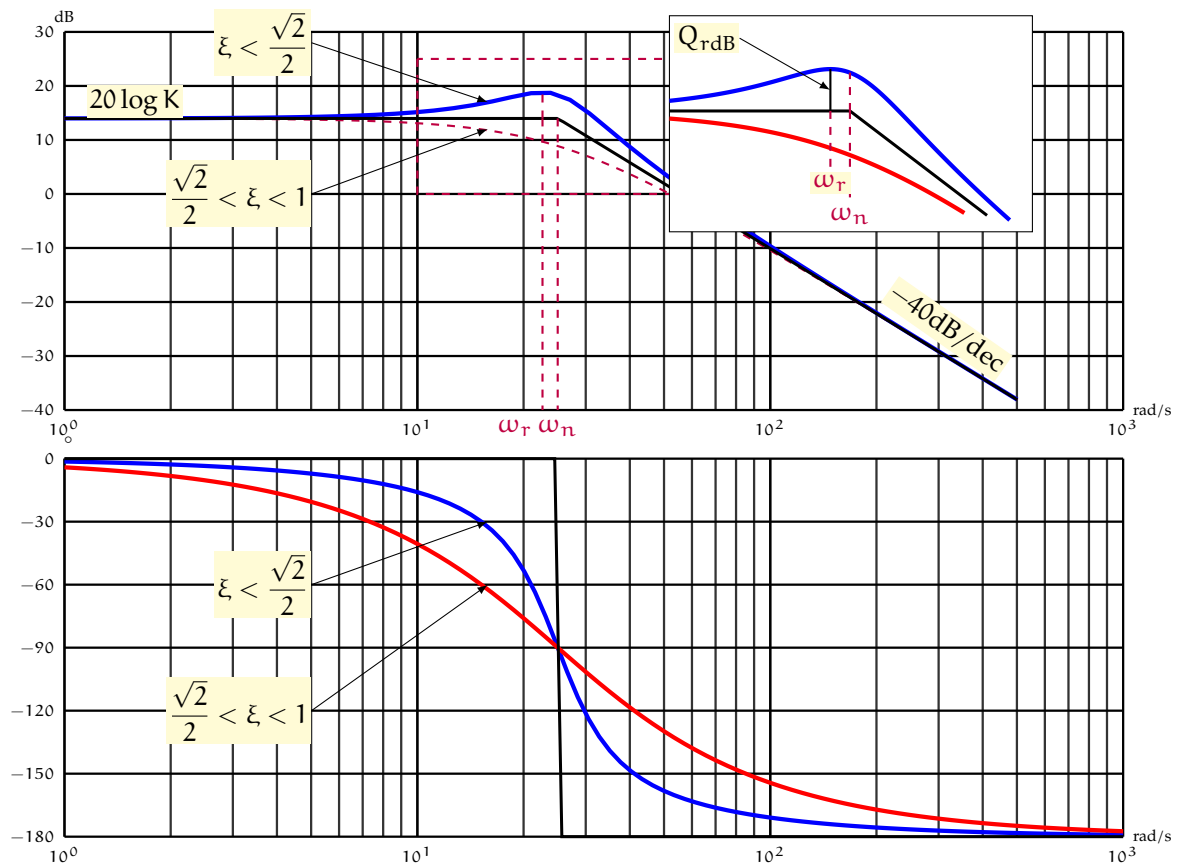
$$\Phi(\omega) = -2 \cdot \arctan(T \cdot \omega)$$

Nous allons donc considérer pour l'étude fréquentielle du second ordre, les quatre cas suivant :

Cas $0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$: 2 racines complexes conjuguées et résonance

La fonction de transfert s'écrit : $H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \cdot 2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}$. On déduit les diagrammes de

Bode de la figure 6.6.

FIGURE 6.6 – Diagrammes de Bode 2^d ordre - 2 racines complexes**Diagramme d'amplitude :**

- une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \log K$ lorsque $\omega \rightarrow 0$;
- une asymptote de pente -40dB/dec lorsque $\omega \rightarrow +\infty$: lorsque ω augmente d'une décade, l'amplitude en décibel diminue de 40 dB. Montrons que $A_{\text{dB}}(\omega)$ tend asymptotiquement vers $20 \log K + 40 \log(\omega_n) - 40 \log(\omega)$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} (A_{\text{dB}}(\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(20 \log K - 10 \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) \right) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(20 \log K - 10 \log \left(\frac{\omega^4}{\omega_n^4} \right) \right) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(20 \log K + 40 \log(\omega_n) - 40 \log(\omega) \right) \end{aligned}$$

- les deux asymptotes se croisent pour $\omega = \omega_n$ la pulsation propre;
- le diagramme d'amplitude présente un maximum pour la pulsation dite pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$$

On note

$$Q_r = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

le facteur de résonance ;

- le module pour la pulsation propre ω_n est : $|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot \xi}$.

Diagramme de phase :

- une asymptote horizontale d'ordonnée 0° lorsque $\omega \rightarrow 0$,
- une d'ordonnée -180° lorsque $\omega \rightarrow +\infty$,
- $\Phi(\omega_n) = \arg(H(j \cdot \omega_n)) = -90^\circ$.

Cas $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z < 1$: 2 racines complexes conjuguées sans résonance

On retrouve les mêmes asymptotes que dans le cas précédent, mais le diagramme d'amplitude ne présente pas de maximum (tracé en pointillés de la figure 6.6), le tracé est toujours sous les asymptotes et très proche de celle-ci (l'écart est au maximum de -6dB si $z = 1$ pour la pulsation ω_n).

Le module pour la pulsation propre ω_n est : $|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot \xi} \geq -6\text{dB}$.

Cas $z > 1$: 2 racines réelles

Lorsque $z > 1$, la fonction de transfert peut se décomposer en un produit de deux premiers ordres,

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

le tracé des diagrammes de Bode est donc la somme graphique des deux tracés du premier ordre (cf. figure 6.7).

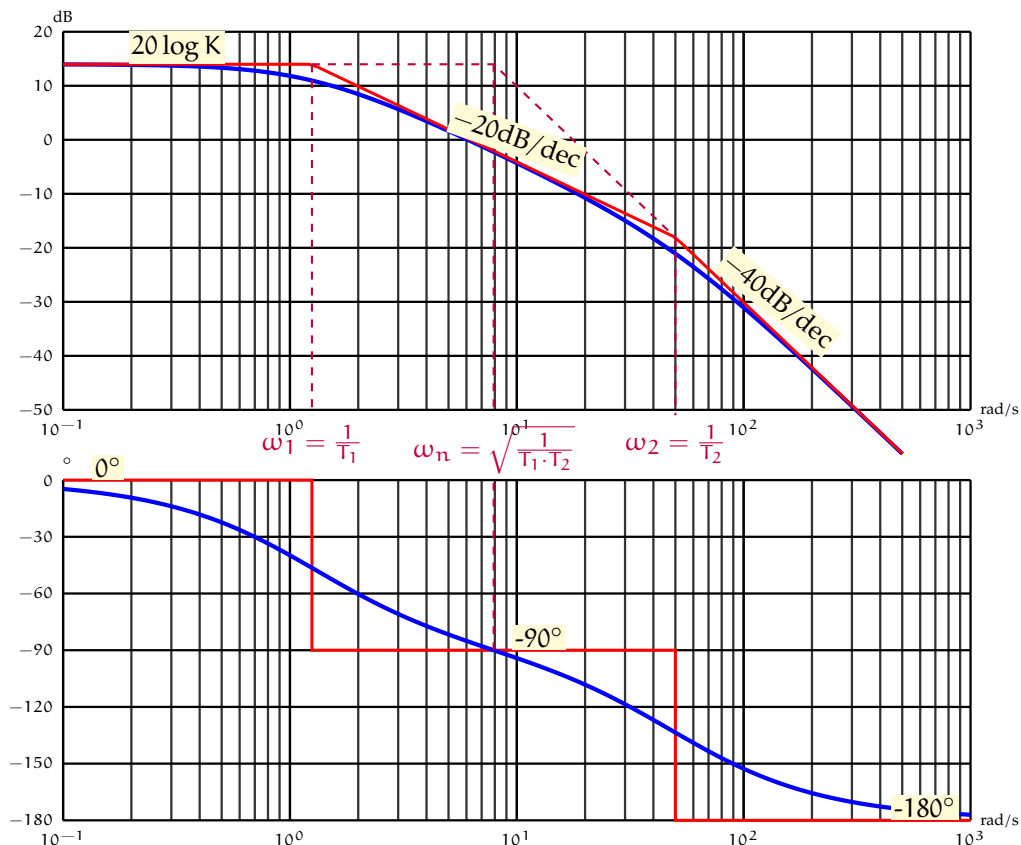


FIGURE 6.7 – Diagrammes de Bode 2^d ordre - 2 racines réelles

Les deux pulsations de cassure sont $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ (pour la suite $\omega_1 < \omega_2$).

Le diagramme d'amplitude présente donc 3 asymptotes :

- une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \log K$ lorsque $\omega \rightarrow 0$, ($\log \omega \rightarrow -\infty$), jusqu'à la pulsation $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$;
- une asymptote de pente -20dB/dec entre ω_1 et ω_2 ;

— une asymptote de pente -40dB/dec au-delà de ω_2 .

Remarque : parler d'asymptote entre ω_1 et ω_2 est un abus de langage communément admis en automatique.

Le diagramme des phases présente lui aussi 3 asymptotes :

— une asymptote horizontale d'ordonnée 0° lorsque $\omega \rightarrow 0$, jusqu'à ω_1 ;

— une asymptote horizontale d'ordonnée -90° entre ω_1 et ω_2 ;

— une asymptote horizontale d'ordonnée -180° au-delà de ω_2 .

Quelques valeurs et points particuliers :

— pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} = \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}$;

— sur le diagramme d'amplitude, l'asymptote horizontale et l'asymptote à -40dB/dec se croisent pour $\omega = \omega_n$;

— l'argument pour la pulsation propre est : $\arg(H(j\omega_n)) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$;

— le module pour la pulsation propre est : $|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot \xi}$

Cas $z = 1$: 1 racine réelle double

La fonction de transfert est un premier ordre au carré : $H(p) = \frac{K}{(1 + T \cdot p)^2}$

Le tracé des diagrammes de Bode se déduit donc directement du tracé d'un système du premier ordre ; ils possèdent donc les particularités suivantes que l'on retrouve sur la figure 6.8.

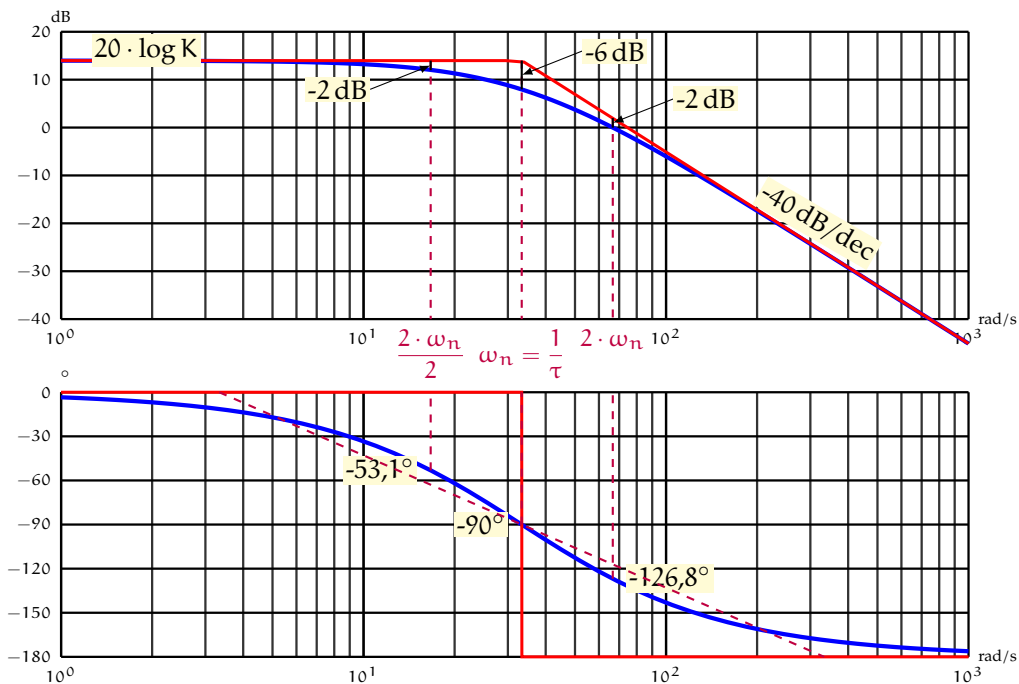


FIGURE 6.8 – Diagrammes de Bode 2^d - 1 racine double

— Diagramme d'amplitude

— une asymptote horizontale ($20 \log K$) lorsque $\omega \rightarrow 0$ et une asymptote de pente -40dB/dec ($2 \times (-20\text{dB/dec})$) lorsque $\omega \rightarrow \infty$;

— pour la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{T}$, l'écart par rapport à l'asymptote est de -6dB ($2 \times (-3 \text{ dB})$), l'écart par rapport aux asymptotes est de -2dB pour les pulsations double et moitié ;

— Diagramme des phases

— une asymptote d'ordonnée 0° lorsque $\omega \rightarrow 0$;

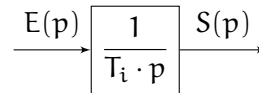
6.6 Intégrateur

- une d'ordonnée -180° lorsque $\omega \rightarrow +\infty$;
- pour ω_c l'argument de la fonction de transfert est de -90° ;
- comme pour un système du premier ordre il est utile de tracer le segment entre $(\log(\frac{1}{10\tau}), 0^\circ)$ et $(\log(\frac{10}{\tau}), -180^\circ)$ pour mieux approcher le tracé réel.

6.6 Intégrateur

Fonction de transfert :

$$H_i(p) = \frac{1}{T_i \cdot p}$$



Fonction de transfert complexe :

$$H_i(j\omega) = \frac{1}{T_i \cdot j \cdot \omega}$$

— Module :

$$|H_i(j\omega)| = \frac{1}{T_i \cdot \omega}$$

— Module en dB :

$$|H_i(j\omega)|_{dB} = -20 \log \omega - 20 \log T_i$$

— Argument :

$$\arg(H_i(j\omega)) = -90^\circ$$

Le diagramme d'amplitude (fig 6.9) d'un intégrateur est une droite de pente -20dB/dec passant par $-20 \log T_i$ pour $\omega = 1$ ($\log \omega = 0$).

Le diagramme de phase est une droite horizontale d'ordonnée -90° .

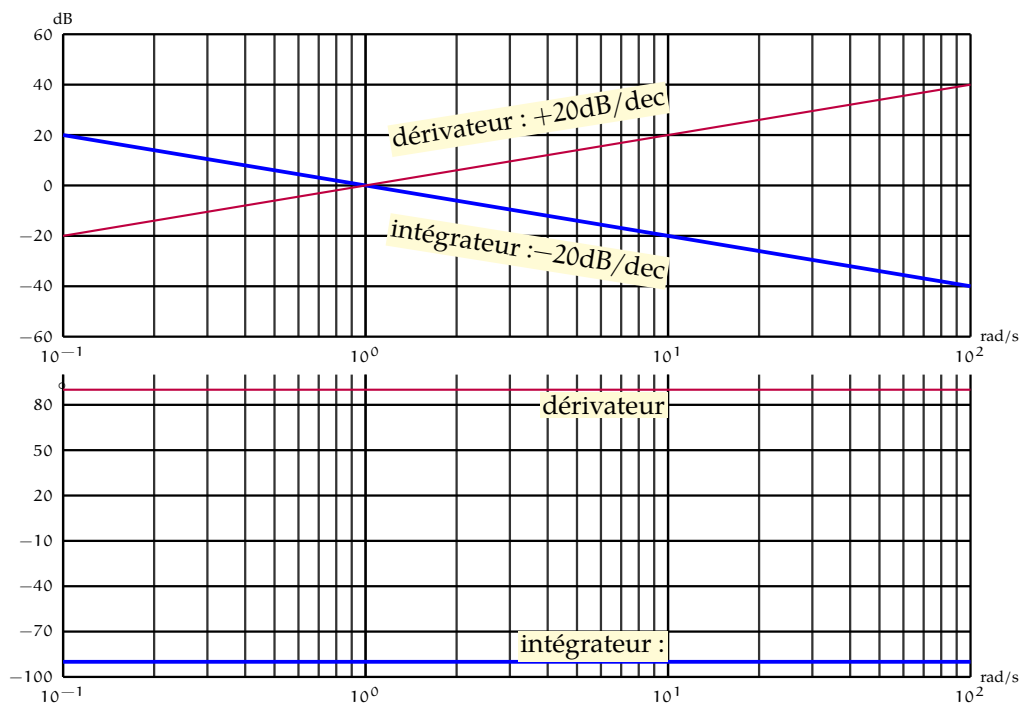


FIGURE 6.9 – Diagrammes de Bode - Intégrateur - Dérivateur

6.7 Dérivateur

Fonction de transfert :

$$H_d(p) = T_d \cdot p$$

Fonction de transfert complexe :

$$H_d(j\omega) = T_d \cdot j \cdot \omega$$

— Module :

$$|H_d(j\omega)| = T_d \cdot \omega$$

— Module en dB :

$$|H_d(j\omega)|_{dB} = +20 \log \omega + 20 \log T_d$$

— Argument :

$$\arg(H_d(j\omega)) = +90^\circ$$

Diagrammes de Bode (fig 6.9)

Le diagramme d'amplitude d'un dérivateur est une droite de pente +20dB/dec passant par +20 log T_d pour $\omega = 1$.

Le diagramme de phase est une droite horizontale d'ordonnée +90°.

6.8 Retard pur

Soit un système tel que la sortie est en retard sur l'entrée d'un temps τ :

$$s(t) = e(t - \tau).$$

Le théorème du retard nous permet d'écrire en passant dans le domaine de Laplace :

$$\begin{array}{c} E(p) \longrightarrow \boxed{R(p) = e^{-\tau \cdot p}} \longrightarrow S(p) \end{array}$$

$$S(p) = e^{-\tau p} \cdot E(p)$$

La transformée de Laplace d'un retard pur est donc :

$$R(p) = e^{-\tau \cdot p}$$

On en déduit la fonction de transfert complexe :

$$R(j \cdot \omega) = e^{-\tau \cdot j \cdot \omega} = R(j \cdot \omega) = \cos \tau \omega - j \sin \tau \omega$$

Le module est constant,

$$|R(j \cdot \omega)| = 1$$

L'argument est constamment décroissant (cf. figure 6.10)

$$\arg(R(j \cdot \omega)) = -\tau \omega$$

6.8.1 Influence d'un retard sur le tracé d'un lieu de Bode

Pour évaluer l'effet d'un retard sur le lieu de Bode, nous allons étudier la fonction de transfert d'un retard pur associé à un premier ordre,

$$H(p) = e^{-\tau p} \frac{1}{1 + T \cdot p}.$$

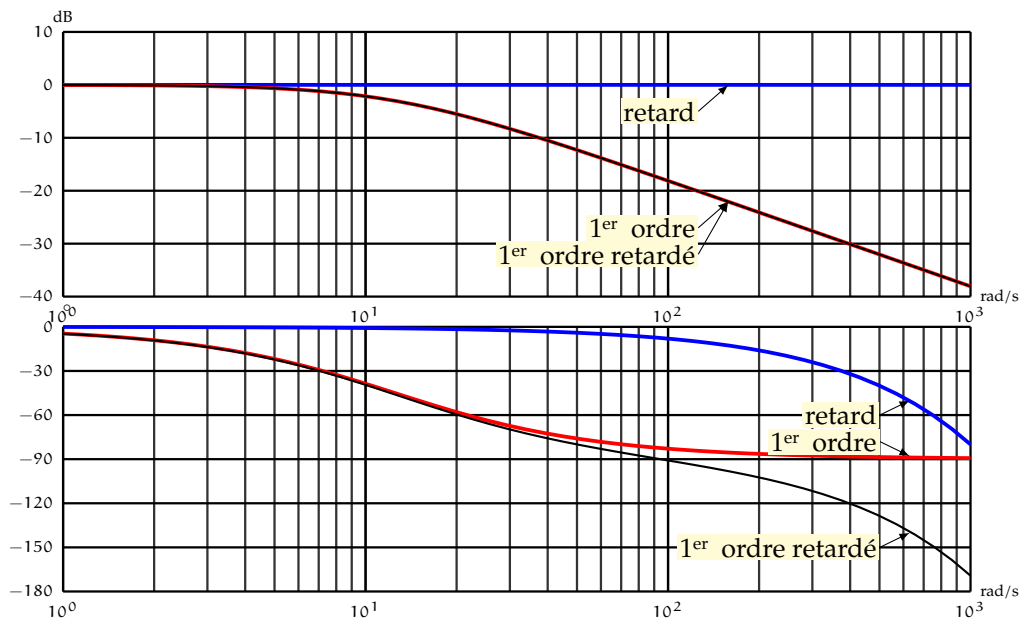


FIGURE 6.10 – Diagrammes de Bode - Influence d'un retard

Fonction de transfert complexe,

$$H(j \cdot \omega) = e^{-\tau j \cdot \omega} \frac{1}{1 + T \cdot j \cdot \omega}$$

— module :

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{K}{1 + j \cdot \tau \cdot \omega} \right|$$

— argument :

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan(\tau \cdot \omega) - \tau_1 \cdot \omega$$

On remarque sur la figure 6.10 que le module n'est pas influencé par le retard (les deux tracés sont superposés), par contre l'argument est diminué de $\tau \cdot \omega$.

Un retard augmente le déphasage entre l'entrée et la sortie du système. Nous verrons plus loin, lors de l'étude de la stabilité des systèmes asservis, que cet effet est fortement préjudiciable à la stabilité des systèmes.

6.9 Généralisation du tracé des diagrammes de Bode

Toute fonction de transfert sans retard peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_m p^m}$$

avec

- n : degré du polynôme du numérateur ;
- m : degré du polynôme dénominateur ;
- K : le gain statique ;
- α : la classe de la fonction de transfert.

Le numérateur et le dénominateur sont deux polynômes, pour les systèmes physiques, le degré global du dénominateur est supérieur au degré du numérateur : $m + \alpha - n \geq 0$.

On peut, en recherchant les racines de chaque polynôme, mettre la fonction de transfert sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\kappa}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod (1 + \tau_i \cdot p) \cdot \prod \left(1 + 2 \frac{z_j}{\omega_{n_j}} p + \frac{p^2}{\omega_{n_j}^2}\right)}{\prod (1 + \tau_k \cdot p) \cdot \prod \left(1 + 2 \frac{z_l}{\omega_{n_l}} p + \frac{p^2}{\omega_{n_l}^2}\right)}$$

La fonction de transfert s'écrit donc comme le produit de plusieurs fonctions élémentaires (premier, deuxième ordre et intégration/dérivation).

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot \dots \cdot H_I(p) \cdot \dots \cdot H_N(p)$$

Ce qui nous permet d'écrire le module et l'argument en dB :

Module en dB

$$|H(j \cdot \omega)|_{dB} = 20 \log (|H_1(j \cdot \omega)|) + \dots + 20 \log (|H_I(j \cdot \omega)|) + \dots + 20 \log (|H_N(j \cdot \omega)|)$$

Argument

$$\text{Arg}(H(j \cdot \omega)) = \text{Arg}(H_1(j \cdot \omega)) + \dots + \text{Arg}(H_I(j \cdot \omega)) + \dots + \text{Arg}(H_N(j \cdot \omega))$$

Les diagrammes de Bode de la FT s'obtiennent en sommant graphiquement les diagrammes de Bode de chaque fonction élémentaire.

Comportement lorsque $\omega \rightarrow \infty$

— Argument

- une fonction du premier ordre apporte un déphasage maximal (à l'infini) de -90° si elle est au dénominateur et de $+90^\circ$ si elle est au numérateur,
- une fonction du second ordre apporte un déphasage maximal de -180° si elle est au dénominateur et de $+180^\circ$ si elle est au numérateur,
- un intégrateur apporte lui un déphasage constant de -90° et le dérivateur de $+90^\circ$.

Ces déphasages s'ajoutant, on peut déduire que le déphasage total de la fonction de transfert lorsque la pulsation augmente tend vers :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(H(j \cdot \omega)) = (n - m - \alpha) \cdot 90^\circ$$

— Module

- le tracé du lieu de Bode d'un premier ordre tend vers une asymptote de pente -20dB/dec s'il est dénominateur et de $+20\text{dB/dec}$ s'il est au numérateur,
- un second ordre tend vers une asymptote de pente -40dB/dec s'il est dénominateur et de $+40\text{dB/dec}$ s'il est au numérateur,
- le lieu de Bode d'un intégrateur est une droite de pente -20dB/dec et de $+20\text{dB/dec}$ pour un dérivateur.

Ces pentes s'ajoutent, on peut donc déduire que l'asymptote finale a une pente de

$$(n - m - \alpha) 20\text{dB/dec}$$

Comportement lorsque $\omega \rightarrow 0$

À partir de la forme factorisée de $H(p)$ décrite plus haut, on déduit que l'allure des lieux de Bode lorsque $\omega \rightarrow 0$ ne dépend que de la classe α de la fonction de transfert et K . En effet, le module en dB et l'argument de chaque fonction du premier et du second ordres sont nuls lorsque $\omega \rightarrow 0$. d'où :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (H(j \cdot \omega)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(K \cdot \frac{1}{(j \cdot \omega)^\alpha} \right)$$

6.9 Généralisation du tracé des diagrammes de Bode

- $\alpha = 0$
 - l'argument tend vers 0,
 - le module tend lui vers : $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j \cdot \omega)|_{\text{dB}} = 20 \log K$
- $\alpha > 0$
 - l'argument tend vers une asymptote horizontale d'ordonnée : $-\alpha \cdot 90^\circ$.
 - le module tend vers une asymptote d'équation : $20 \log K - \alpha \cdot 20 \cdot \log \omega$.

6.10 Feuille de travaux dirigés n°6

Exercice 1 - Identification fréquentielle

Corrigé page ??

On souhaite déterminer la fonction de transfert d'un système par une étude fréquentielle. Pour cela, on a relevé la réponse temporelle de la sortie pour plusieurs fréquences (fig 6.11a à fig 6.11f) (0,2 Hz, 0,4 Hz, 0,6 Hz, 0,8 Hz, 1 Hz, 2 Hz).

Fréquence [Hz]	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3,5
Gain ([dB])	9,5							-20
Déphasage [°]	0,5							-179

TABLEAU 6.1 – Relevés

Q1. Compléter le tableau 6.1 puis tracer les diagrammes de Bode de la fonction.

Q2. Proposer un modèle puis identifier les coefficients.

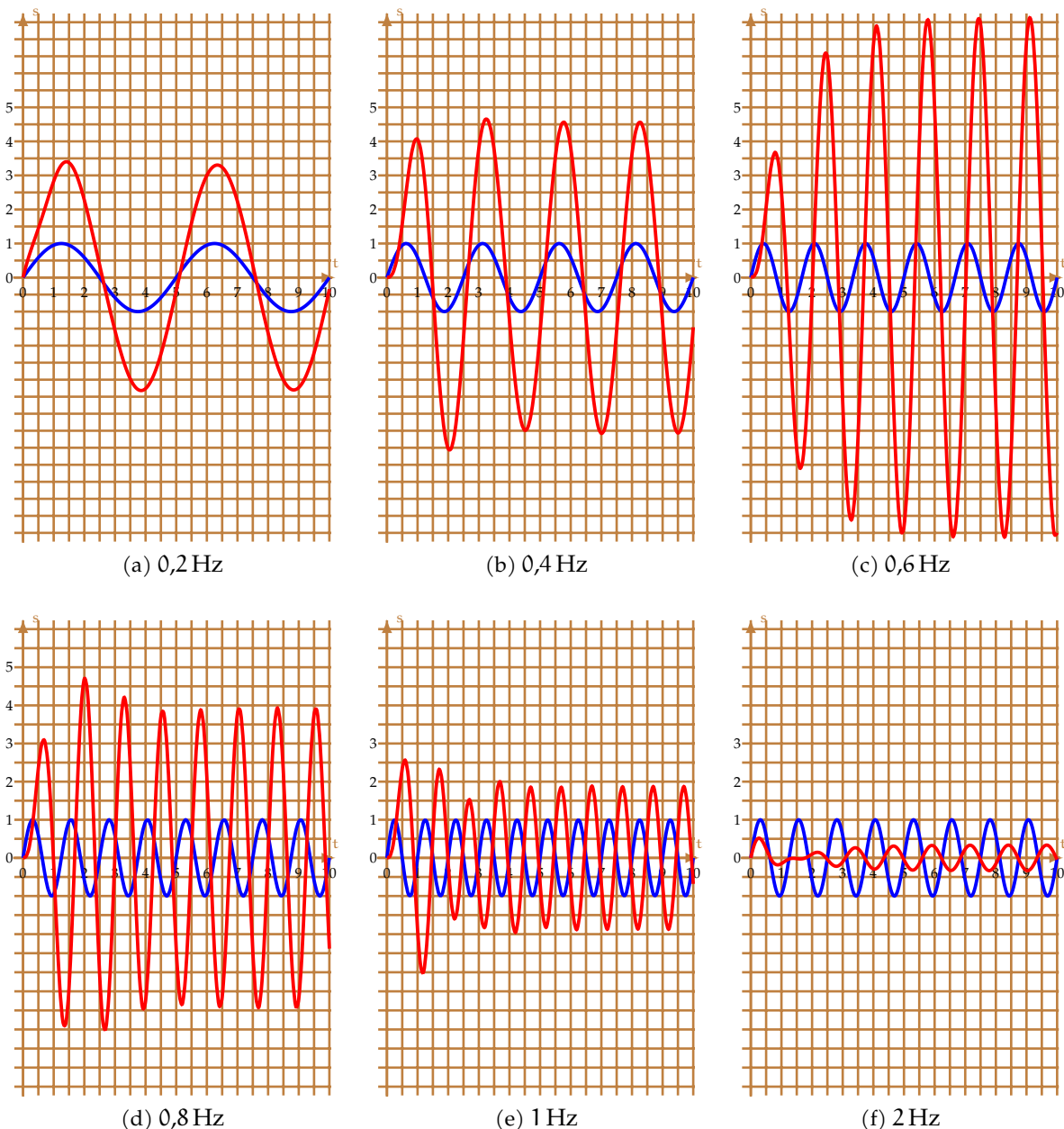


FIGURE 6.11 – Réponses fréquentielles

Exercice 2 - Automate d'exploration de l'hémostase

Extrait de CCP MP 2015

Corrigé page ??

A. Principe

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du diagnostic in vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase qui permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

Échantillon

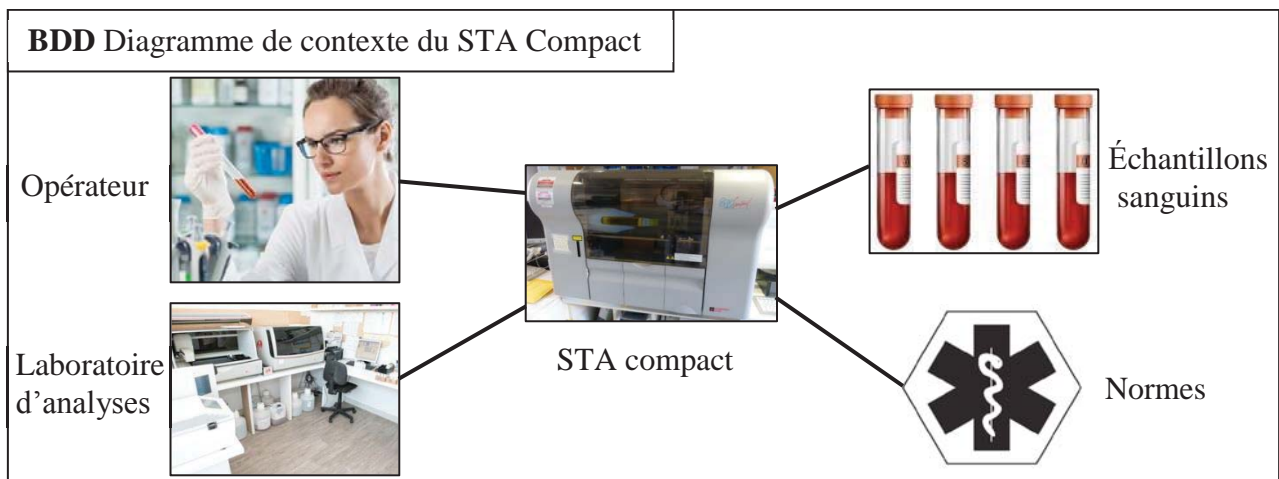


FIGURE 6.12 – Diagramme de contexte

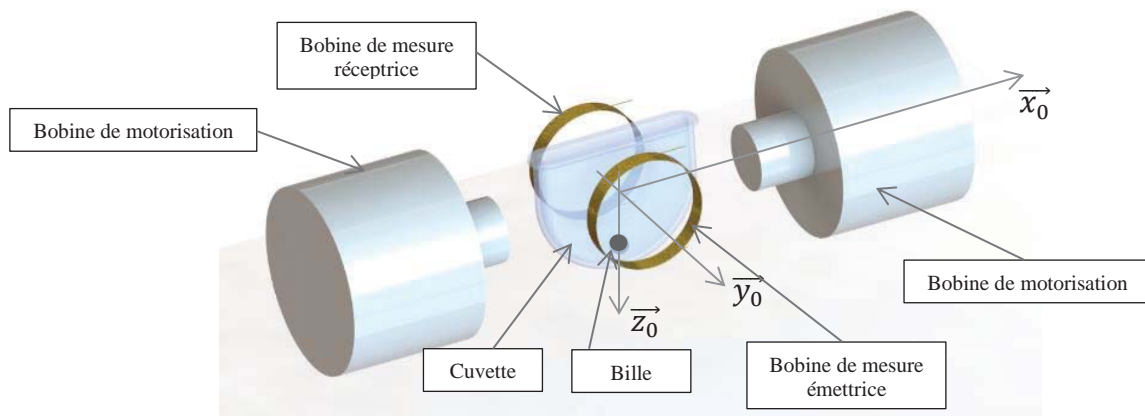


FIGURE 6.13 – Ensemble cuvette + bille avec bobines motrices et bobines de mesure

Un dispositif (cf. figure 6.13) permet de réaliser un test de chronométrie dont le principe est le suivant :

- une dose de réactif est mélangée à une dose de plasma sanguin précédemment étuvée dans une cuvette contenant une bille ;
- l'ensemble est chauffé alors que la bille est mise en oscillation dans le mélange par un champ magnétique variable induit par deux bobines de motorisation placées de part et d'autre de la tête de mesure ;

- on mesure l'amplitude de l'oscillation par deux autres bobines, l'une émettrice, l'autre réceptrice. Cette amplitude diminue sensiblement lors d'une variation de viscosité du mélange sang-réactif;
- le temps écoulé jusqu'à la diminution des oscillations donne le temps de coagulation.

B. Modélisation

Le schéma de calcul est donné ci-contre (figure 6.14). Hypothèses et données :

- la bille de masse m , de centre de masse G , de rayon $r = 1 \text{ mm}$, roule sans glisser sur un rail circulaire de rayon R dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$;
- la position de la bille sur le rail est repérée par $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- on note $f_v = 6 \cdot \pi \eta \cdot r$ le coefficient de frottement visqueux du sang sur la bille où η est le coefficient de viscosité du sang (exprimé en $\text{Pa} \cdot \text{s}$);
- on note $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega_{\text{bob}} \cdot t)$ l'action résultante des bobines de motorisation sur la bille.

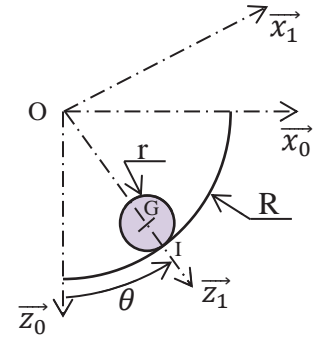


FIGURE 6.14 – Bille en contact avec le rail de la cuvette

Une étude dynamique a permis de déterminer l'équation différentielle non linéaire régissant la position de la bille :

$$\frac{7}{5} m \cdot (R - r) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + f_v \cdot (R - r) \frac{d\theta(t)}{dt} + m \cdot g \cdot \sin(\theta(t)) = F(t) \cdot \cos(\theta(t))$$

L'amplitude des oscillations étant petite, on peut considérer que $\sin(\theta) \approx \theta$ et $\cos(\theta) \approx 1$. On obtient ainsi l'équation linéaire suivante :

$$\frac{7}{5} m \cdot (R - r) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + f_v \cdot (R - r) \frac{d\theta(t)}{dt} + m \cdot g \cdot \theta(t) = F(t)$$

Q1. À partir de l'équation ci-dessus déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)}$.

Q2. Mettre $H(p)$ sous la forme canonique d'un système du second ordre dont on donnera les expressions du gain statique K_s , de la pulsation propre non amortie ω_0 et du coefficient d'amortissement ξ en fonction de f_v , R , r , m et g .

On prendra pour la suite les valeurs numériques suivantes : $\omega_0 = 21,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $K_s = 25 \text{ N}^{-1}$; $\xi = 4 \cdot f_v$.

Q3. Déterminer le module et l'argument de $H(j \cdot \omega)$ dans un premier temps de manière littérale en fonction de ω_0 , K_s et f_v puis sous forme numérique.

Q4. Déterminer le module de $H(j \cdot \omega)$ en décibel.

Q5. Pour les valeurs suivantes du coefficient de frottement visqueux : $f_{v1} = 0,005$ et $f_{v2} = 0,2$ que peut-on dire du coefficient d'amortissement? Déterminer, si elle existe, la pulsation de résonance ω_r et le coefficient de surtension Q_r . Faire l'application numérique.

Q6. Tracer pour les deux valeurs précédentes :

Q6a. les diagrammes asymptotiques de Bode de $H(j \cdot \omega)$ sur le diagramme d'amplitude et sur le diagramme de phase;

Q6b. l'allure du diagramme réel en amplitude et en phase;

Q6c. préciser les points particuliers sur les diagrammes.

Q7. La sollicitation des bobines est sinusoïdale : $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega_{\text{bob}} \cdot t)$. Préciser, en justifiant votre réponse, la valeur à laquelle il faut régler la pulsation ω_{bob} pour pouvoir observer, au mieux, l'évolution du coefficient de frottement f_v .

Q8. Exprimer le rapport $\frac{|H(0)|}{|H(j \cdot \omega_0)|}$ en fonction de ξ , en déduire η en fonction de ξ .

Nous avons considéré jusqu'à présent que f_v est constant, en fait il augmente avec le temps (suffisamment lentement pour l'étude précédente soit malgré tout valide) et l'objectif du mécanisme est de mesurer cette évolution et d'en déduire le temps de coagulation.

Q9. Comment évolue l'amplitude des oscillations de la bille en fonction du temps ?

Exercice 3 - Chaudière à bois déchiqueté

Mines AADN 2010

Corrigé page ??

A. Présentation générale

Dans le cadre du « Grenelle de l'environnement » et de la mise en place de la « taxe carbone », l'avenir du chauffage est conditionné au fait que la biomasse est neutre en dégagement de CO_2 . HARGASSNER développe la technologie du chauffage au bois déchiqueté et aux granulés de bois dans le but de concilier un chauffage à la fois écologique et confortable d'utilisation. L'entreprise est devenue un leader en matière de technique innovante, de développement, de service, de qualité et de longévité dans le domaine du chauffage au bois.

L'étude porte sur la chaudière HSV 30, alimentée en bois déchiqueté, qui développe une puissance de chauffe de 25 à 35 kW.

B. Étude de la fonction « Chauffer l'eau »

B.1. Modélisation

Par l'intermédiaire d'un échangeur thermique, la combustion des granules de bois permet de chauffer de l'eau.

L'étude porte sur la montée en température de l'eau qui sert à chauffer les pièces au travers de radiateurs. Cette température est obtenue à partir d'une puissance calorifique fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire de la chaudière.

On considère que :

- $p(t)$ est la puissance calorifique en watt fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire. Elle permet la montée en température du bâti de la chaudière ;
- l'air situé dans la chambre de combustion permet de monter à la température $\theta_e(t)$ l'eau située dans l'échangeur ;
- l'eau chaude, au travers des radiateurs permet de chauffer les pièces à une température $\theta_{ext}(t)$.

On note :

- $\theta_b(t)$ la température du bâti de la chaudière ;
- m_b la masse du bâti à monter en température : $m_b = 200 \text{ kg}$;
- c_b la capacité calorifique massique du bâti : $c_b = 500 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- $\theta_a(t)$ la température de l'air dans la chambre de combustion ;
- m_a la masse de l'air à monter en température : $m_a = 2 \text{ kg}$;
- c_a la capacité calorifique massique de l'air : $c_a = 700 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- $\theta_e(t)$ la température de l'eau dans l'échangeur et les radiateurs : $m_e = 50 \text{ kg}$;
- c_e la capacité calorifique massique de l'eau : $c_e = 4000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- θ_{ext} la température ambiante des pièces à chauffer.

Les principes de conservation de l'énergie conduit à une modélisation par les équations différentielles suivantes :

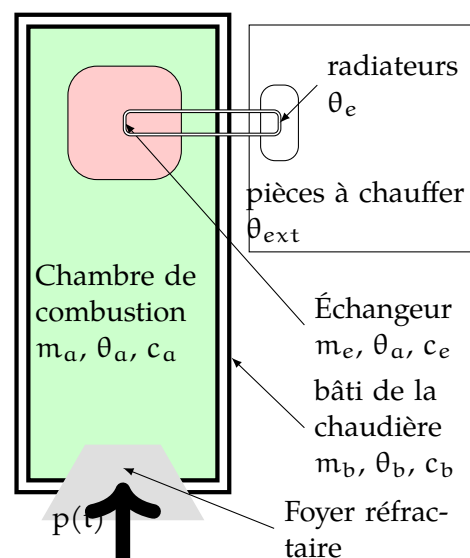


FIGURE 6.15 – Chaudière à bois

- $m_b c_b \frac{d\theta_b(t)}{dt} + K_{ab} (\theta_b(t) - \theta_a(t)) = p(t)$;
- $m_a c_a \frac{d\theta_a(t)}{dt} + K_{ae} (\theta_a(t) - \theta_e(t)) = K_{ab} [\theta_b(t) - \theta_a(t)]$;
- $m_e c_e \frac{d\theta_e(t)}{dt} + K_{ae} (\theta_e(t) - \theta_{ext}(t)) = K_{ae} [\theta_a(t) - \theta_e(t)]$.

Avec :

- K_{ab} la conductance thermique entre le bâti et l'air dans la chambre de combustion; K_{ab} la conductance thermique entre le bâti et l'air dans la chambre de combustion : $K_{ab} = 40 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- K_{ae} la conductance thermique entre l'air et l'eau au travers de l'échangeur ou des radiateurs : $K_{ae} = 400 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

On suppose que le corps de chauffe est parfaitement isolé de l'extérieur.

Les transformées de Laplace sont notées : $\mathcal{L} [\theta_i(t)] = T_i(p)$ et $\mathcal{L} [p(t)] = P(p)$.

- Q1.** En supposant que les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), donner dans le domaine de Laplace, la transformée des équations différentielles précédentes.
- Q2.** Exprimer $T_b(p)$ en fonction de $T_a(p)$ et de $P(p)$ en faisant apparaître les variables m_b , c_b et K_{ab} et mettre $T_b(p)$ sous la forme $T_b(p) = H_1(p)T_a(p) + H_2(p)P(p)$.
- Q3.** Exprimer $T_a(p)$ en fonction de $T_e(p)$ et de $T_b(p)$ en faisant apparaître les variables m_a , c_a , K_{ae} et K_{ab} puis mettre $T_a(p)$ sous la forme $T_a(p) = H_3(p)T_e(p) + H_4(p)T_b(p)$.
- Q4.** Exprimer $T_e(p)$ en fonction de $T_a(p)$ et de $T_{ext}(p)$

Finalement, le schéma-bloc global de la chaudière peut se mettre sous la forme de la figure 6.16.

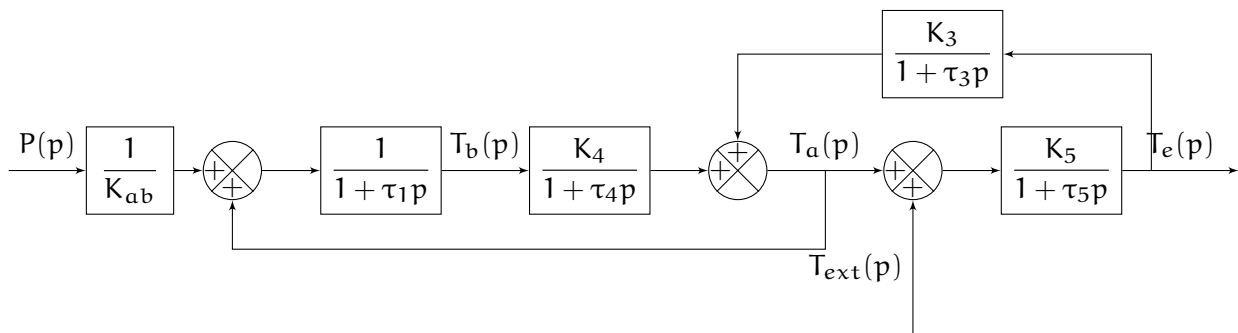


FIGURE 6.16 – Schéma bloc global

- Q5.** Par manipulations successives du schéma-bloc précédent, exprimer $\frac{T_e(p)}{P(p)}$ en considérant que $T_{ext}(p) = 0$.
- Q6.** Mettre cette expression sous la forme canonique la plus simple possible.
Compte tenu des valeurs numériques, la fonction de transfert s'écrit :

$$\frac{T_e(p)}{P(p)} \approx \frac{0,025}{10 + 35\,000 \cdot p + 1,4 \times 10^7 \cdot p^2 + 4,8 \times 10^7 \cdot p^3}$$

La figure 6.17 présente les diagrammes de Bode de la fonction de transfert de $H(p)$.

Suite à la simplification des équations de la thermodynamique, le système peut se modéliser par la fonction de transfert simplifiée $H_s(p)$ suivante :

$$H_s(p) = \frac{T_e(p)}{P(p)} = \frac{1}{400 (1 + 450 \cdot p) (1 + 3\,050 \cdot p)}$$

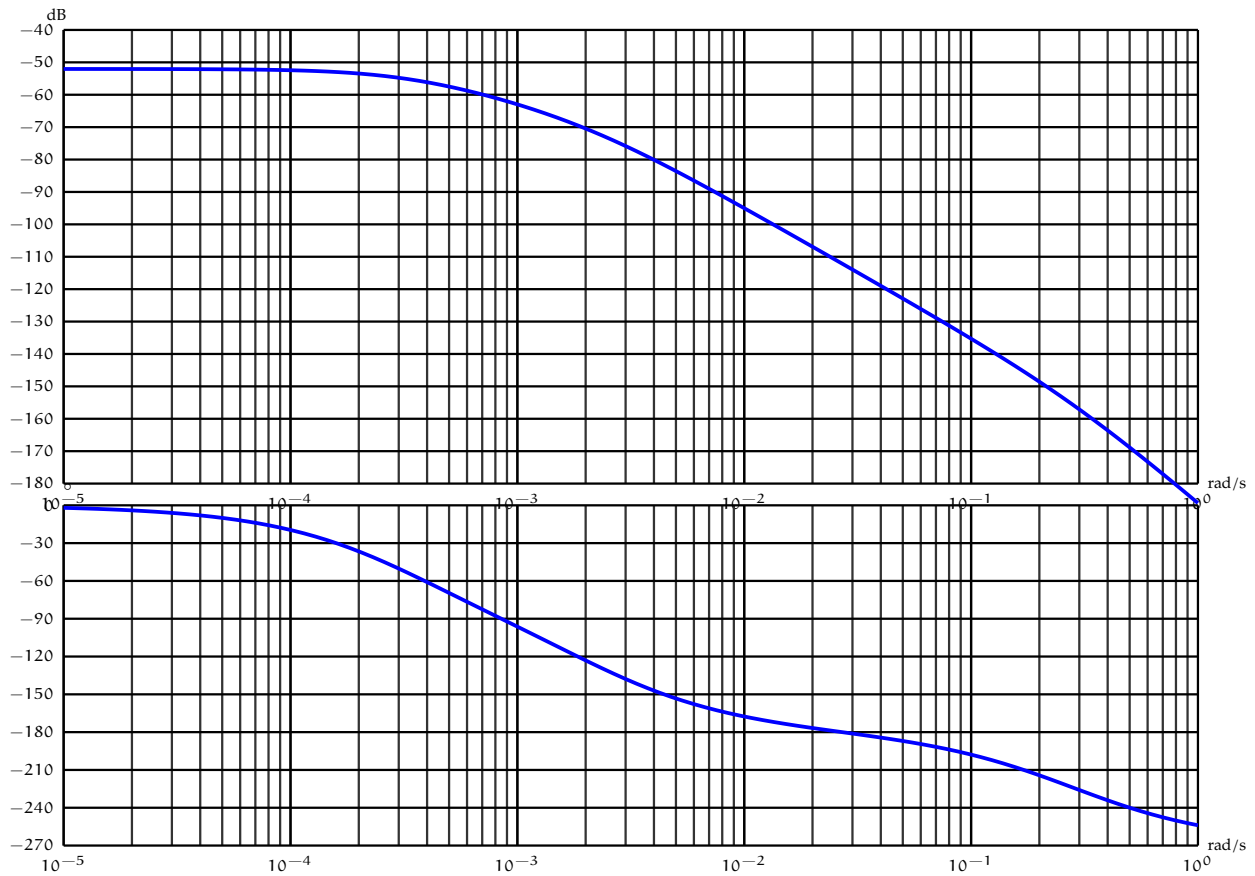


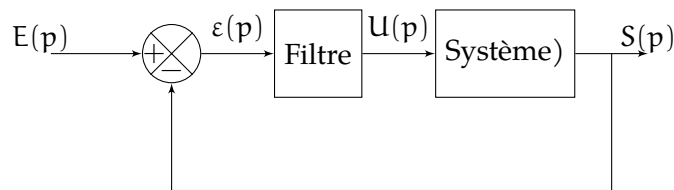
FIGURE 6.17 – Diagrammes de Bode de H(p)

B.2. Validation du modèle simplifié

- Q7.** Déterminer la fonction de transfert complexe $H_s(j \cdot \omega)$ puis le module en décibel $H_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(|H_s(j \cdot \omega)|)$ et l'argument $\Phi(\omega) = \arg(H_s(j \cdot \omega))$.
- Q8.** Tracer sur les diagramme de Bode de H(p), les diagrammes asymptotiques de Bode du modèle simplifié.
- Q9.** Compléter le tracé avec le tracé du module et de l'argument.
- Q10.** Justifier que le modèle simplifié est valide.

Exercice 4 - Filtre réjecteur Corrigé page ??

Soit le système décrit par le schéma-blocs ci-dessous.



Le système à réguler est connu par une analyse fréquentielle (diagrammes de Bode figure 6.18).

On constate sur le diagramme d'amplitude que le système comporte une résonance importante susceptible de rendre le système instable. Afin d'atténuer ce phénomène on se propose d'utiliser un filtre réjecteur.

$$F(p) = \frac{1 + \frac{2 \cdot z_1}{\omega_r} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_r^2}}{1 + \frac{2 \cdot z_2}{\omega_r} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_r^2}} \quad \text{avec } z_1 = 0,1 \quad z_2 = 0,5$$

$\omega_r = \text{pulsation de résonance du système à corriger}$

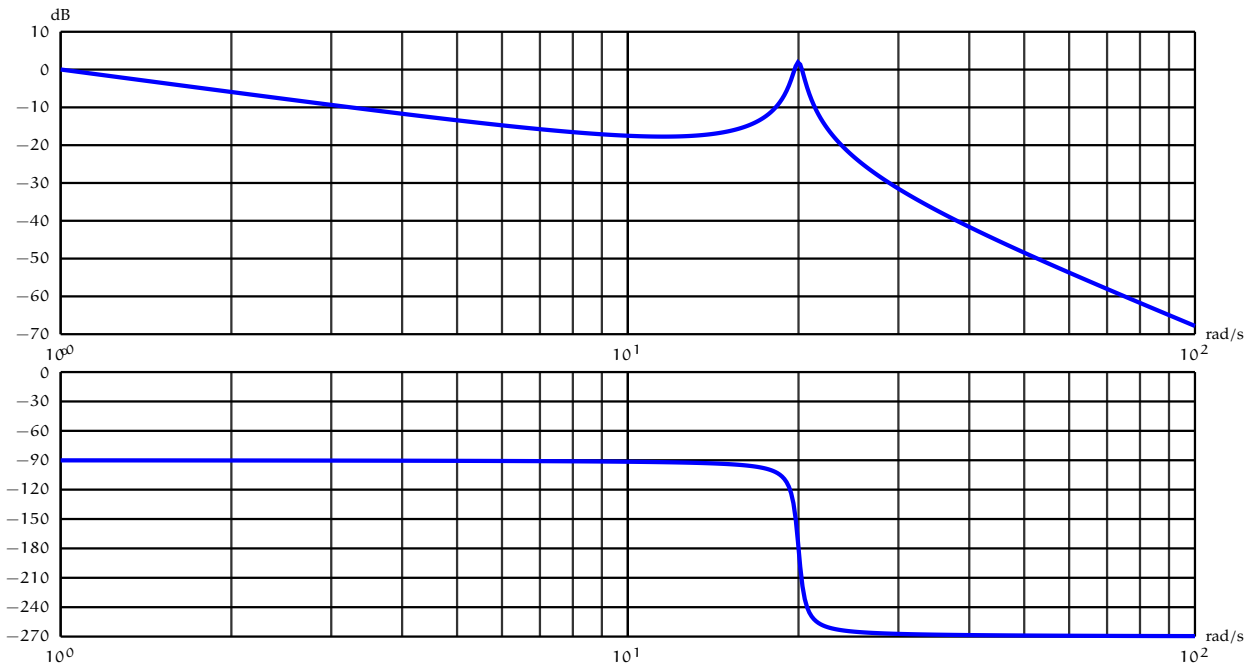


FIGURE 6.18 – Système à filtrer

- Q1.** Relever sur les diagrammes de Bode, la pulsation de résonance ω_r .
- Q2.** Tracer les diagrammes de Bode du filtre, préciser les asymptotes et les points particuliers.
- Q3.** Tracer les diagrammes de Bode du système corrigé, conclure.