

Analyse des systèmes asservis

12.1 Caractérisation des systèmes asservis

12.1.1 Structure des systèmes asservis

Un système asservi linéaire peut se représenter par le schéma 12.1. On y retrouve une chaîne d'action qui agit sur le système pour obtenir la sortie souhaitée en fonction de la consigne, une chaîne d'information qui prélève une image de la sortie, cette image est comparée à la consigne à atteindre.

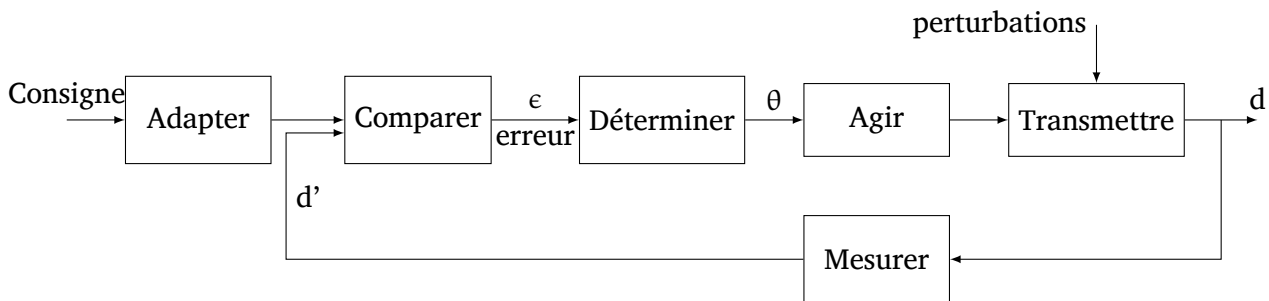


FIGURE 12.1 – Schéma fonctionnel d'un système asservi

12.1.2 Caractéristiques attendues d'un système asservi

Précision La précision étant l'écart entre la consigne et la sortie du système, il semble évident que l'on souhaite que cet écart soit nul.

Dans le cas d'un asservissement de type régulation, on cherche à avoir une erreur indicielle nulle (pour une entrée de type échelon) et si le système doit suivre une consigne évolutive (suivi de trajectoire), une erreur de traînage nulle.

Il faut aussi vérifier que le système n'est pas sensible aux perturbations extérieures (l'ouverture de la porte d'un four doit être corrigée le plus rapidement possible).

Stabilité La stabilité est la qualité la plus importante que doit posséder le système asservi. On ne peut en général se satisfaire de l'information binaire de la stabilité (stable/instable), en effet, un système qui atteint sa position finale après de nombreuses oscillations est stable mais ne peut être considéré comme un système correct. La notion de dépassement, associée aux marges de stabilité, permet de caractériser cette stabilité relative.

Rapidité Comme pour la précision, on souhaite que le système soit le plus rapide possible. Souvent après avoir réglé la stabilité du système, avoir obtenu la précision souhaitée, il ne reste plus de possibilité de réglage de la rapidité sans modifier les paramètres précédents.

Le réglage et l'optimisation du comportement d'un système est souvent un compromis entre stabilité (oscillations) précision, et rapidité.

12.2 Stabilité

12.2.1 Position du problème et définitions

Une manière intuitive de préciser la notion de stabilité est d'imaginer un système que l'on écarte de sa position initiale par une impulsion puis de regarder son évolution; s'il retrouve sa position initiale, il est stable, s'il s'en écarte, il est instable.

Les petits schémas 12.2 précisent quelques comportements possibles d'un système.



FIGURE 12.2 – Représentation de la stabilité

Plusieurs définitions de la stabilité sont possibles.

Énoncé (Définition 1) *Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.*

Remarque : Cela revient à solliciter le système avec une entrée bornée (type échelon) et à vérifier que la sortie ne diverge pas.

Énoncé (Définition 2) *Un système est stable si la réponse libre du système tend vers zéro à l'infini.*

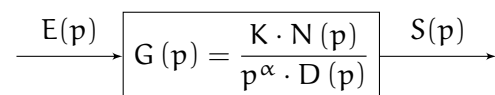
Remarque 1 : Étudier la réponse libre d'un système revient à étudier le système lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre et à analyser sa réponse. Un système stable a tendance à revenir dans sa position d'équilibre, un système qui ne revient pas dans sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas est dit juste instable.

Remarque 2 : Pour étudier la réponse libre, il suffit de solliciter le système par une impulsion de Dirac et de vérifier que celui-ci revient en position initiale.

Ces deux définitions sont équivalentes dans le cas de systèmes linéaires mais sont parfois mises en défaut.

Un système réel instable oscille ou s'écarte de sa position jusqu'à la destruction. Les oscillations sont dans le cas général limitées par les différentes saturations (limites des amplificateurs opérationnels, butées physiques,...). Ces limitations physiques peuvent laisser croire que la sortie du système est bornée.

Modèle d'étude de la stabilité Tout système linéaire (sans retard) peut se mettre sous la forme du schéma bloc ci-contre.



- K le gain $K > 0$;
- $N(p)$ et $D(p)$ deux polynômes tel que :
 - $N(0) = 1$ et $D(0) = 1$;
 - $N(p)$ de degré m , $N(p) = 1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m$;
 - $D(p)$ de degré n , $D(p) = 1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n$;
- α la classe du système.

Pour un système physique, en vertu du principe de causalité (l'effet ne peut précéder la cause), le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur.

12.2.2 Étude de la stabilité

Afin d'étudier la stabilité du système, on se propose de déterminer l'allure de la réponse temporelle du système écarté de sa position initiale puis relâché.

Abandonner un système avec une condition initiale non nulle revient pour l'étude du comportement à considérer que le système a été soumis à l'instant $t = 0$ à une impulsion $e(t) = A_0 \cdot \delta(t)$ avec $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac, si celui-ci revient dans sa position initiale, on considère alors que le système est stable. On rappelle que la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}(e(t)) = A_0$$

Nous avons $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ d'où $S(p) = G(p) \cdot E(p)$ finalement $S(p) = A_0 \cdot G(p)$.

La réponse temporelle $s(t)$ se déduit de la transformée inverse de $S(p)$:

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) = A_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}(G(p)).$$

Étudier la réponse temporelle d'un système linéaire soumis à une impulsion de Dirac revient donc à étudier la transformée inverse de la fonction de transfert du système :

$$\mathcal{L}^{-1}(G(p)) = g(t) \cdot \mathcal{H}(t)$$

avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside telle que $\begin{cases} t < 0 & \mathcal{H}(t) = 0 \\ t \geq 0 & \mathcal{H}(t) = 1 \end{cases}$.

Il reste donc à déterminer la transformée inverse de $G(p)$, pour cela nous allons décomposer la fonction de transfert en éléments simples et rechercher les racines du dénominateur (les pôles).

$$G(p) = \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)} = \frac{K \cdot (1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m)}{p^\alpha \cdot (1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n)}$$

Tout polynôme possède et/ou :

- des racines nulles, il est donc possible de factoriser p^α ;
- des racines réelles, simples et/ou multiples, il est donc possible de factoriser $(p - c_j)$ dans le polynôme du dénominateur ;
- des racines complexes conjuguées, simple et/ou multiples, il est donc possible de factoriser $((p - a_l)^2 + b_l^2)$ dans le polynôme du dénominateur ;
- des racines imaginaires pures soit le terme $(p^2 + b_k^2)$.

Le polynôme du dénominateur peut donc se mettre sous la forme d'un produit de fonctions du premier et du second ordre :

$$G(p) = K' \cdot \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{\prod_j (p - c_j)^{\alpha_j} \cdot \prod_l ((p - a_l)^2 + b_l^2)^{\alpha_l} \cdot \prod_k (p^2 + b_k^2)^{\alpha_k}}$$

avec :

p^α :	racines nulles d'ordre α ,
$\prod_j (p - c_j)^{\alpha_j}$:	racines réelles multiples d'ordre α_j ,
$\prod_l ((p - a_l)^2 + b_l^2)^{\alpha_l}$:	racines complexes multiples d'ordre α_l ,
$\prod_k (p^2 + b_k^2)^{\alpha_k}$:	racines imaginaires pures multiples d'ordre α_k .

On suppose pour simplifier l'étude qui suit que toutes les racines sont simples, le cas des racines multiples sera examiné plus loin.

Si les racines sont simples ($\alpha = \alpha_j = \alpha_k = \alpha_l = 1$) alors

$$G(p) = K' \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{\prod_j (p - c_j) \cdot \prod_l \left((p - a_l)^2 + b_l^2 \right) \cdot \prod_k (p^2 + b_k^2)}$$

Pour déterminer la réponse temporelle il suffit de déterminer la décomposition en fractions simples. Soit :

$$G(p) = \sum_f \frac{C_f}{p} + \sum_j \frac{C_j}{p - c_j} + \sum_l \frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2} + \sum_k \frac{A_k \cdot p + B_k}{p^2 + b_k^2}$$

on reconnaît :

$$\begin{aligned} \sum_f \frac{C_f}{p} &: && \text{décomposition en fraction simple des racines nulles,} \\ \sum_j \frac{C_j}{p - c_j} &: && \text{décomposition en fraction simple des racines réelles,} \\ \sum_l \frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2} &: && \text{décomposition en fraction simple des racines complexes conjuguées,} \\ \sum_k \frac{A_k \cdot p + B_k}{p^2 + b_k^2} &: && \text{décomposition en fraction simple des racines imaginaires pures.} \end{aligned}$$

La réponse temporelle est donc la somme des réponses temporelles. Le système sera instable si un des termes ne tend pas vers 0 en l'infini, il nous suffit donc d'étudier chacune des transformées inverses pour obtenir les conditions de stabilité du système.

Commençons par les racines réelles et complexes.

Racines réelles simples $\sum_j \frac{C_j}{p - c_j}$: à partir du tableau des transformées inverses en annexe (page ??)

on déduit

$$\frac{C_j}{p - c_j} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C_j \cdot e^{c_j \cdot t}.$$

Le système est stable si la réponse temporelle tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. L'allure de la réponse temporelle ne dépend donc que du signe de c_j .

— $c_j > 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{c_j \cdot t}) = +\infty$, la sortie diverge, le système est instable ;

— $c_j < 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{c_j \cdot t}) = +0$, la sortie tend vers 0, cette racine ne rend pas le système instable.

Racines complexes simples $\sum_l \frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2}$: le tableau des transformées inverses ne donne pas

directement la transformée de $\frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2}$ mais il est possible de la déduire à partir des

deux formes suivantes :

$$\text{— } \frac{b}{b^2 + (p + a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin b \cdot t \text{ et}$$

$$\text{— } \frac{p + a}{b^2 + (p + a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \cos bt.$$

La transformée inverse est donc de la forme :

$$\frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K_i \cdot e^{a_i \cdot t} \cdot \sin (b_i \cdot t + \varphi_i)$$

Le sinus est toujours borné, la stabilité du système ne dépend donc que du signe de a_i :

— $a_i > 0$, comme précédemment $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{a_i \cdot t}) = +\infty$, la sortie diverge, le système est instable

12.2 Stabilité

— $a_i < 0$, dans ce cas, $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{a_i \cdot t}) = 0$, la sortie tend vers 0, cette racine ne rend pas le système instable.

Racines réelles multiples $\sum_j \frac{C_j}{(p - c_j)^n}$: à partir du tableau des transformées inverses (page ??) on déduit :

$$\frac{C_j}{(p - c_j)^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C_j \cdot t^{n-1} \cdot e^{c_j \cdot t}.$$

Racines complexes conjuguées multiples : On montre de la même manière que la réponse temporelle tend vers 0.

Il ne reste plus qu'à étudier le cas d'une racine nulle, et le cas d'une racine imaginaire pure mais nous allons ici prendre en compte le fait que la racine soit simple ou multiple.

Racine nulle simple $\frac{1}{p}$: 0 est racine du dénominateur. La transformée inverse est :

$$\frac{1}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 \cdot \mathcal{H}(t).$$

La sortie tend donc vers une constante non nulle. Le système ne revient pas à 0 mais ne s'écarte pas indéfiniment, il reste borné. On dit alors que le système est *juste instable*.

Remarque : Si on prend la première définition, c'est-à-dire que l'on soumet le système à une entrée en échelon, la sortie diverge, la sortie tend vers une droite (intégration d'une constante).

Racine nulle double $\frac{1}{p^2}$: du tableau des transformées, on déduit

$$\frac{1}{p^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t.$$

On constate que la sortie diverge lorsque t croît. Le système est donc instable.

Racine imaginaire simple $\frac{A_k}{p^2 + \omega_k^2}$, on a alors $p_k = \pm j \cdot \omega_k$ qui est racine du dénominateur.

Du tableau des transformées on déduit :

$$\frac{1}{p^2 + \omega^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\omega} \sin \omega \cdot t.$$

La sortie est constamment sinusoïdale, elle ne tend pas vers 0 mais elle reste bornée. On dit alors que le système est *juste instable*.

Racine imaginaire double $\frac{A_k}{(p^2 + \omega_k^2)^2}$ le tableau donne

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2 \cdot \omega^2} (\sin \omega \cdot t - \omega \cdot t \cdot \cos \omega \cdot t).$$

Le second terme tend vers l'infini, le système est donc instable.

Conclusion

— Si les parties réelles des racines complexes sont toutes négatives et si toutes les racines réelles sont négatives, alors la réponse transitoire du système est composée d'exponentielles amorties et décroissantes, la réponse tend vers zéro pour t tendant vers l'infini, le système revient à sa position d'équilibre, le système est stable.

- Si un des pôles réels est positif, le système est instable. Le système est de type divergent exponentiel.
- Si un des pôles complexes est à partie réelle positive, le système est instable. Le système est de type oscillatoire divergent.
- Si 0 ou $\pm j\omega$ est racine simple, le système est juste instable.
- Si 0 ou $\pm j\omega$ est racine multiple, le système est instable.

12.2.3 Condition de stabilité

Énoncé (condition de stabilité) *Un système est stable si, et seulement si, la fonction de transfert en boucle fermée n'a pas de pôle à partie réelle positive ou nulle.*

Remarque : On appelle pôles de la fonction de transfert les racines du dénominateur.

12.2.4 Position des pôles

La position des pôles dans le plan complexe de la fonction de transfert en boucle fermée nous renseigne sur la stabilité de la fonction de transfert (fig 12.3).

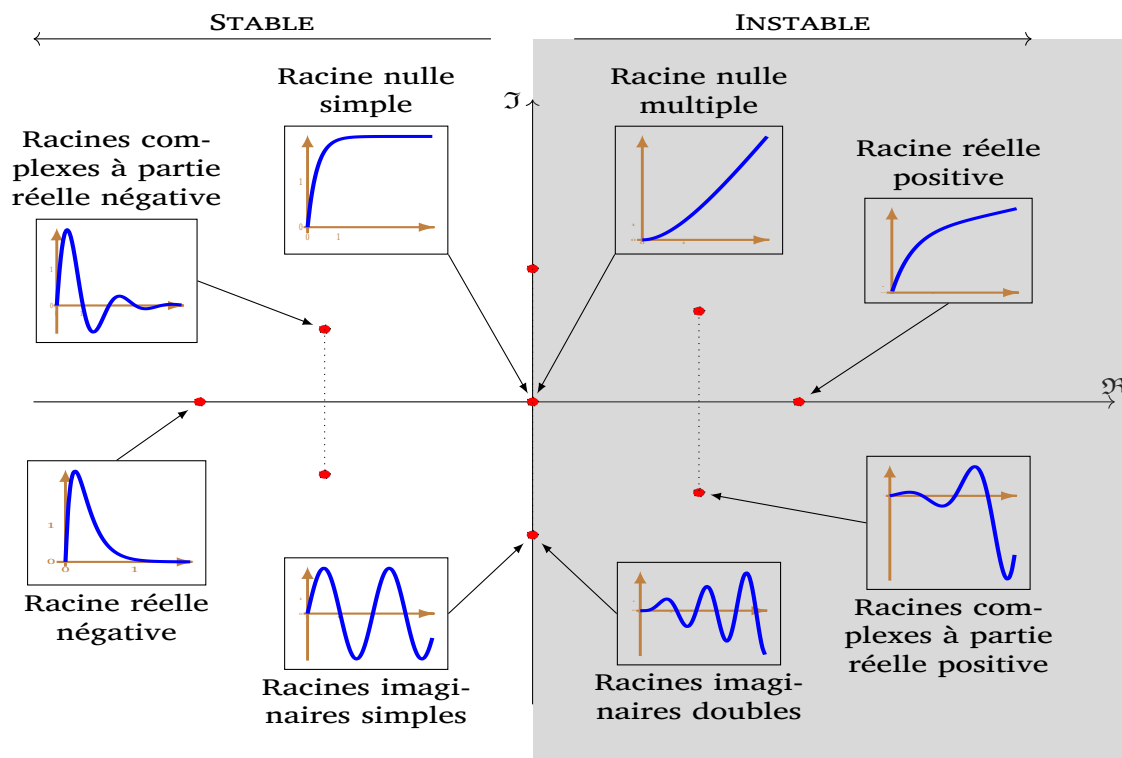


FIGURE 12.3 – Positions des pôles et stabilité et réponse à une impulsion de Dirac

Il suffit donc d'étudier les racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée pour savoir si le système est stable ou instable. Mais si on sait résoudre des polynômes de degré 1, 2, 3 voire 4, on ne sait pas déterminer de manière systématique les racines d'un polynôme de degré supérieur nous verrons plus loin qu'il existe des outils qui, à défaut de nous donner les racines, nous indiquent le signe de celles-ci.

12.2.5 Critères de stabilité

La connaissance des racines permet de déduire si le système est stable, mais il n'est pas possible de déterminer analytiquement les racines d'un polynôme de degré élevé. Les critères ci-dessous nous

12.2 Stabilité

permettent de déterminer le signe des racines sans avoir besoin de déterminer les racines. On distingue les critères algébriques et les critères graphiques.

a) Équation caractéristique

Pour une fonction de transfert en boucle fermée s'écrivant,

$$BF(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m \cdot p^m + a_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + a_1 \cdot p^1 + a_0}{b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + b_1 \cdot p^1 + b_0},$$

on appelle équation caractéristique :

$$D(p) = 0$$

$$b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + b_1 \cdot p^1 + b_0 = 0.$$

b) Condition nécessaire

Énoncé (Condition nécessaire de stabilité) Pour que le système soit stable, il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique soient du même signe que b_n .

c) Systèmes du 1^{er} et du 2nd ordre

Pour les systèmes du premier et du second ordre, la condition nécessaire est une condition suffisante.

Premier ordre : Soit $H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$, pour que le système soit stable, il suffit que $\tau > 0$.

Second ordre :

$z > 1$: Soit $H_2(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$, pour que le système soit stable, il suffit que $\tau_1 > 0$ et $\tau_2 > 0$.

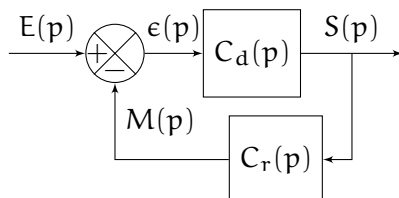
$z = 1$: $H_2(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)^2}$, il suffit que $\tau > 0$

$0 < z < 1$: $G(p) = \frac{K}{(p - r_1) \cdot (p - r_2)}$ avec $r_1 = a + i \cdot b$ et $r_2 = a - i \cdot b$, le système est stable si $a < 0$. La fonction de transfert s'écrit donc : $G(p) = \frac{K}{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot p + b^2 \cdot p^2}$. Tous les coefficients sont positifs

d) Critère graphique du revers

Les critères graphiques permettent d'étudier la stabilité d'un système à partir de la représentation graphique de la fonction de transfert en boucle ouverte. Cette étude peut être conduite à partir des diagrammes de Bode, ou de la représentation dans le plan complexe de la fonction de transfert.

Soit $G(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée du système décrit par le schéma bloc ci-dessous, avec $BO(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte.



$$BF(p) = \frac{C_d(p)}{1 + C_d(p) \cdot C_r(p)} = \frac{C_d(p)}{1 + BO(p)}$$

Nous savons que l'étude de la stabilité se résume à la recherche du signe des racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée.

$$\begin{aligned} D(p) &= 0 \\ 1 + BO(p) &= 0 \end{aligned}$$

Cette condition peut aussi s'écrire sous la forme

$$BO(p) = -1$$

Étudier $BO(p) = -1$ revient à étudier le lieu (le tracé de la fonction de transfert) de la fonction $BO(p)$ par rapport au point $(-1, 0)$ du plan complexe. Le point $(-1, 0)$ est appelé *point critique*. La position de ce tracé par rapport au point critique nous renseigne sur la stabilité du système.

L'étude peut être réalisée aussi bien dans le plan complexe que sur les diagrammes de Bode.

Énoncé (Critère du revers dans le plan complexe) *Un système asservi linéaire est stable si, en parcourant dans le sens des pulsations croissantes le lieu de transfert dans le plan complexe de la FTBO on laisse le point critique $(-1, 0)$ sur la gauche (figure 12.4). Il est instable dans le cas contraire.*

Remarque : Ce critère dit *critère du revers dans le plan de Nyquist* n'est plus explicitement au programme, il n'est utilisé ici que pour préciser la problématique graphique.

Ce critère initialement défini dans le plan complexe peut être transposé dans le plan de Bode (diagrammes de Bode) en considérant que le point critique $(-1, 0)$ du plan complexe devient dans le plan de Bode le point de coordonnées $(0 \text{ dB}, -180^\circ)$.

Ce point est représenté :

- sur le diagramme d'amplitude par l'axe des abscisses $A_{dB} = 0 \text{ dB}$,
- sur le diagramme de phase par la droite d'ordonnée $\phi = -180^\circ$.

L'énoncé du critère du revers dans le plan de Bode prend deux formes, une pour le diagramme d'amplitude, l'autre pour le diagramme d'argument.

Énoncé (Critère du revers dans le plan de Bode) *Un système asservi est stable si, pour la pulsation ω_{C0} définie par $|BO(j \cdot \omega_{C0})| = 1$ (soit 0 dB) de la fonction de transfert en boucle ouverte, le déphasage est supérieur à -180° (figure 12.5).*

ou

Énoncé (Critère du revers dans le plan de Bode) *Un système asservi est stable, si pour la pulsation ω_{180} définie par $\arg BO(j \cdot \omega_{180}) = -180^\circ$ de la fonction de transfert en boucle ouverte, l'amplitude en décibel est négative.*

Une seule de ces définitions suffit si les courbes sont monotones décroissantes.

Pour les diagrammes qui présentent plusieurs passages autour de -180° pour l'argument ou autour de 0 dB pour l'amplitude, il est nécessaire de vérifier pour tous les points particuliers les deux versions du critère.

Remarque : L'utilisation du critère de revers dans le plan de Bode est à manipuler avec précaution, en effet, contrairement à son application dans le plan complexe (critère de Nyquist) où l'on a une vision globale du lieu de transfert, sur les diagrammes de Bode, le tracé est décomposé sur deux graphes et il est obligatoire de s'intéresser aux deux pour évaluer la stabilité.

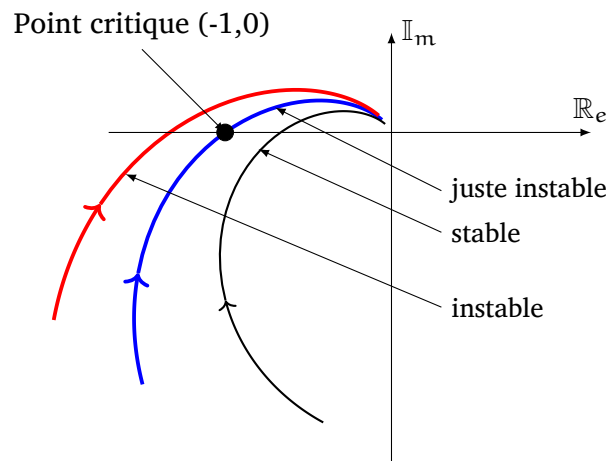


FIGURE 12.4 – Critère du revers dans le plan complexe

12.2 Stabilité

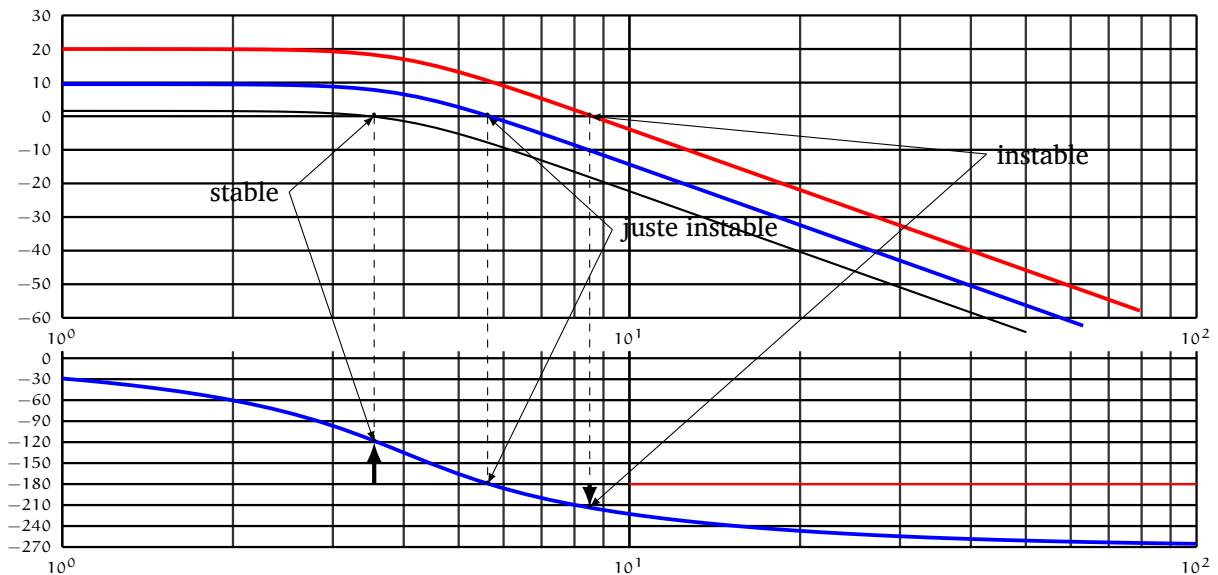


FIGURE 12.5 – Critère du revers à partir des diagrammes de Bode

Les limites du critère du revers Le critère du revers ne peut s'appliquer avec certitude que sur des fonctions de transfert régulières en boucle ouverte.

Une fonction de transfert régulière est une fonction de transfert qui ne possède pas de pôle (racines du dénominateur) ou de zéro (racines du numérateur) à partie réelle positive.

Ainsi pour le système dont la FTBO s'écrit :

$$BO(p) = \frac{10}{(1 + 2 \cdot p) \cdot (1 - 0,1 \cdot p) \cdot (1 + \frac{p}{3}) \cdot (1 + 10 \cdot p)}$$

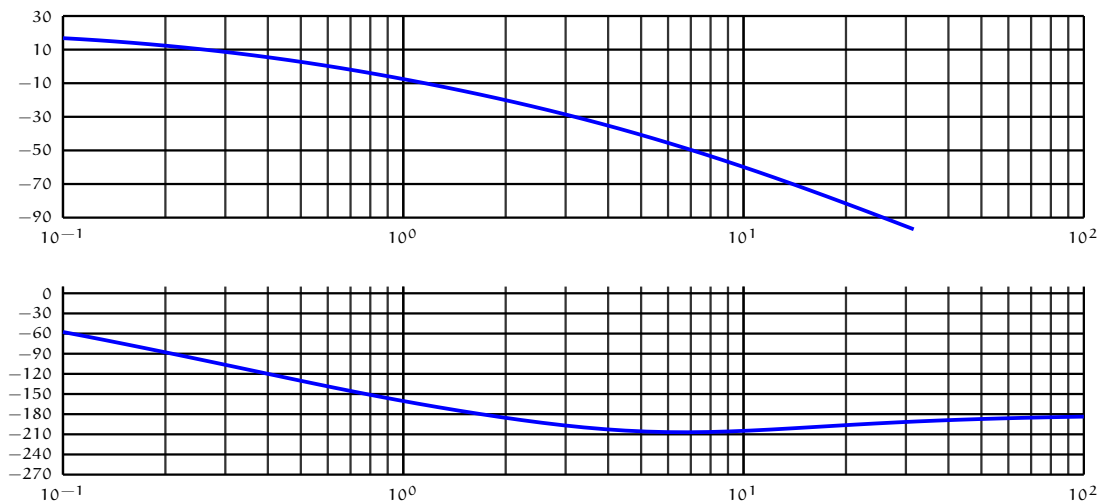


FIGURE 12.6 – Les limites du critère du revers

Le tracé des diagrammes de Bode de la FTBO figure 12.6) semble indiquer que la FTBF est stable, mais le simple calcul des coefficients de la FTBF montre que le système est instable (coefficients négatifs et positifs, la condition nécessaire n'est pas remplie).

$$BF(p) = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)} = \frac{300}{-330 - 683 \cdot p - 35 \cdot p^2 - 128 \cdot p^3 + 20 \cdot p^4}$$

Le critère du revers est la version limitée aux fonctions de transfert régulières d'un critère graphique

plus complet, le critère de Nyquist.

12.2.6 Marges de stabilité

Les critères ci-dessus sont des critères de stabilité absolue, ils permettent de répondre à la question binaire : le système est-il stable ou instable ?

La réponse à cette question ne permet pas de régler et d'optimiser le fonctionnement d'un système. Il est nécessaire, pour cela, d'identifier un ou plusieurs paramètres qui permettent de régler le système asservi afin d'avoir le comportement souhaité en terme d'oscillations de la réponse temporelle.

a) Influence de la position de la FTBO par rapport au point critique

On se propose d'évaluer l'influence de la distance entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique sur le comportement temporel du système asservi.

Soit le système décrit par le schéma bloc de la figure 12.7a.

Sur la figure 12.7b sont représentée la réponse temporelle à un échelon pour différentes valeurs du gain K et sur la figure 12.7c les diagrammes de Bode pour ces mêmes valeurs.

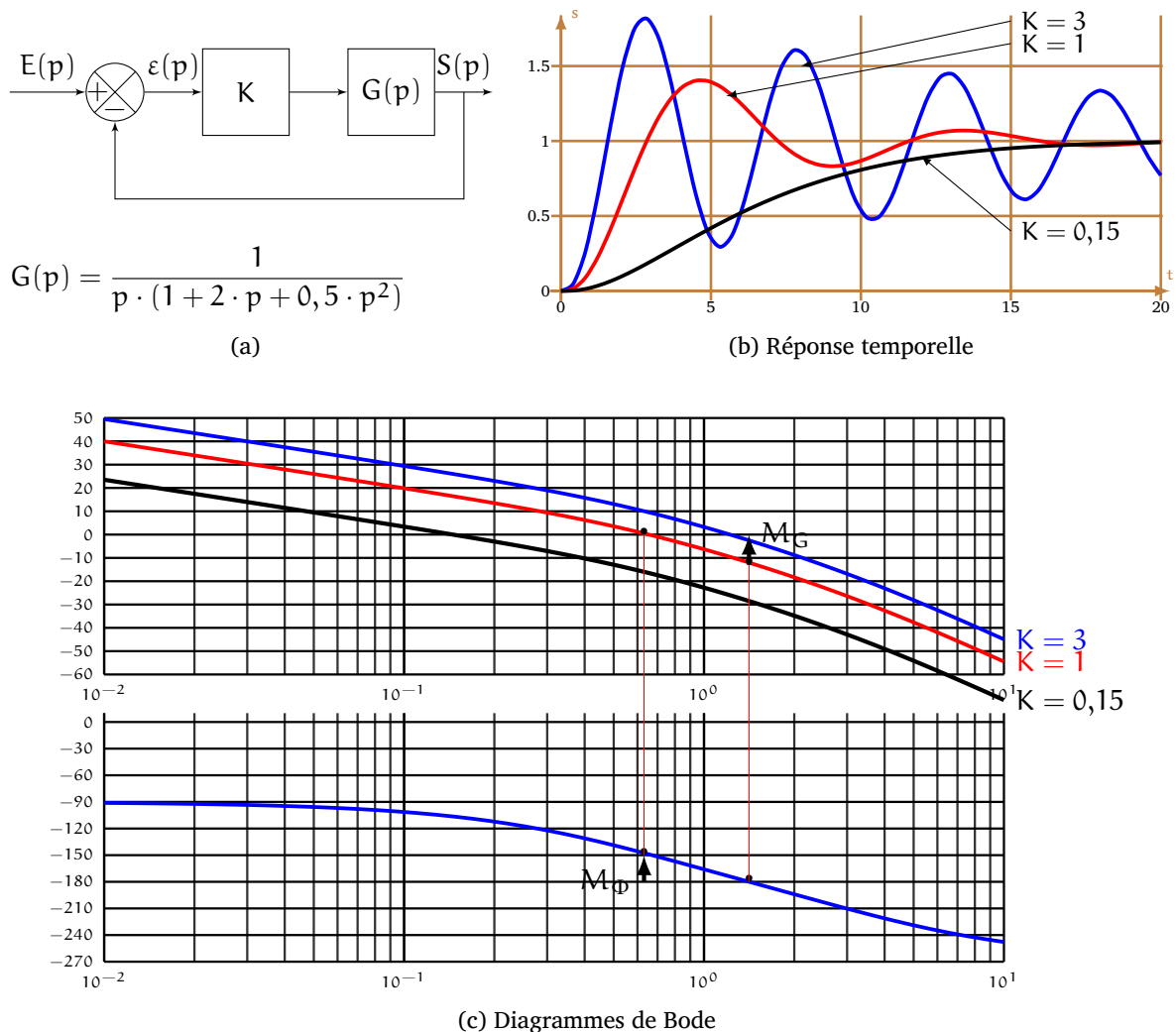


FIGURE 12.7 – Influence de la distance au point critique

Les zooms 12.8 page ci-contre précisent les marges de phase et de gain pour les différentes valeurs de K .

12.2 Stabilité

$K = 1$: La distance entre la courbe de phase et le point critique ($0 \text{ dB}, -180^\circ$) est d'environ 30° et la distance entre la courbe de gain et le point critique est d'environ 15 dB . La réponse temporelle oscille mais converge en peu d'oscillations.

$K = 3$: La distance mesurée en degrés entre la courbe de phase et le point critique est très faible. Il en est de même pour la distance entre la courbe de gain et le point critique. On note qu'alors la réponse temporelle est fortement oscillante.

$K = 0,15$: La courbe de phase et la courbe de gain sont éloignées du point critique. La réponse temporelle ne présente pas d'oscillations.

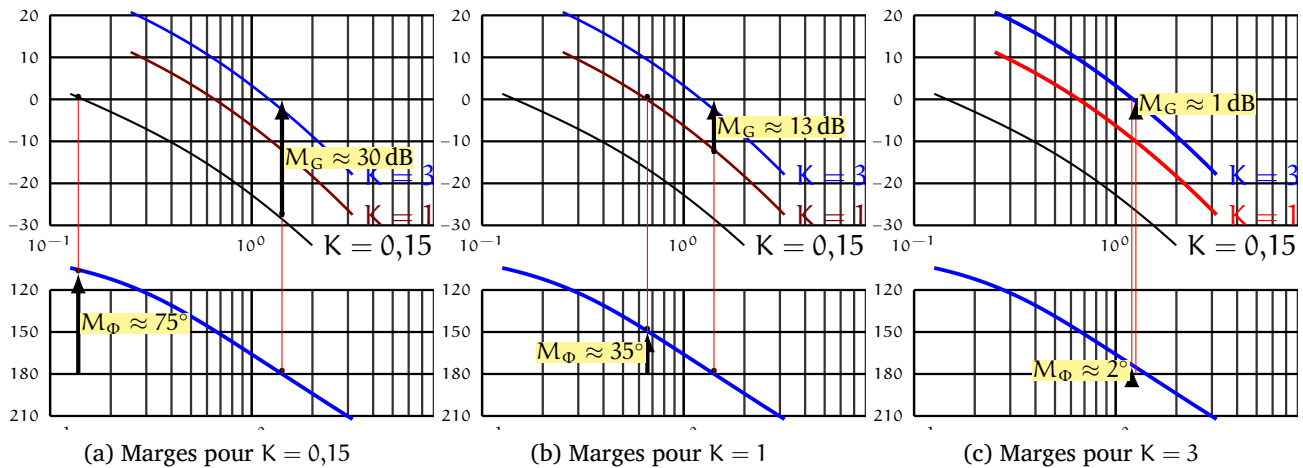


FIGURE 12.8 – Marges de phase et de gain pour différentes valeurs de K

Les réponses temporelles sont caractéristiques d'un système stable mais on constate que le comportement temporel est d'autant plus oscillant que la distance entre la courbe de gain et 0 dB pour ω_{180} est faible et/ou que la distance entre la courbe de phase et -180° est faible.

b) Marges de stabilité sur les diagrammes de Bode

Il est donc possible, à partir de la représentation fréquentielle, de prévoir l'allure de la réponse temporelle et d'ajuster le système pour avoir un comportement correct, il suffit pour cela de régler une « distance » minimale entre le point critique et le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Cette distance est appréciée par les deux marges de stabilité : la *marge de gain* M_G et la *marge de phase* M_ϕ .

Marge de gain La marge de gain est mesurée sur le diagramme d'amplitude (figure 12.9), entre la courbe de gain de la FTBO et l'axe des abscisses pour la pulsation ω_{180} . Le sens positif est compté de la courbe vers l'axe des abscisses.

On note ω_{180} , la pulsation telle que $\arg(\text{BO}(j\omega_{180})) = -180^\circ$.

$$M_G = -20 \cdot \log(|\text{BO}(j \cdot \omega)|)$$

Marge de phase La marge de phase est mesurée sur le diagramme de phase entre l'ordonnée -180° et la courbe de phase de la FTBO pour la pulsation $\omega_{0\text{dB}}$. Le sens positif est compté de l'ordonnée -180° à la courbe.

On note $\omega_{0\text{dB}}$, la pulsation telle que $20 \log(|\text{BO}(j\omega_{0\text{dB}})|) = 0\text{dB}$

$$M_\phi = \arg(\text{BO}(j\omega_{0\text{dB}})) - (-180^\circ)$$

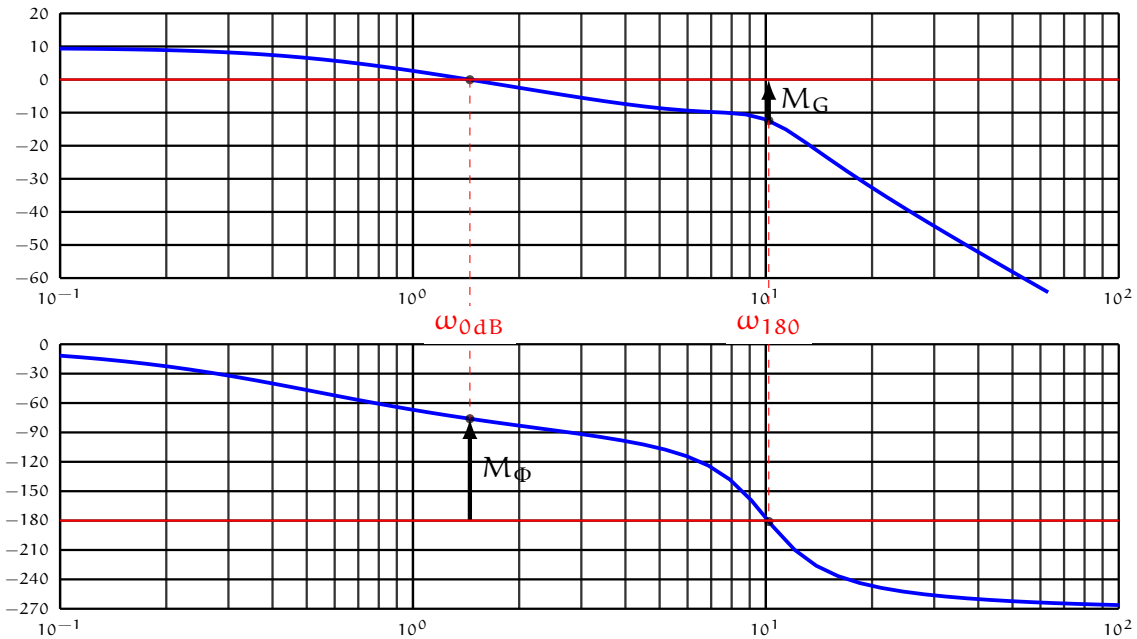


FIGURE 12.9 – Marges de stabilité sur les diagrammes de Bode

Les valeurs usuelles de réglage des marges de gain et de phase sont :

Marge de gain M_G de 10 dB à 15 dB.

Marge de phase M_ϕ de 40° à de 50° .

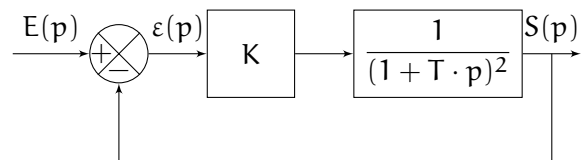
Ces valeurs correspondent à un comportement oscillatoire amorti analogue à celui d'un second ordre avec un coefficient d'amortissement $\xi \approx 0,5$.

c) Marge de phase et dépassements

Il n'y a pas de relation généralisable entre la marge de phase (mesurée sur la FTBO) et les dépassements de la réponse temporelle à un échelon de la FTBF, mais il est possible dans le cas d'un second ordre d'évaluer l'influence de la marge de phase.

Soit le système du second ordre avec une racine double décrit par le schéma bloc ci-contre.

La FTBO s'écrit :



$$BO(p) = \frac{K}{(1 + T \cdot p)^2}$$

et la FTBF

$$BF(p) = \frac{K}{1 + K} \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot T}{1 + K} \cdot p + \frac{T^2}{1 + K} \cdot p^2}$$

avec

— pulsation propre : $\omega_{nf} = \frac{\sqrt{1 + K}}{T}$

— coefficient d'amortissement : $\xi_f = \frac{1}{\sqrt{1 + K}}$

— gain : $K_f = \frac{K}{1 + K}$

12.2 Stabilité

On peut en déduire le premier dépassement relatif :

$$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi \cdot \xi_f}{\sqrt{1 - \xi_f^2}}} = e^{\frac{-\pi}{\sqrt{K}}}$$

Le module et l'argument de la fonction de transfert complexe $BO(j \cdot \omega)$ s'écrivent :

$$A(\omega) = |BO(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot T^2 \cdot \omega^2}}$$

$$\Phi(\omega) = \arg(BO(j \cdot \omega)) = -\arctan\left(\frac{2 \cdot T \cdot \omega}{1 - T^2 \cdot \omega^2}\right)$$

On cherche la pulsation ω_{0dB} pour laquelle $A(\omega) = 1$, on trouve :

$$\omega_{0dB} = \frac{\sqrt{K-1}}{T} \quad \text{avec } K > 1$$

d'où la marge de phase

$$M_\Phi = \Phi(\omega_{0dB}) + 180^\circ = -\arctan\left(\frac{2 \cdot \sqrt{K-1}}{2-K}\right) + 180$$

On peut donc tracer l'évolution du dépassement $D_{1\%}$ en fonction de la marge de phase (figure 12.10).

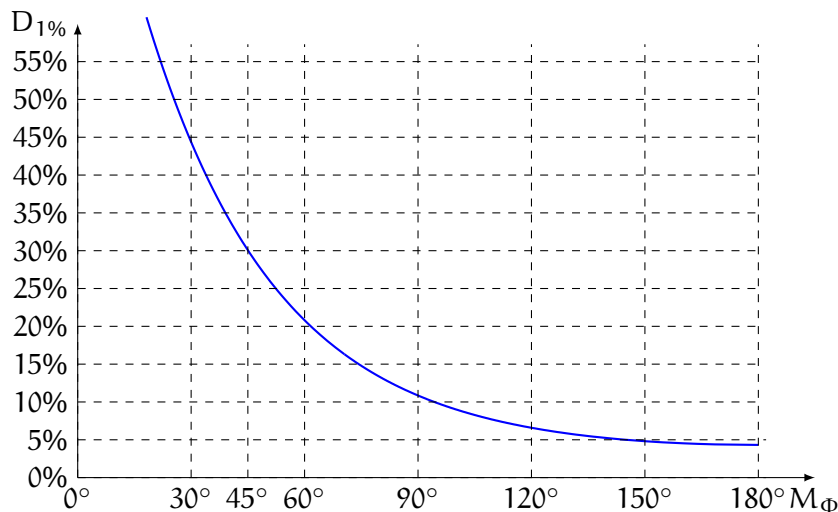


FIGURE 12.10 – Dépassement en fonction de la marge de phase

On remarque que le premier dépassement relatif est d'autant plus important que la marge de phase est petite.

Les réglages usuels pour la marge de phase, M_Φ de 40° à 50° correspondent à des dépassements variant de 35% à 25%.

Un dépassement inférieur à 5% nécessite une marge de phase supérieure 140° .

Ce comportement n'est pas généralisable à toutes les fonctions de transfert, mais chaque fois que l'on peut modéliser le comportement d'un système par un second ordre, on peut s'inspirer de ces résultats pour régler le système.

12.3 Précision

12.3.1 Position du problème

La précision est une caractéristique prépondérante d'un système asservi ou d'une régulation. La précision est évaluée aussi bien vis-à-vis de l'entrée de consigne que vis-à-vis des perturbations. Un système doit être précis relativement à l'entrée en étant insensible aux perturbations. Les perturbations ne doivent pas dégrader la précision de la réponse finale.

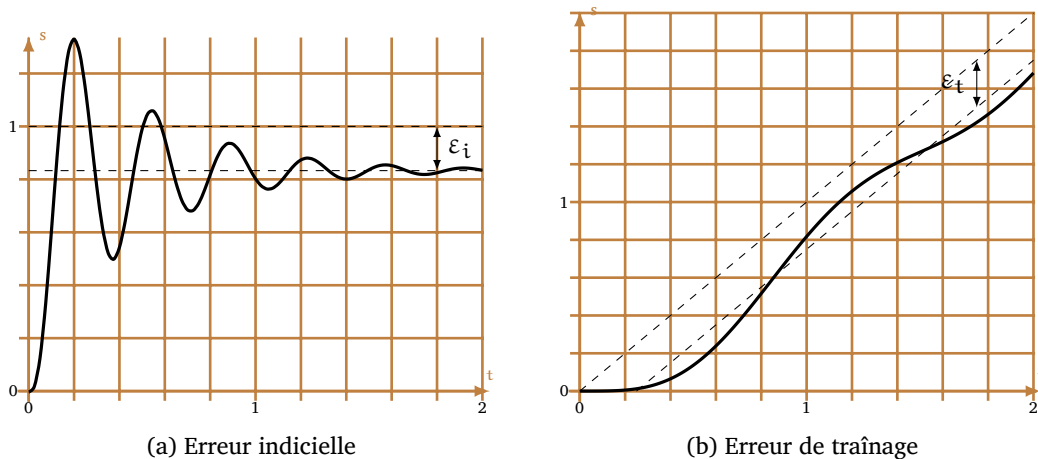


FIGURE 12.11 – Erreur statique

On distingue :

L'erreur statique : C'est l'erreur en régime permanent entre la sortie et la loi d'entrée. Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées canoniques :

- Échelon, on parle alors d'*erreur indicielle* (figure 12.11a).
- Rampe, *erreur de traînage* ou erreur de poursuite (figure 12.11b).
- Accélération, erreur en accélération.

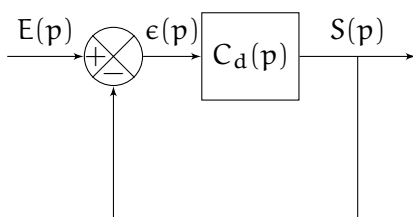
L'erreur dynamique : C'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation (hors du programme).

12.3.2 Données

La précision est évaluée par l'écart $\varepsilon(t)$ mesuré pour un système à retour unitaire entre $e(t)$ et $s(t)$. Dans le cas d'un système à retour non unitaire il se mesure entre $e(t)$ et $m(t)$, avec $m(t)$ la mesure de $s(t)$.

Déterminons dans les deux cas l'erreur $\varepsilon(t)$ (pour une perturbation nulle).

a) Cas du retour unitaire



$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

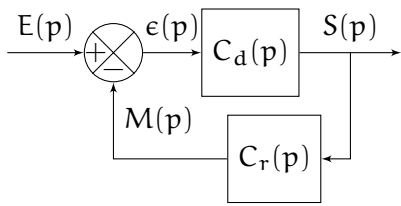
$$\varepsilon(p) = E(p) - C_d(p) \cdot \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = \left(\frac{1}{1 + C_d(p)} \right) E(p)$$

avec ici :

$$BO(p) = C_d(p)$$

b) Cas du retour non unitaire



$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= E(p) - M(p) \\ \varepsilon(p) &= E(p) - C_d(p) \cdot C_r(p) \cdot \varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) &= \left(\frac{1}{1 + C_d(p) \cdot C_r(p)} \right) E(p) \end{aligned}$$

avec ici :

$$BO(p) = C_d(p) \cdot C_r(p)$$

soit finalement dans les deux cas :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + BO(p)} E(p)$$

L'erreur dépend de la FTBO et de la nature de l'entrée.

Pour la suite, nous ne traiterons que le cas de système à retour unitaire, l'étude étant identique pour les systèmes à retour non unitaire.

Nous nous placerons dans le cas général pour lequel la FTBO peut être mise sous la forme :

$$BO(p) = \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)}$$

- $K > 0$: le gain,
- $\alpha \geq 0$: la classe du système,
- $N(p)$: polynôme de degré n avec $N(0) = 1$,
- $D(p)$: polynôme de degré m avec $D(0) = 1$.

Remarque : Pour un système physique le degré du dénominateur $m + \alpha > n$.

12.3.3 Erreur en régime permanent - Erreur statique

a) Définition

L'écart en régime permanent est la limite quand t tend vers l'infini de l'écart entre $e(t)$ et $s(t)$:

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$$

Un système sera précis si cet écart tend vers 0.

b) Calculs préalables

Le théorème de la valeur finale permet d'écrire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

Remarque importante : Ce théorème ne peut-être utilisé que si la sortie converge, c'est-à-dire si le système est stable. Nous supposons donc pour la suite que le système est stable.

Ici on peut donc écrire pour l'écart :

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= \frac{1}{1 + BO(p)} E(p) = \frac{1}{1 + \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)}} E(p) \\ \varepsilon(p) &= \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} E(p) \end{aligned}$$

d'où pour l'erreur statique

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} E(p) \right)$$

Finalement en se rappelant que : $N(0) = 1$ et $D(0) = 1$:

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} E(p) \right)$$

En conclusion, l'erreur statique dépend de la nature de l'entrée $E(p)$ et de la classe α de la fonction de transfert en boucle ouverte et du gain K de la FTBO.

c) Erreur indicielle - Réponse à un échelon

On nomme erreur indicielle ε_i , l'erreur statique relative à une entrée en échelon $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

Le système étant stable (par hypothèse) on peut écrire :

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} E(p) \right)$$

avec $e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} \frac{E_0}{p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0 \right)$$

On peut considérer deux cas en fonction de la classe du système.

Système de classe 0 ($\alpha = 0$) : La FTBO ne comporte pas d'intégration

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^0}{p^0 + K} E_0 \right) = \frac{1}{1 + K} E_0$$

L'erreur est non nulle et dépend du gain K de la FTBO, elle est d'autant plus petite que le gain est important.

Système de classe > 0 ($\alpha > 0$) : La FTBO comporte au moins une intégration dans la boucle

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0 \right) = 0$$

L'erreur est donc nulle à l'infini quel que soit le gain K de la FTBO.

Remarque : Par abus de langage on appelle souvent erreur statique, l'erreur indicielle.

d) Erreur de traînage - Réponse à une rampe

L'erreur de traînage (aussi nommée erreur de poursuite) ε_t , est l'erreur mesurée entre une entrée de type rampe $e(t) = A_0 \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ et la sortie.

Comme précédemment

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} E(p) \right)$$

12.3 Précision

avec $e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{A_0}{p^2}$

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{\alpha+1} A_0}{p^\alpha + K} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} \right)$$

L'erreur de traînage dépend comme l'erreur indicielle du gain K et de la classe du système. Nous pouvons distinguer trois cas.

Système de classe 0 ($\alpha = 0$) : La FTBO ne comporte pas d'intégration.

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left(A_0 \cdot \frac{p^{-1}}{p^0 + K} \right) = +\infty$$

L'écart tend vers $+\infty$, la réponse temporelle de la sortie s'écarte de la consigne en rampe.

Système de classe 1 ($\alpha = 1$) : La FTBO comporte une intégration

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left(A_0 \cdot \frac{p^0}{p^1 + K} \right) = \frac{A_0}{K}$$

L'erreur est constante, la sortie est parallèle à l'entrée, décalée de ε_t .

Système de classe > 1 ($\alpha > 1$) : La FTBO comporte au moins deux intégrations.

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left(A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} \right) = 0$$

L'erreur de traînage est nulle, la sortie rattrape l'entrée lorsque $t \rightarrow +\infty$.

e) Erreur en accélération - Réponse à une consigne parabolique

On se propose maintenant de déterminer l'erreur en accélération, ε_a , correspondant à une entrée de type parabolique $e(t) = A_0 \cdot t^2 \cdot \mathcal{H}(t)$.

Comme dans les études précédentes avec $e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{2 \cdot A_0}{p^3}$

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{\alpha+1} A_0}{p^\alpha + K} \cdot \frac{2 \cdot p^3}{p^3} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \right)$$

En fonction de α on obtient :

Système de classe < 2 ($0 < \alpha < 2$)

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \right) = +\infty$$

Système de classe 2 ($\alpha = 2$)

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^0}{p^2 + K} \right) = \frac{2 \cdot A_0}{K}$$

Système de classe > 2 ($\alpha > 2$)

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \right) = 0$$

f) Tableau récapitulatif

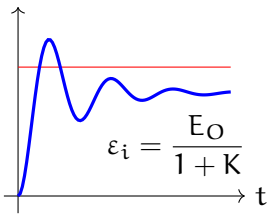
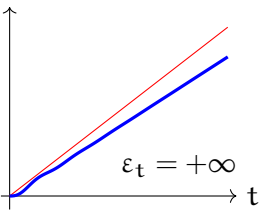
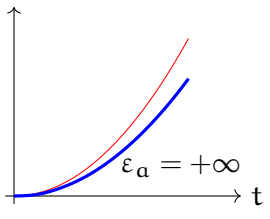
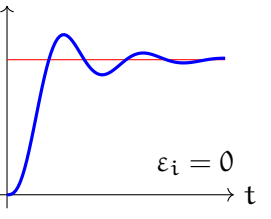
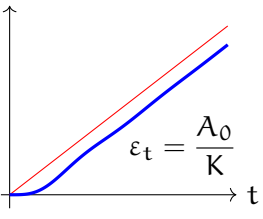
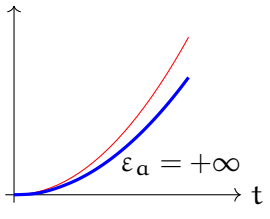
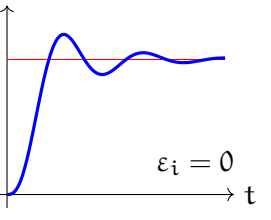
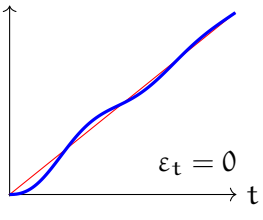
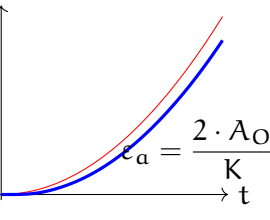
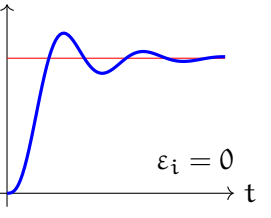
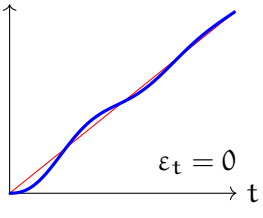
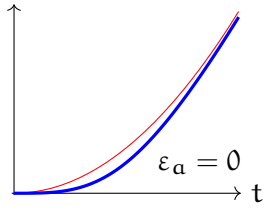
Classe	Échelon	Rampe	Accélération
$\alpha = 0$	 $\varepsilon_i = \frac{E_0}{1 + K}$	 $\varepsilon_t = +\infty$	 $\varepsilon_a = +\infty$
$\alpha = 1$	 $\varepsilon_i = 0$	 $\varepsilon_t = \frac{A_0}{K}$	 $\varepsilon_a = +\infty$
$\alpha = 2$	 $\varepsilon_i = 0$	 $\varepsilon_t = 0$	 $\varepsilon_a = \frac{2 \cdot A_0}{K}$
$\alpha > 2$	 $\varepsilon_i = 0$	 $\varepsilon_t = 0$	 $\varepsilon_a = 0$

TABLEAU 12.1 – Tableau récapitulatif : influence de la classe sur l'erreur statique

Le tableau de la présente page récapitule les différentes erreurs et l'allure des réponses temporelles correspondantes.

Il ne faut pas déduire rapidement du tableau 12.1 qu'il suffit de corriger le système en rajoutant une intégration pour que le système soit précis, en effet chaque intégration ajoute aussi un déphasage de -90° , le système risque donc de devenir instable. Ce tableau n'a de sens que si le système est stable !

12.3.4 Effet d'une perturbation sur la précision

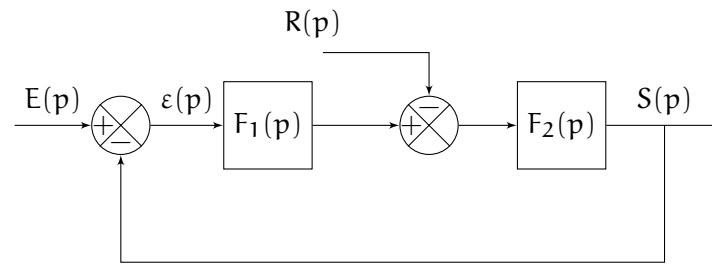
a) Présentation du problème

On se propose d'étudier l'effet d'une perturbation sur la précision d'un système et l'influence de la forme de la fonction de transfert sur l'impact de cette perturbation.

À partir du modèle d'étude décrit par le schéma blocs et les fonctions de transfert suivants :

$$F_1(p) = \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)} \text{ et } F_2(p) = \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}$$

avec $N_1(0) = D_1(0) = 1$, $N_2(0) = D_2(0) = 1$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$.



Déterminons l'écart $\epsilon(t)$

$$\begin{aligned} \epsilon(p) &= E(p) - S(p) = E(p) - F_2(p) \cdot (F_1(p) \cdot \epsilon(p)) - R(p) \\ \epsilon(p) &= \frac{1}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot E(p) - \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot R(p) \end{aligned}$$

L'erreur due à la perturbation s'ajoute à celle relative à l'entrée (résultat général que l'on retrouve par le théorème de superposition appliqué aux systèmes linéaires).

Nous limiterons notre étude au cas d'une perturbation constante, les autres types de perturbations se traitant de la même manière.

b) Perturbation constante

À partir du théorème de superposition, on sait que la réponse obtenue pour un système linéaire à deux entrées est la somme des sorties de chaque entrée prise isolément.

Pour étudier l'effet de la perturbation seule, il suffit de poser $e(t) = 0$. On en déduit l'écart relatif à la perturbation :

$$\epsilon_p(p) = -\frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot R(p)$$

On choisit d'étudier le comportement pour une perturbation constante $r(t) = R_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ soit dans le domaine de Laplace $R(p) = \frac{R_0}{p}$

L'erreur relative à la perturbation s'écrit donc :

$$\epsilon_p(p) = -\frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot \frac{R_0}{p}$$

en remplaçant $F_1(p)$ et $F_2(p)$:

$$\begin{aligned} \epsilon_p(p) &= -\frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)} \cdot \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}} \cdot \frac{R_0}{p} \\ \epsilon_p(p) &= -\frac{K_2 \cdot N_2(p) \cdot p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p) \cdot p^{\alpha_2} \cdot D_2(p) + K_1 \cdot N_1(p) \cdot K_2 \cdot N_2(p)} \cdot \frac{R_0}{p} \end{aligned}$$

Nous supposons comme dans l'étude précédente que le système est stable, il est donc possible d'utiliser le théorème de la valeur finale pour déterminer l'écart statique dépendant de la perturbation.

$$\epsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} (\epsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \epsilon_p(p))$$

avec $N_i(0) = D_i(0) = 1$

$$\epsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(-p \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \cdot \frac{R_0}{p} \right)$$

avec $N_i(0) = D_i(0) = 1$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right)$$

On constate que l'erreur relative à la perturbation dépend principalement de la classe de la fonction de transfert en amont de la perturbation α_1 .

On distingue deux cas :

$\alpha_1 = 0$: La fonction de transfert $F_1(p)$ en amont de la perturbation ne possède pas d'intégration.

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right)$$

— si $\alpha_2 = 0$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^0 + K_1 \cdot K_2} \right) = -\frac{R_0 \cdot K_2}{1 + K_1 \cdot K_2}$$

— si $\alpha_2 > 0$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right) = -\frac{R_0}{K_1}$$

L'erreur statique relative à la perturbation est non nulle dans les deux cas.

$\alpha_1 > 0$: La fonction de transfert $F_1(p)$ en amont de la perturbation possède au moins une intégration.

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right) = 0$$

L'erreur statique relative à la perturbation est nulle à l'infini.

En conclusion : pour que l'erreur permanente ne dépende pas de la perturbation, il faut au moins une intégration en amont de la perturbation.

12.4 Rapidité

12.4.1 Temps de réponse - Temps de montée

Temps de réponse à 5% : c'est le temps mis pour que la sortie atteigne la valeur finale à 5 % près.

Temps de montée : c'est le temps mis par la sortie pour passer de 10 % à 90 % (ou de 20% à 80%) de la valeur finale.

Évaluer la rapidité d'un système revient en général à déterminer le temps de réponse à 5 % ($T_{5\%}$) pour une entrée de type échelon. Si on sait évaluer cette quantité pour les systèmes du premier ordre ($T_{5\%} = 3\tau$) et du second ordre (Cf. abaque en annexe), pour des systèmes d'un ordre supérieur, il n'existe pas de relation directement applicable.

Le temps de montée peut lui aussi permettre d'évaluer la rapidité du système mais cette mesure ne prend pas en compte les oscillations de la réponse (figure 12.12). On remarque, que des systèmes ayant un temps de réponse analogue peuvent avoir des temps de montée notablement différents.

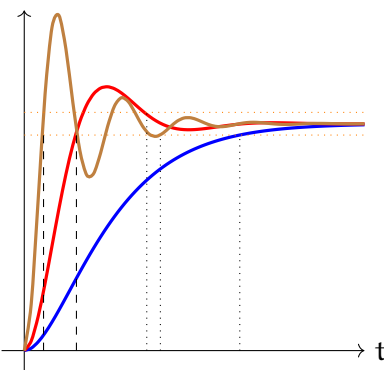


FIGURE 12.12 – Temps de réponse et temps de montée

12.4.2 Temps de montée et bande passante

Un système asservi se comporte comme un filtre passe-bas, c'est-à-dire un système linéaire qui ne « laisse passer » que les basses fréquences, les hautes fréquences sont fortement atténuées.

On caractérise les filtres par la bande passante à -3dB .

On se propose de montrer que la bande passante et le temps de montée sont corrélés, plus la bande passante de la FTBF est importante, plus le temps de montée est faible.

Cette relation est déjà connue pour les systèmes du premier ordre; en effet, pour un système en boucle fermée dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Alors on sait que :

— le temps de réponse à 5 % est : $T_{5\%} = 3 \cdot \tau$

— la bande passante à -3 dB est : $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

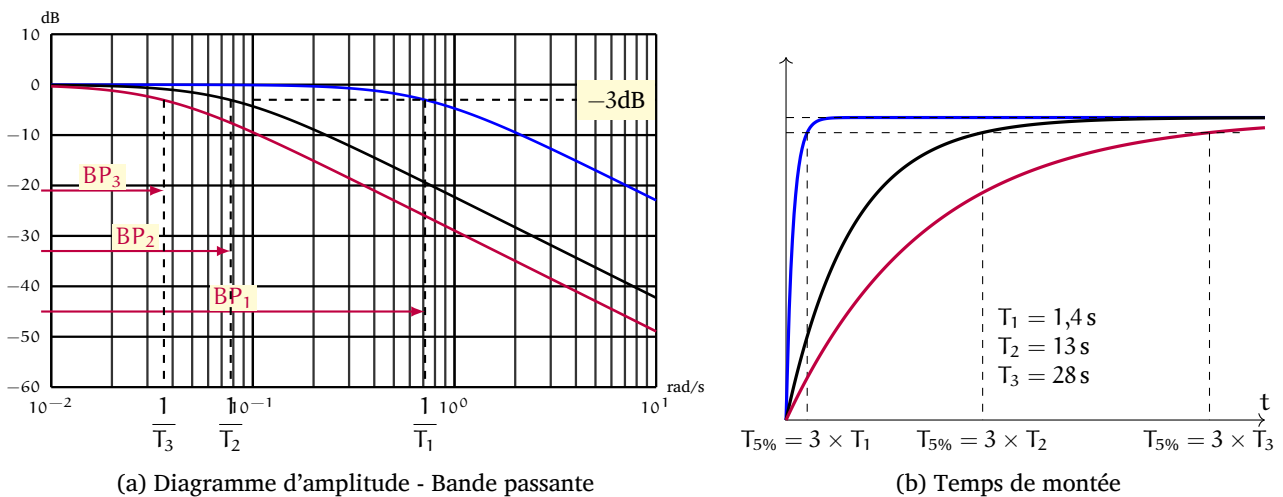
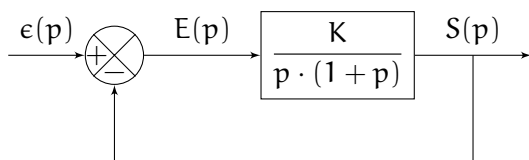


FIGURE 12.13 – Bande passante et temps de réponse d'un premier ordre

On constate bien que, plus la bande passante augmente, plus le temps de réponse diminue.

Dans les autres cas, les calculs sont plus complexes, nous nous limiterons donc à montrer sans démonstration que pour un système du second ordre, la relation entre la bande passante et le temps de montée est de même nature.

Pour l'évaluer, nous allons étudier le cas du système du second ordre à retour unitaire ci-dessous.



La FTBF s'écrit :

$$BF(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K} + \frac{p^2}{K}}$$

Par identification avec la forme canonique on obtient :

— $\omega_n = \sqrt{K}$, la pulsation propre;

— $z = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K}}$, le coefficient d'amortissement.

On constate que la réponse temporelle (fig. 12.14b) et la réponse fréquentielle (fig. 12.14a) dépendent principalement de K ; plus K est grand, plus la réponse est tonique, le temps de montée diminue mais les oscillations augmentent et plus la bande passante est grande.

Remarque : Sur la figure 12.14b est représenté le temps de montée de 20% à 80%.

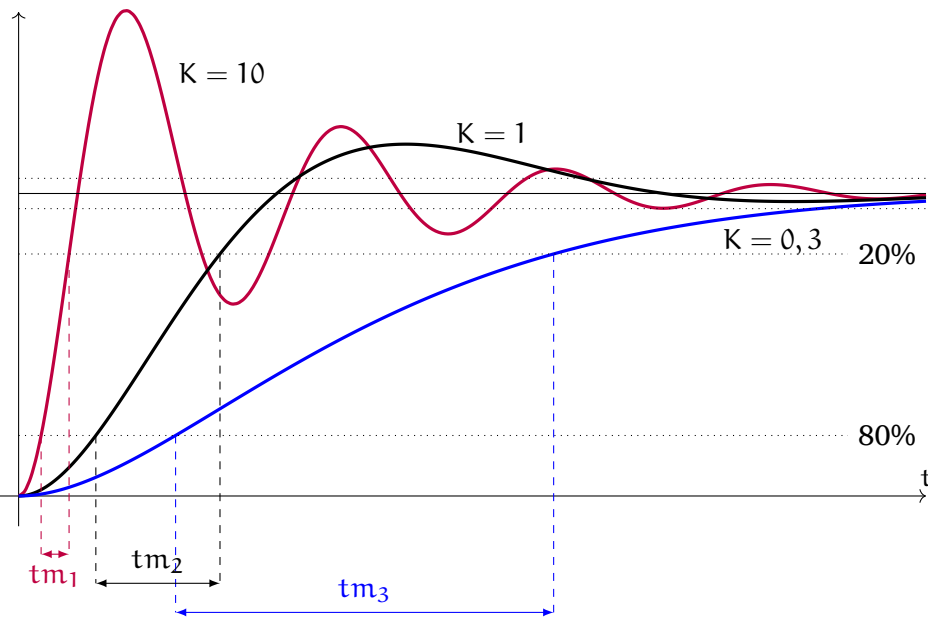
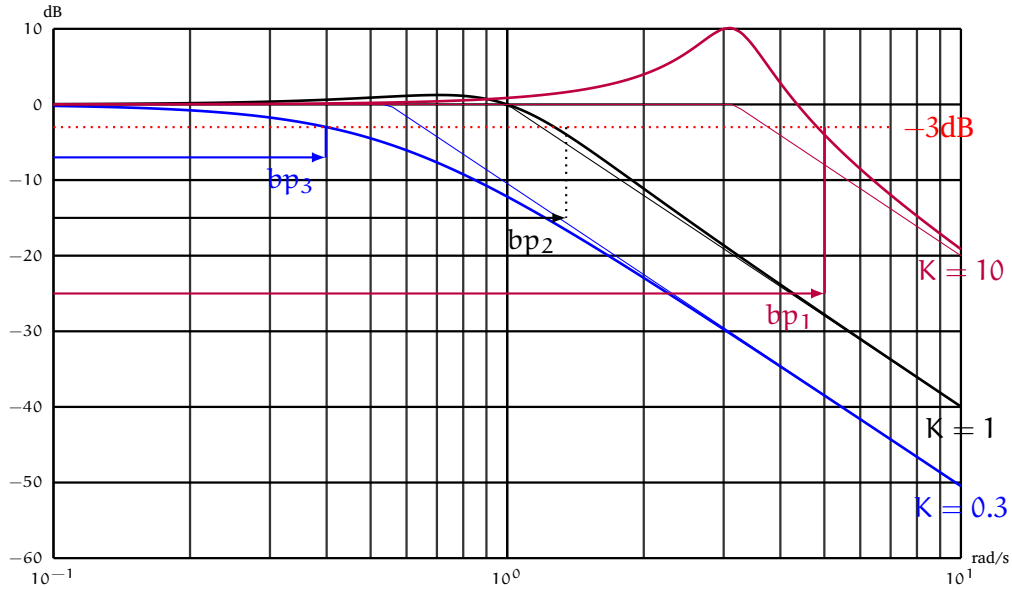


FIGURE 12.14 – Bande passante et temps de montée

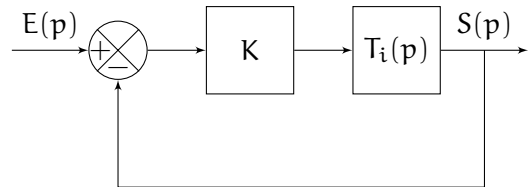
On peut tenter de généraliser en disant que si l'on souhaite diminuer le temps de montée du système, il faut augmenter la bande passante mais ne faut oublier que le temps de montée et le temps de réponse ne sont pas directement corrélés.

12.5 Feuille de travaux dirigés n°12

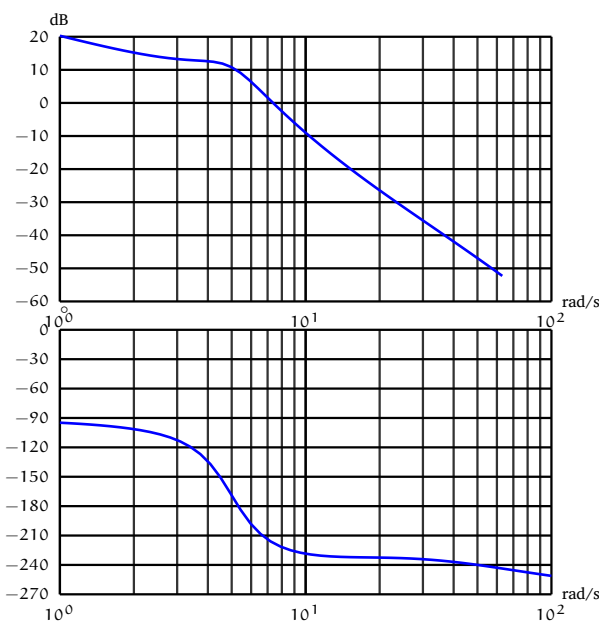
Exercice 1 - Applications du cours Corrigé page 32

A. Critère du revers dans le plan de Bode

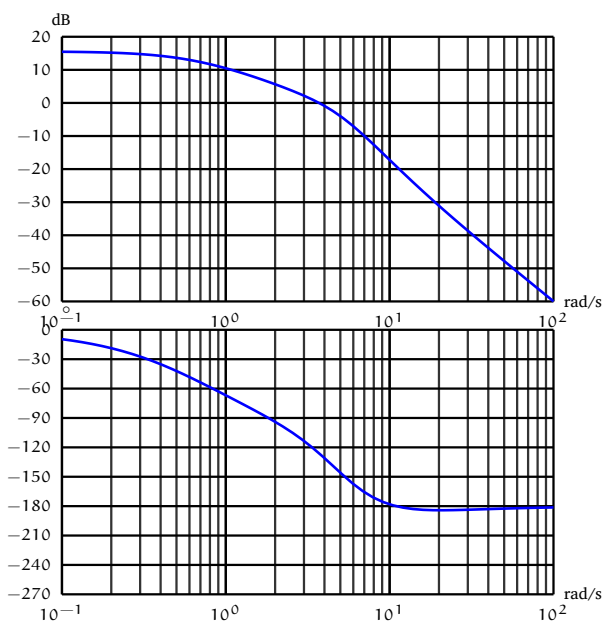
Chaque système est décrit par le schéma bloc ci-contre.



Q1. Pour chacune des fonctions de transfert en boucle ouverte tracées (pour $K = 1$) sur les figures 12.15a et 12.15b déterminer par le critère du revers si le système en boucle fermée est stable. Préciser la valeur maxi de K pour que le système soit juste instable.



(a) Diagramme de Bode de $T_1(p)$



(b) Diagramme de Bode de $T_2(p)$

FIGURE 12.15 – Étude graphique de la stabilité

B. Stabilité graphique

La FTBO du système étudié est définie par : $H_1(p) = \frac{160}{p(16 + 2 \cdot p + p^2)}$

Q2. Tracer les diagrammes de Bode. Le système est-il stable en boucle fermée ?

Q3. Déterminer graphiquement la valeur de K_p pour la juste instabilité.

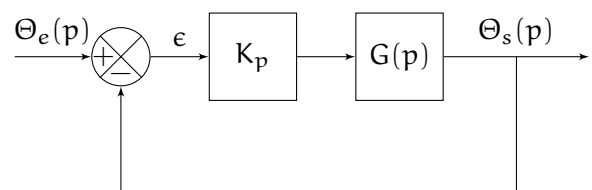
C. Stabilité d'un second ordre avec intégration

Soit le système décrit par le schéma bloc ci-contre avec

$$G(p) = \frac{K}{p \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2} \right)}$$

pour les valeurs suivantes :

$$— G(p) = G_1(p) = \frac{5}{p(1 + 4 \cdot p)(1 + 0,1 \cdot p)},$$



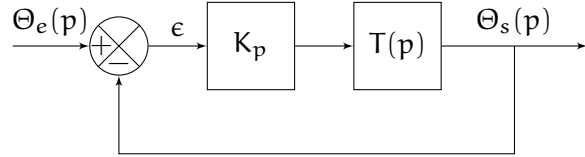
— $G(p) = G_2(p) = \frac{1}{p \cdot (1 + 0,2 \cdot p)^2}$

- Q4.** Déterminer analytiquement la valeur de K_p pour laquelle le système est juste instable.
Q5. Déterminer K_p afin que la marge de phase soit $M_\phi > 45^\circ$ et la marge de gain $M_G > 15$ dB.

D. Stabilité d'un second ordre généralisé avec un zéro positif

Soit $T(p) = \frac{1 - 0,2 \cdot p}{1 + 4 \cdot p + 100 \cdot p^2}$

- Q6.** Déterminer la condition sur K_p pour que le système soit stable



Exercice 2 - Stabilité d'un système à retard

Corrigé page 34

Le système étudié est connu par sa fonction de transfert $T(p) = \frac{S(p)}{U(p)} = \frac{10 \cdot e^{-p}}{(1 + 10 \cdot p) \cdot (1 + 5 \cdot p)}$.

Un correcteur $C(p) = \frac{U(p)}{\epsilon(p)} = K$ est installé dans la chaîne directe, avec $\epsilon(p) = E(p) - S(p)$

- Q1.** Tracer le schéma bloc

L'étude fréquentielle de $T(p)$ donne le tableau suivant :

ω	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$ T $ dB	18,8	16	10	4,9	0,7	- 2,8	- 5,7	- 8,2	- 10,4	- 12,4	- 14,2
Φ°	- 43	- 77	- 120	- 145	- 162	- 176	- 186	- 196	- 205	- 213	- 220

- Q2.** Tracer les diagrammes de Bode de $K \cdot T(j \cdot \omega)$ pour $K = 1$.

- Q2a.** Déterminer la valeur limite de K pour que le système soit stable.

On se propose de modéliser le retard par l'approximation de Padé obtenue en observant que $e^{-\tau \cdot p} = \frac{e^{-\frac{\tau}{2}p}}{e^{\frac{\tau}{2}p}}$ puis en réalisant un développement limité au premier ordre ($H_p(p) = \frac{1 - \frac{\tau}{2}p}{1 + \frac{\tau}{2}p}$) ou au deuxième ordre.

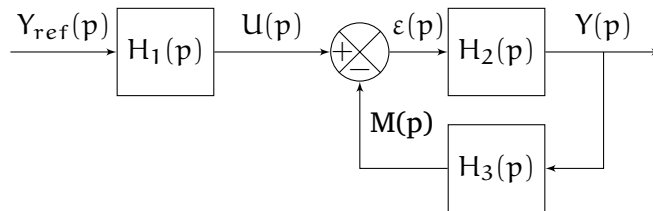
- Q3.** Tracer les diagrammes de Bode de $H_p(p)$ puis de la fonction $T(p)$ en utilisant l'approximation de Padé sur les diagrammes précédents pour $K = 1$.

- Q4.** Déterminer la valeur limite de K à partir de cette approximation.

Exercice 3 - Précision et stabilité

Corrigé page 35

Soit le système décrit par le schéma bloc :



$H_1(p) = \frac{5}{(1 + 16 \cdot p) \cdot (1 + 33 \cdot p)}$ $H_2(p) = \frac{15 \cdot k}{p(1 + p)}$ $H_3(p) = \frac{1}{1 + 0,1 \cdot p}$

$y_{ref}(t) = Y_o$ est une consigne constante (échelon).

- Q1.** Déterminer la fonction de transfert $O(p) = \frac{M(p)}{\epsilon(p)}$ puis $F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$.

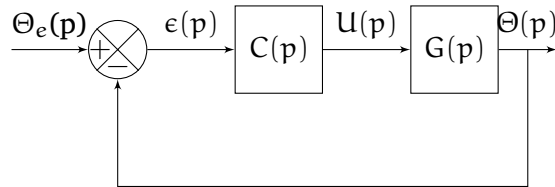
- Q2.** Déterminer la fonction de transfert $G(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$.

- Q3.** Déterminer la valeur finale de $Y(t)$ pour $k = 0,1$, $k = 0,5$, $k = 1$ et $k = 5$.

Exercice 4 - Précision et paramètres

Corrigé page 35

Le système étudié est un réacteur, dont on se propose de réguler la température.



L'équation différentielle reliant la température $\theta(t)$ à la tension de commande $u(t)$ s'écrit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + (4 + \alpha) \cdot \frac{d\theta}{dt} + 4 \cdot \alpha \cdot \theta(t) = 4 \cdot u(t)$$

Le paramètre α a été identifié par plusieurs essais mais sa valeur, dépendante aux produits introduits dans le réacteur, n'est connue que par un encadrement : $16 \leq \alpha \leq 20$.

La régulation complète est représentée par le schéma bloc ci-dessus.

- $\Theta_e(p)$: la transformée de Laplace de la température de consigne $\theta_e(t)$;
- $\Theta(p)$ et $U(p)$ les transformées de Laplace de $\theta(t)$ et $u(t)$;
- $C(p)$: le régulateur.

Dans un premier temps, on choisit un régulateur proportionnel : $C(p) = K_p$.

Q1. Déterminer la fonction de transfert $G(p)$.

Q2. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $G_F(p) = \frac{\Theta(p)}{\Theta_e(p)}$. Mettre sous forme canonique.

Q3. Le système est-il stable ?

Q4. Déterminer K_p pour obtenir un coefficient d'amortissement $z_F > 0,5$.

Q5. Déterminer l'erreur indicielle pour un échelon de température de $\Theta_0 = 20^\circ\text{C}$ en fonction du paramètre α . Conclure sur la précision.

On choisit maintenant un régulateur proportionnel intégral : $C(p) = K_p \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$.

Q6. Déterminer la FTBO pour les valeurs suivantes de T_i et α ;

- $T_i = 1/20, T_i = 1/16$
- $\alpha = 20, \alpha = 16$

Q7. À partir du tracé des diagrammes de Bode de la FTBO pour chacun des cas (on prend $K_p = 1$), déterminer le couple (T_i, K_p) tel que la marge de phase (M_p) soit supérieure à 45° pour toutes les valeurs de α .

Q8. Déterminer l'erreur indicielle pour un échelon de température de $\Theta_0 = 20^\circ\text{C}$.

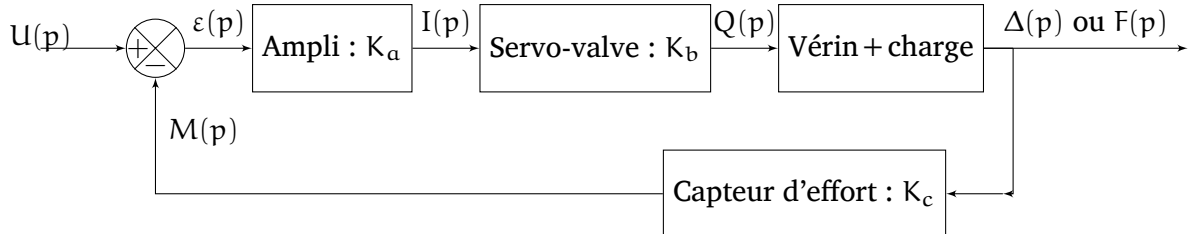
Exercice 5 - Étude de l'asservissement de force

Centrale 1998

Corrigé page 37

On se propose de caractériser le fonctionnement d'un tribomètre¹ utilisé pour étudier les surfaces frottantes des freins du T.G.V.

Le cahier des charges du tribomètre indique que la force à laquelle doit être soumis le plot frottant est comprise entre 40 N et 800 N. Cette force doit pouvoir évoluer selon des lois reproduisant les principales conditions de freinage rencontrées lors de l'exploitation du T.G.V. La fréquence d'utilisation est inférieure à 200 Hz. Toutes ces contraintes ont amené à concevoir un dispositif d'asservissement en force (ou en pression) suivant la disposition suivante (diagramme des blocs) :

**A. Étude de la servo-valve**

Le constructeur de la servo-valve a fourni les courbes caractéristiques de la servo-valve à la pression d'utilisation (figures 12.16 et 12.17).

Q1. On identifie la servo-valve à un modèle de système continu du premier ordre. Préciser la fonction transfert $S_v(p)$.

Justifier ce choix en vous aidant des diagrammes fournis par le constructeur. Évaluer la constante de temps de la servo-valve et le gain statique de la servo-valve.

En quoi ce choix est-il critiquable ?

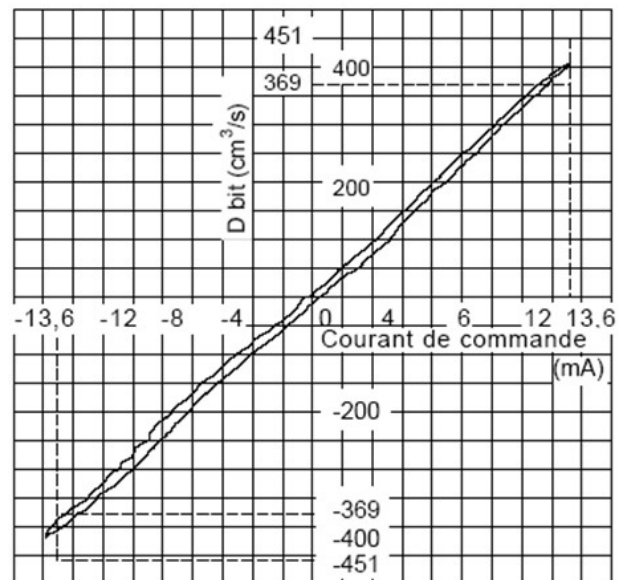


FIGURE 12.16 – Caractéristique Débit/Courant

1. Un tribomètre permet de mesurer le coefficient de frottement.

B. Détermination de la fonction de transfert

L'étude suivante se propose de définir la fonction de transfert du bloc « vérin et charge ».

On considère les données suivantes :

$q(t)$ Débit

$x(t)$ Déplacement de la tige du vérin

$\delta_p(t)$ Différence de pression sur les deux faces du piston

S Surface de poussée du vérin
 $S = 133 \text{ mm}^2$

V Volume du vérin et des tuyaux
 $V = 10 \text{ cm}^3$

M Masse à mettre en mouvement
 $M = 4 \text{ kg}$

B Coefficient de compressibilité du fluide
 $B = 10\,000 \times 10^5 \text{ Pa}$

f Coefficient de frottement visqueux
 $f = 2\,800 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$

r Raideur mécanique
 $r_h + r = 3,8 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

Le fonctionnement de cet ensemble est décrit par les deux équations différentielles suivantes :

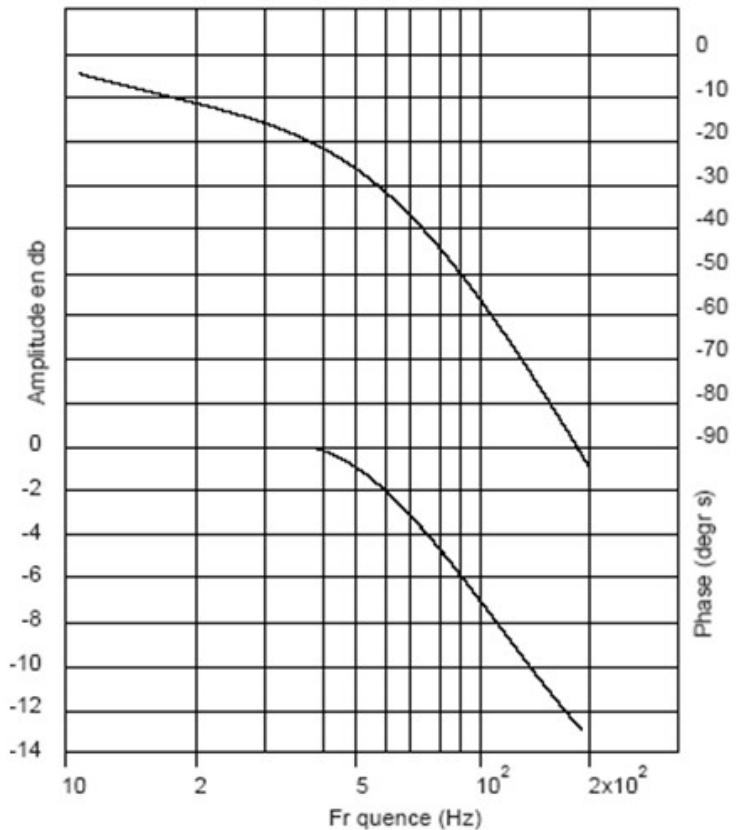


FIGURE 12.17 – Caractéristique fréquentielle

— Équation de débit : $q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2 \cdot B} \frac{d\delta_p(t)}{dt}$

— Équation des forces : $S \cdot \delta_p(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + r \cdot x(t)$

Q2. Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{\Delta P(p)}{Q(p)}$ en fonction de B, V, r, r_h, M, f avec $r_h = \frac{2 \cdot B \cdot S^2}{V}$ la raideur hydraulique du vérin. Montrez que $H_1(p)$ s'écrit :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

avec $N_1(p)$ et $D_1(p)$ deux polynômes en p avec $N_1(0) = 1$ et $D_1(0) = 1$.

Q3. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $B_o(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$.

Pour la suite, on pose pour $K_a = 1$ et $K_c = 1$:

$$B_o(p) = \frac{372}{p} \frac{1}{1 + T_b \cdot p} \cdot \frac{1 + \frac{2 \cdot 1,36}{256} \cdot p + \frac{p^2}{256^2}}{1 + \frac{2 \cdot 0,36}{975} \cdot p + \frac{p^2}{975^2}}$$

Sur la figure 12.18 sont représentés les diagrammes de Bode de $N_1(p)$ et $\frac{1}{D_1(p)}$ et $\frac{1}{1 + T_b \cdot p}$.

Q4. Indiquez sur le graphe à quelles courbes correspondent chacune des fonctions de transfert. Compléter les diagrammes en précisant les asymptotes.

Q5. Compléter les diagrammes en ajoutant l'intégrateur de fonction de transfert $\frac{372}{p}$.

Q6. En déduire les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la FTBO.

Q7. Préciser la condition de stabilité en fonction de K_a .

Q8. Justifier, que dans le domaine de fonctionnement, la FTBO peut être modélisée par $B'_o(p) = \frac{K'}{p}$.

Préciser K' .

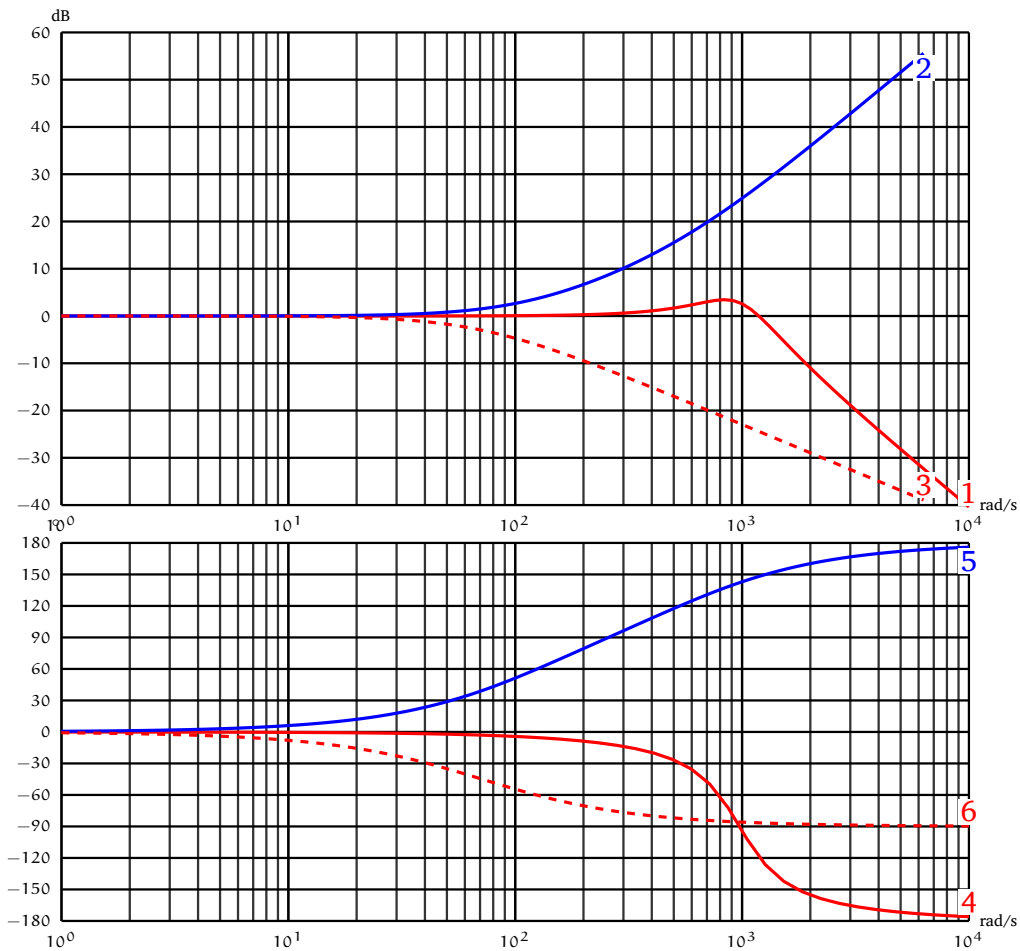


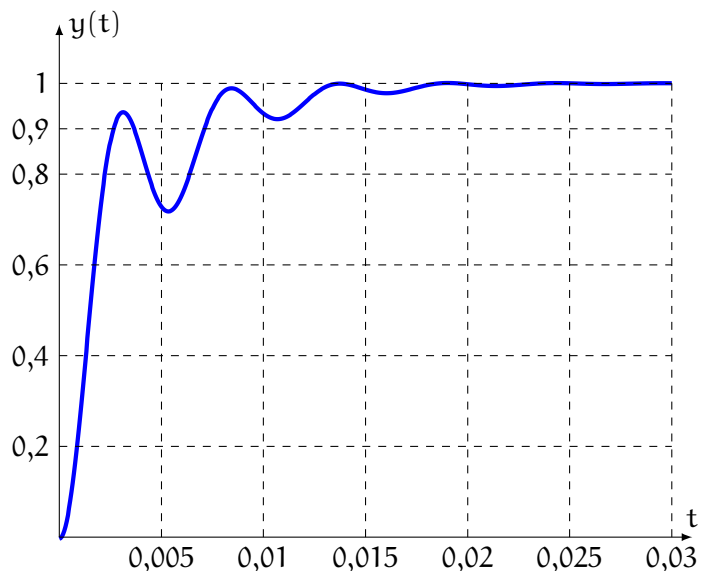
FIGURE 12.18 – Diagrammes de Bode à compléter

La réponse temporelle à un échelon unitaire de l'actionneur du tribomètre est tracée sur la figure 12.19.

On considère la modélisation simplifiée $B'_o(p) = \frac{K'}{p}$.

Q9. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée simplifiée $B'_f(p)$ puis la réponse temporelle pour une entrée en échelon.

Q10. Tracer la réponse temporelle sur la figure 12.19. Que pensez-vous du modèle simplifié?



Exercice 6 - Caractérisation d'une fonction de transfert

Corrigé page 39

La fonction de transfert en boucle ouverte d'un asservissement à retour unitaire est de la forme :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p^n \cdot (1 + T \cdot p)^2} \text{ avec } K > 0$$

Q1. Tracer le schéma bloc de l'asservissement, l'entrée est une consigne de vitesse $\Omega_c(p)$ et la sortie $\Omega_s(p)$.

Q2. Déterminer K , n et T pour que le système en boucle fermée réponde aux exigences suivantes :

- le signal de consigne étant une rampe de $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, l'erreur de traînage est de $\varepsilon_t = \frac{1}{50} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,
- la marge de gain est de 10 dB.

Q3. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels de $H_{BO}(p)$, préciser les marges de phase et de gain.

Q4. Quelle est alors l'erreur indicielle ?

Q5. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

Exercice 7 - Exosquelette pour le maniement de charges

Extrait de CCS TSI 2017

Corrigé page 40

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue (figure 12.20).

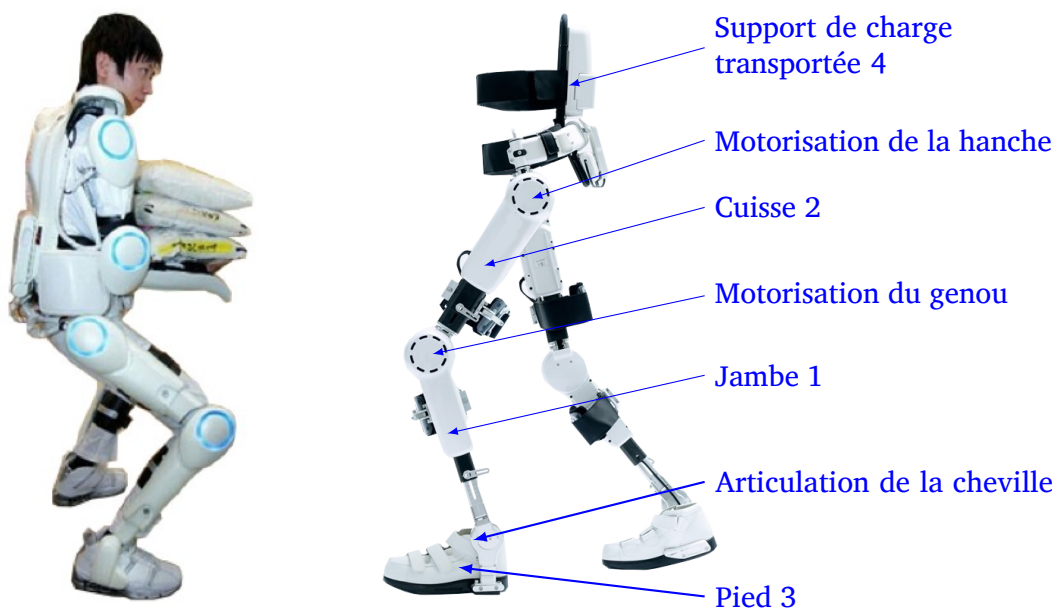


FIGURE 12.20 – Exosquelette

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée figure 12.21 montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.

Afin de s'assurer de minimiser l'erreur par rapport à cette consigne, on montre que cela revient à respecter une précision à la fois pour un échelon, une rampe et une accélération.

Le cahier des charges est décrit ci-dessous :

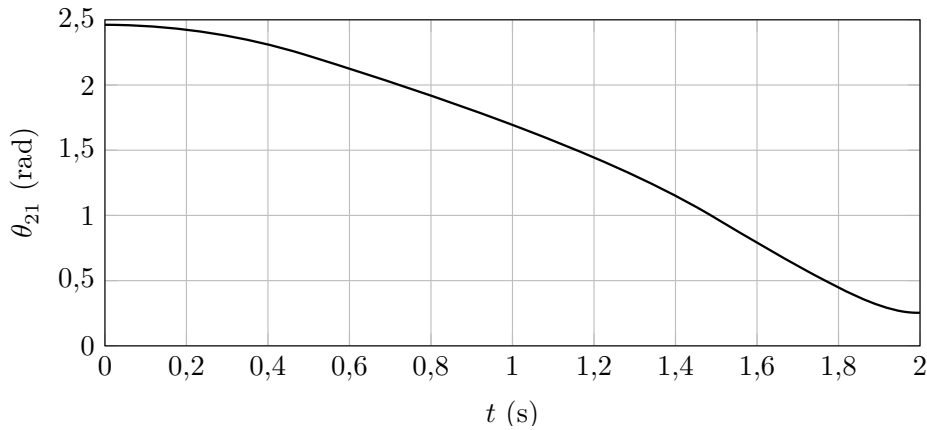


FIGURE 12.21 – Évolution de la consigne moteur

Exigences	Critères d'appréciation	Niveau
Gérer le mouvement	Précision statique de la boucle d'asservissement de position vertical	
	erreur de position	< 1%
	erreur de traînage	< 1%
	erreur d'accélération	< 1%

Selon le cahier des charges, pour assurer une bonne synchronisation des axes, l'exigence de précision statique suite à une entrée de type échelon, de type rampe ou de type accélération doit être inférieure à 1%.

Le premier modèle défini figure 12.22 est adopté pour chaque axe. Les notations utilisées sont précisées dans le tableau 12.2.

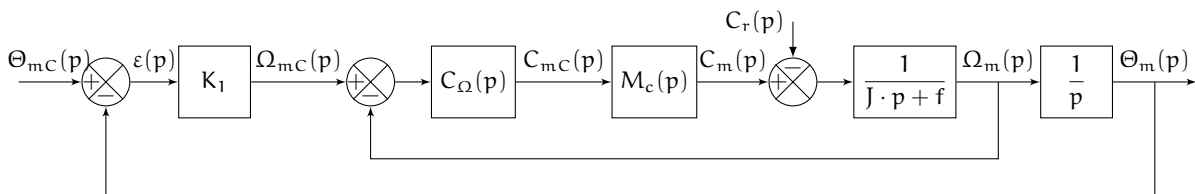


FIGURE 12.22 – Premier modèle

Le correcteur de l'asservissement de vitesse est de la forme $C_{\Omega}(p) = K_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$ avec T_i réglé afin de compenser le pôle dominant pour la situation correspondant à l'inertie moyenne, $T_i = \frac{J}{f}$.

L'écart est défini par la variable $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$.

La précision statique du système est définie par les paramètres suivants :

- Erreur de position : $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$ suite à une entrée de type échelon unitaire $\theta_{mC}(t) = \mathcal{H}(t)$.
- Erreur de traînage : $\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$ suite à une entrée de type échelon unitaire $\theta_{mC}(t) = t \cdot \mathcal{H}(t)$.
- Erreur en accélération : $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$ suite à une entrée de type échelon unitaire $\theta_{mC}(t) = t^2 \cdot \mathcal{H}(t)$.

avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

On rappelle la transformée de Laplace de $t^n \cdot \mathcal{H}(t)$: $\frac{n}{p^{n+1}}$ pour $n > 1$.

On considère dans un premier temps que le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude $c_r(t) = 0$.

Q1. Exprimer $H_{\Omega}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

$\Theta_{mC}(p)$	consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_{mC}(t)$ en rad)
$\Theta_m(p)$	position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_m(t)$ en rad)
$C_{mC}(p)$	consigne de couple moteur (variable temporelle : $C_{mC}(t)$ en N · m)
$C_m(p)$	couple moteur (variable temporelle : $c_m(t)$ en N · m)
$C_r(p)$	couple résistant perturbateur (variable temporelle : $c_r(t)$ en N · m)
K_1	gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en s^{-1})
$\Omega_{mC}(p)$	consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_{mC}(t)$ en $\text{rad} \cdot s^{-1}$)
$\Omega_m(p)$	vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_m(t)$ en $\text{rad} \cdot s^{-1}$)
$C_\Omega(p)$	correcteur de l'asservissement de vitesse
$M_c(p)$	modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles : $M_c(p) = 1$
J	moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur
f	coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement

TABLEAU 12.2 – Notations

Q2. Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\Theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p .

Q3. Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Q4. Déterminer l'erreur en accélération ε_a et conclure quant au respect du cahier des charges.

Afin de satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, on choisit d'installer une correction par anticipation de la vitesse (figure 12.23) est adopté.

Pour cette partie, on prend : $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + T \cdot p}$ avec $T = 33$ ms.

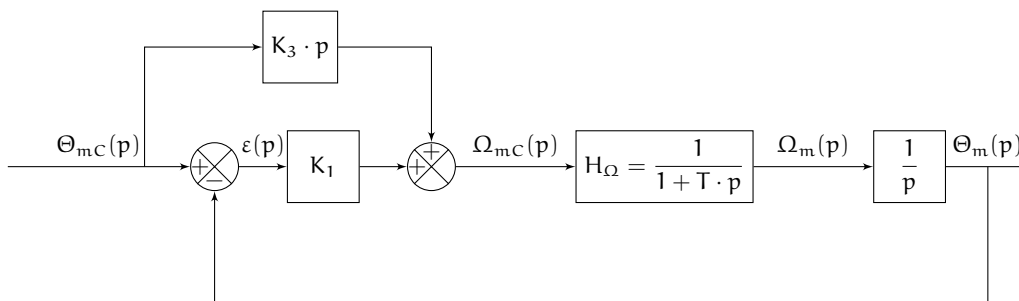


FIGURE 12.23 – Second modèle

Q5. Déterminer $H_{2\Theta}(p) = \frac{\Theta_m(p)}{\Theta_{mC}(p)}$. La fonction de transfert est-elle stable ?

Q6. Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction $\Theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

Q7. Le modèle par anticipation a-t-il une influence sur l'erreur de position ε_p ?

Q8. Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant d'annuler cette erreur.

Q9. Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération ε_a en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Nous avons considéré au-dessus que le couple résistant est négligeable, on considère maintenant que $c_r(t) = C_{r0} \cdot \mathcal{H}(t)$ avec C_{r0} un couple résistant constant.

Q10. Déterminer $\Theta_m(p)$ sous la forme $\Theta_m(p) = H_\Theta \cdot \Theta_{mC}(p) + H_{C_r}(p) \cdot C_r(p)$.

Q11. Déterminer $\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_m(t))$ pour $\theta_{mC}(t) = \Theta_0 \mathcal{H}(t)$ et $c_r(t) = C_{r0} \cdot \mathcal{H}(t)$.

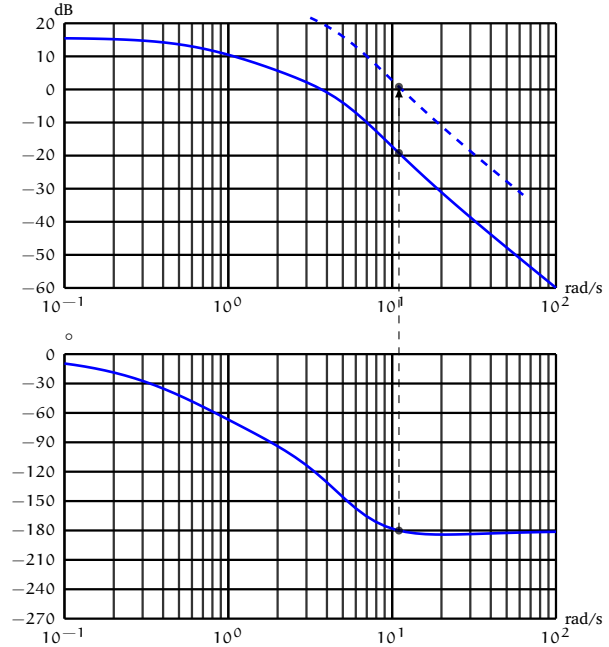
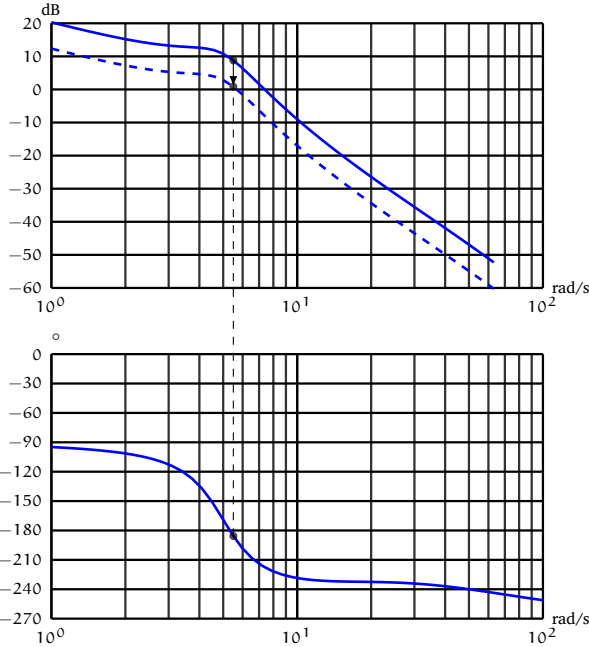
Cor. 1 : Applications du cours

Sujet page 23

A.

Q1. T_1 , le système en BF est instable, pour le rendre stable, il faut descendre le diagramme d'amplitude d'environ -8 dB d'où $K = 10^{-\frac{8}{20}} = 0.4$.

$T_2(p)$ est stable, la courbe peut être remontée au maximum de 20 dB. La valeur limite de K est $K = 10^{\frac{20}{20}} = 10$.



B.

Commençons par mettre la FTBO sous forme canonique

$$H_1(p) = \frac{160}{p(16 + 2 \cdot p + p^2)}$$

$$H_1(p) = \frac{10}{p \left(1 + \frac{2 \cdot 0,25}{4} \cdot p + \frac{p^2}{4^2} \right)}$$

soit $K = 10$, $\xi = 0,25$ et $\omega_n = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q2. Tracer les diagrammes de Bode. Le système est-il stable en boucle fermée ?

Les diagrammes de Bode s'obtiennent en additionnant les diagrammes de Bode de l'intégrateur et du second ordre.

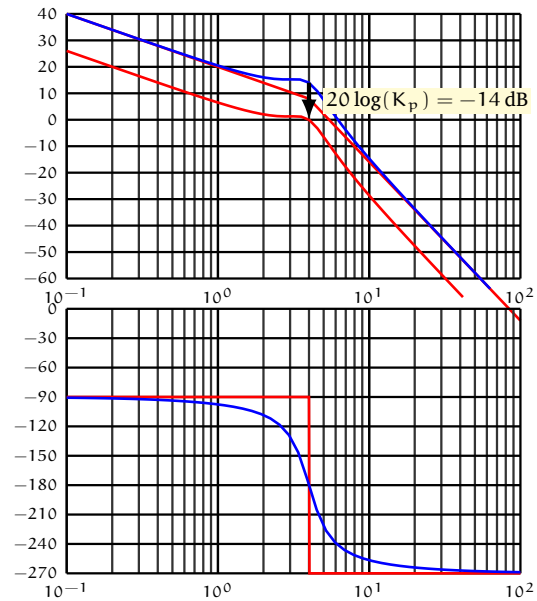
On constate sur les diagrammes de Bode ci-contre que le système est instable.

Q3. Déterminer graphiquement la valeur de K_p pour la juste instabilité.

La pulsation $\omega_{180} = \omega_n = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

La juste instabilité est obtenue pour $\omega_{0dB} = \omega_{180}$. On lit sur la courbe pour $\omega_n = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ une amplitude d'environ 14 dB.

Il faut donc choisir K_p tel que $K_p = 10^{-\frac{14}{20}} \approx 0,2$.



C.

Le principe est le même pour les deux fonctions de transfert. On retrouve dans les deux cas une fonction de transfert du second ordre associée à une intégration.

On sait que :

- pour la pulsation propre du second ordre ω_n l'argument est de -90° ,
- l'intégration ajoute un déphasage de -90° pour

toutes les pulsations.

L'argument de la FTBO pour $\omega = \omega_n$ est donc $\arg(G(j \cdot \omega_n)) = -180^\circ$.

La pulsation $\omega_{180} = \omega_n$.

Le système est juste instable si $\omega_{0dB} = \omega_{180}$, il suffit donc de déterminer le module de la fonction de transfert pour $\omega = \omega_n$ en fonction des paramètres et de ω_n puis de déterminer K_p pour $|G(j \cdot \omega_n)| = 1$ (soit $G_{dB}(\omega_n) = 0 \text{ dB}$).

12.5 Feuille de travaux dirigés n°12

Q4. Déterminer analytiquement la valeur de K_p pour laquelle le système est juste instable.

Déterminons le module de $G(j \cdot \omega)$ pour $\omega = \omega_n$.

$$|G(j \cdot \omega)| = \frac{K_p \cdot K}{\omega \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

pour $\omega = \omega_n$

$$|G(j \cdot \omega_n)| = \frac{K_p \cdot K}{\omega_n \cdot \sqrt{4 \cdot \xi^2}} = \frac{K_p \cdot K}{\omega_n \cdot 2 \cdot \xi}$$

Pour les deux fonctions proposées on a donc :

— $G_1(p)$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{4 \times 0,1}} = 1,58 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\xi = \frac{4 + 0,1}{2} \cdot \omega_n = 3,24$$

$$|G(j \cdot \omega_n)| = \frac{K_p \cdot 5}{\omega_n \cdot 2 \cdot \xi} = 0,487 \cdot K_p$$

— Le système est juste instable pour

$$K_p = \frac{1}{0,487} = 2,05$$

— $G_2(p)$

$$\omega_n = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\xi = \frac{4 + 0,1}{2} \cdot \omega_n = 1$$

$$|G(j \cdot \omega_n)| = \frac{K_p}{\omega_n \cdot 2 \cdot \xi} = 0,1 \cdot K_p$$

— Le système est juste instable pour

$$K_p = \frac{1}{0,1} = 10$$

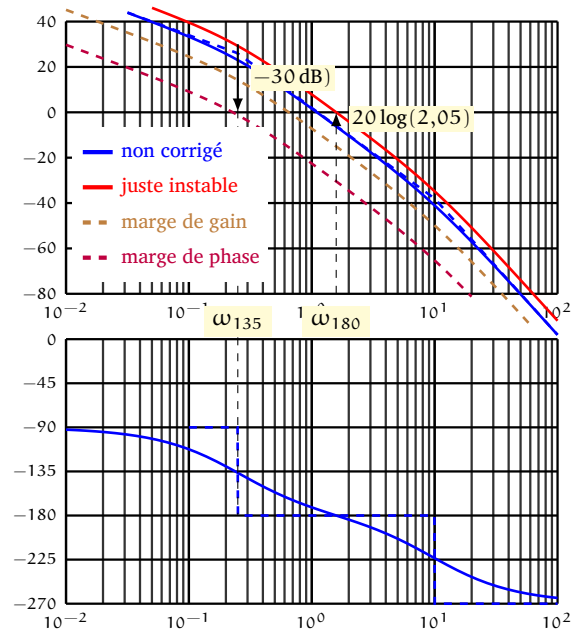
Q5. Déterminer K_p afin que la marge de phase soit $M_\phi > 45^\circ$ et la marge de gain $M_G > 15 \text{ dB}$.

La marge de gain peut être déterminée par calcul ou graphiquement.

On souhaite assurer une marge de gain de $M_G > 15 \text{ dB}$. À partir de la courbe de juste instabilité, il faut descendre la courbe de gain de 15 dB soit multiplier la fonction de transfert par un K_G tel que $K_G < 10^{-\frac{15}{20}} = 0,177$

À partir du tracé corrigé avec la bonne marge de gain, on vérifie si la marge de phase M_ϕ est vérifiée. Si ce n'est pas le cas, on règle la marge de phase en déterminant graphiquement le gain K_ϕ qui permet de respecter la marge de phase.

— Pour $G_1(p)$



On constate que pour le respect strict de la marge de gain ne permet pas de satisfaire la marge de phase.

On cherche donc la pulsation ω_{135} telle de la marge que l'argument est $-180^\circ + 45^\circ$.

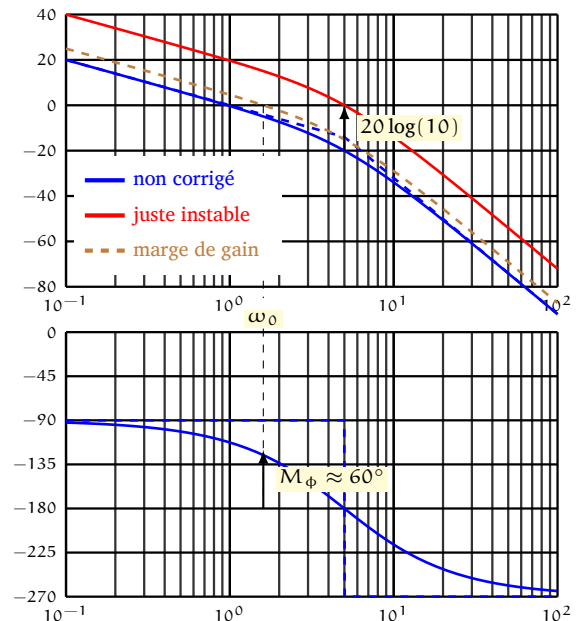
Compte tenu des valeurs de $T_1 = 4 \text{ s} \geq T_2 = 0,1 \text{ s}$, on peut considérer que $\omega_{135} \approx \frac{1}{T_1} = 0,25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On lit pour cette valeur l'amplitude de la FTBO juste instable $|G_1(j \cdot \omega_{135})| \approx 30 \text{ dB}$, il faut donc descendre d'autant et multiplier le gain par la valeur $K_{135} = \frac{-30}{20} = 0,03$.

Finalement la valeur de K_p qui satisfait les deux critères est $K_p = 0,03 \times 2,05 = 0,065$.

La marge de phase est $M_\phi = 45^\circ$ et la marge de gain $M_G = 30 \text{ dB}$.

— Pour $G_2(p)$



On constate pour $G_2(p)$ que le respect de la marge de gain $M_G = 15 \text{ dB}$ entraîne le respect du critère de la marge de phase M_ϕ .

Pour $K_p = 10 \times 0,177 = 1,77$ on a donc $M_G = 15 \text{ dB}$ et $M_\phi = 60^\circ$.

D.

Q6. À partir de la fonction de transfert en boucle fermée, déterminer la condition sur K_p pour que le système soit stable.

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit

$$F(p) = \frac{K_p \cdot T(p)}{1 + K_p \cdot T(p)} = \frac{K_p(1 - 0.2 \cdot p)}{K_p \cdot (1 - 0.2 \cdot p) + 1 + 4 \cdot p + 100 \cdot p^2}$$

$$F(p) = \frac{K_p \cdot (1 - 0.2 \cdot p)}{K_p + 1 + (4 - 0.2 \cdot K_p) \cdot p + 100 \cdot p^2}$$

Le dénominateur est un second ordre, pour que le système soit stable, il suffit que tous les coefficients soient de même signe donc

$$\begin{cases} K_p + 1 > 0 \\ 4 - 0.2 \cdot K_p > 0 \end{cases}$$

soit $-1 < K_p < 20$.

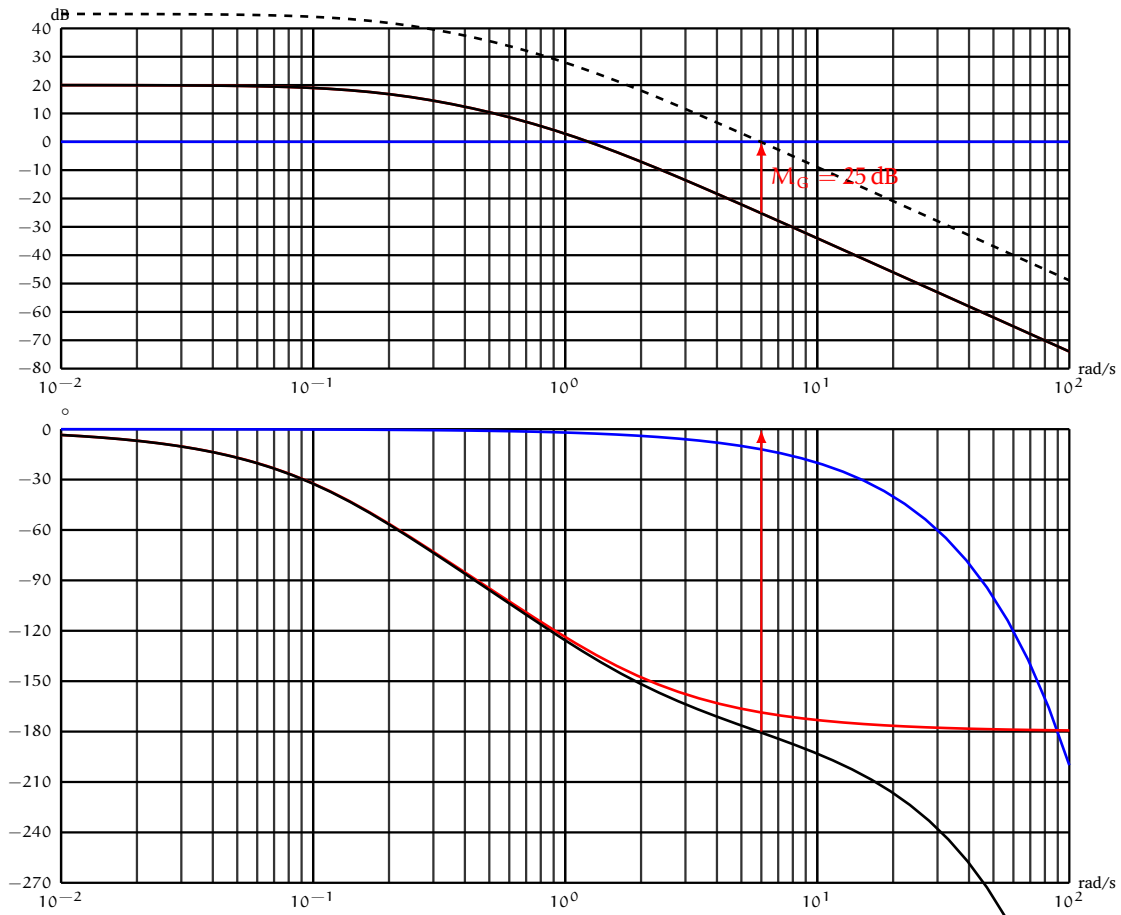
Les valeurs négatives n'ont pas forcément de sens, de même pour la valeur $K_p = 0$ le système n'existe pas.

On se limite donc à $0 < K_p < 20$.

Cor. 2 : Stabilité d'un système à retard

Sujet page 24

Q1. Tracer les diagrammes de Bode de $H_p(p)$ puis de la fonction $T(p)$ en utilisant l'approximation de Padé sur les diagrammes précédents pour $K = 1$.



Q2. Déterminer la valeur limite de K à partir de cette approximation.

La courbe de phase intercepte -180° pour $\omega_{180} = 6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On note une marge de gain de 25 dB La valeur maxi de $K = 10^{\frac{25}{20}} \approx 18$ (courbe en tirets).

Q3. Que pensez-vous de la modélisation retenue ?

La modélisation retenue est valide jusqu'à $\approx 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q4. Pour cette modélisation le système est toujours stable, elle est donc à utiliser avec précaution.

Cor. 3 : Précision et stabilité

Sujet page 24

Q1. Déterminer la fonction de transfert $O(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$ puis

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}.$$

$$O(p) = H_2(p) \cdot H_3(p) = \frac{15 \cdot k}{p(1+p)} \cdot \frac{1}{1+0.1 \cdot p}$$

$$F(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_2(p) \cdot H_3(p)}$$

$$F(p) = \frac{\frac{15 \cdot k}{p(1+p)}}{1 + \frac{15 \cdot k}{p(1+p)} \cdot \frac{1}{1+0.1 \cdot p}}$$

$$F(p) = \frac{15 \cdot k \cdot (1 + 0.1 \cdot p)}{(1 + 0.1 \cdot p) \cdot (p(1+p)) + 15 \cdot k}$$

$$F(p) = \frac{15 \cdot k \cdot (1 + 0.1 \cdot p)}{0.1 \cdot p^3 + 1.1 \cdot p^2 + p + 15 \cdot k}$$

Q2. Déterminer la fonction de transfert $G(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$.

$$G(p) = H_1(p) \frac{H_2(p)}{1 + H_2(p) \cdot H_3(p)} = H_1(p) \cdot F(p)$$

$$G(p) = \frac{5}{(1 + 16p)(1 + 33p)} \frac{15k(1 + 0.1p)}{0.1p^3 + 1.1p^2 + p + 15k}$$

Q3. Déterminer la valeur finale de $Y(t)$ pour $k = 0,5$ et $k = 5$.

On ne peut utiliser le théorème de la valeur finale que si le système est stable, vérifions la stabilité.

$G(p)$ est le produit de deux fonctions. Le système est stable si chacune des deux fonctions est stable.

- $H_1(p)$ est un second ordre avec deux racines réelles négatives, il est donc stable.
- $F(p)$ est une fonction du troisième ordre, on ne peut pas répondre directement, il faut étudier la stabilité à partir des diagrammes de Bode de la FTBO (ici $O(p)$).

$O(p)$ est le produit de deux premiers ordres et d'une intégration :

$$O(p) = \frac{15 \cdot k}{p(1+p)} \cdot \frac{1}{1+0.1 \cdot p}$$

Il est possible de calculer les marges de gain et de phase directement.

On sait que la pulsation ω_n du second ordre équivalent au produit des deux premiers ordres est :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}} = \sqrt{\frac{1}{0,1}} = \sqrt{10}.$$

Pour cette pulsation ω_n le déphasage du second ordre est de -90° . À ce déphasage s'ajoute le déphasage apporté par l'intégration -90° , finalement on a

$$\arg(O(j \cdot \omega_n)) = -180^\circ$$

La pulsation $\omega_{180} = \omega_n = \sqrt{10} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le module pour cette pulsation est :

$$|O(j \cdot \omega)| = \frac{15 \cdot k}{\omega \cdot \sqrt{1 + \omega^2} \cdot \sqrt{1 + 0,1^2 \cdot \omega^2}}$$

$$|O(j \cdot \omega_{180})| = \frac{15 \cdot k}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{1,1}} = \frac{15}{11} \cdot k$$

Le système est stable si la marge de gain est positive :

$$M_G = -20 \cdot \log(O(j \cdot \omega_{180})) > 0$$

$$O(j \cdot \omega_{180}) < 1$$

$$\frac{15}{11} \cdot k < 1$$

soit

$$k < \frac{11}{15}$$

Le système est stable si $k < \frac{1.1}{1.5} \approx 0.73$. On ne peut donc calculer la valeur finale que dans les cas $k = 0,1$ et $k = 0,5$, pour les autres valeurs, le système est instable.

Pour $k = 0,1$ et $k = 0,5$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot Y(p))$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot H_1(p) \frac{H_2(p)}{1 + H_2(p) \cdot H_3(p)} \cdot \frac{Y_0}{p} \right)$$

$$= 5 \cdot Y_0$$

Lorsqu'elle existe, la valeur finale ne dépend pas de k .

Cor. 4 : Précision et paramètres

Sujet page 25

Q1. Déterminer la fonction de transfert $G(p)$.

$$p^2 \cdot \Theta(p) + (4 + \alpha) \cdot p \cdot \Theta(p) + 4 \cdot \alpha \cdot \Theta(p) = 4 \cdot U(p)$$

$$G(p) = \frac{\Theta(p)}{U(p)} = \frac{4}{p^2 + (4 + \alpha) \cdot p + 4 \cdot \alpha}$$

$$= \frac{4}{(p + \alpha) \cdot (p + 4)} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{(1 + \frac{p}{\alpha})} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{p}{4})}$$

Q2. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée

$$G_F(p) = \frac{\Theta(p)}{\Theta_e(p)}. \text{ Mettre sous forme canonique.}$$

$$G_f(p) = \frac{K_p \cdot G(p)}{1 + K_p \cdot G(p)} = \frac{4 \cdot K_p}{p^2 + (4 + \alpha) \cdot p + 4 \cdot \alpha + 4 \cdot K_p}$$

$$= \frac{K_f}{1 + \frac{2 \cdot z_f}{\omega_{nF}} p + \frac{p^2}{\omega_{nF}^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_f = \frac{K_p}{K_p + \alpha} \\ \omega_{nF} = 2 \cdot \sqrt{K_p + \alpha} \\ z_f = \frac{4 + \alpha}{4 \cdot \sqrt{K_p + \alpha}} \end{cases}$$

Q3. Le système est-il stable ?

Pour un système du second ordre, il faut et il suffit que tous les coefficients du dénominateur soient positifs, c'est le cas ici.

Q4. Déterminer K_p pour obtenir un coefficient d'amortissement $z_f > 0,5$.

$$z_f = \frac{4 + \alpha}{2 \cdot \sqrt{K_p + \alpha}} > 0,5 \Rightarrow K_p < 0,25 \cdot \alpha^2 + \alpha + 4$$

soit ici pour $\alpha = 16$, $K_p < 84$.

Q5. Déterminer l'erreur indicielle pour un échelon de température de $\Theta_0 = 20^\circ\text{C}$ en fonction du paramètre α . Conclure sur la précision.

$$\varepsilon_i = \lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_e(t) - \theta_s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \Theta_e(p) - G_f(p) \cdot \Theta_e(p))$$

$$\varepsilon_i = \left(1 - \frac{K_p}{\alpha + K_p}\right) \Theta_0 = \frac{\alpha}{\alpha + K_p} \Theta_0$$

Pour $K_p = 84$ et $16 \leq \alpha \leq 20$

$$\frac{4}{25} \Theta_0 \approx 3,2^\circ\text{C} \leq \varepsilon_i \leq \frac{5}{26} \approx 3,84^\circ\text{C}$$

Pour diminuer ε_i , il faut augmenter K_p mais cela va rendre le système plus oscillant (diminution de z_f).

Q6. Déterminer la FTBO pour les valeurs suivantes de T_i et

α :

— $T_i = 1/20$, $T_i = 1/16$

— $\alpha = 20$, $\alpha = 16$

La FTBO devient :

$$BO(p) = C(p) \cdot G(p) = \frac{K_p}{\alpha} \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p \cdot \left(1 + \frac{p}{\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{4}\right)}$$

— $T_i = \frac{1}{20}$

— $\alpha = 20$:

$$BO_1(p) = \frac{K_p}{p \cdot \left(1 + \frac{p}{4}\right)}$$

— $\alpha = 16$:

$$BO_2(p) = \frac{20 \cdot K_p}{16} \frac{1 + \frac{1}{20} \cdot p}{p \cdot \left(1 + \frac{p}{16}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{4}\right)}$$

— $T_i = \frac{1}{16}$

— $\alpha = 20$:

$$BO_3(p) = \frac{16 \cdot K_p}{20} \frac{1 + \frac{1}{16} \cdot p}{p \cdot \left(1 + \frac{p}{20}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{4}\right)}$$

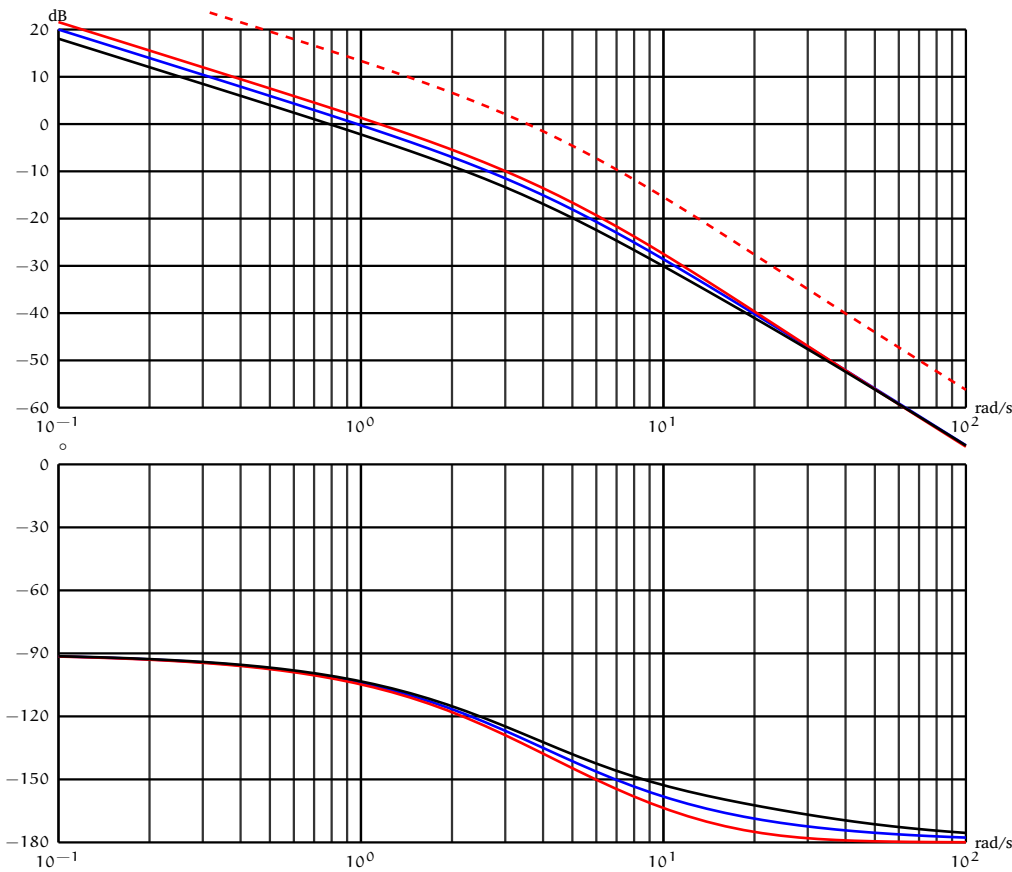
— $\alpha = 16$:

$$BO_4(p) = \frac{K_p}{p \cdot \left(1 + \frac{p}{4}\right)} = BO_1(p)$$

Q7. À partir du tracé des diagrammes de Bode de la FTBO pour chacun des cas (on prend $K_p = 1$), déterminer le couple (T_i, K_p) tel que la marge de phase (M_p) soit supérieure à 45° pour toutes les valeurs de α .

À partir des tracés de $BO_1(p) = BO_4(p)$, $BO_2(p)$ et $BO_3(p)$ sur la figure ci-dessous, on constate que la courbe à prendre en compte (la plus « haute ») est le lieu de $BO_2(p)$ obtenue avec $T_i = \frac{1}{20}$. Pour obtenir une marge de phase de $M_p = 45^\circ$ on peut décaler la courbe vers le haut de 12 dB, d'où $K_p = 10^{\frac{12}{20}} \approx 4$ (tracé corrigé en pointillé).

Q8. La FTBO comporte un intégrateur, le système est donc précis pour une entrée en échelon.



Cor. 5 : Étude de l’asservissement de force

Sujet page 26

Q1. On identifie la servo-valve à un modèle de système continu du premier ordre. Préciser la fonction transfert $Sv(p)$.

Justifier ce choix en vous aidant des diagrammes fournis par le constructeur. Évaluer la constante de temps de la servo-valve et le gain statique de la servo-valve. En quoi ce choix est-il critique ?

$$Sv(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_b}{1 + T_b \cdot p}$$

La caractéristique est proportionnelle (figure 12.16) on peut en déduire

$$K_b = \frac{369 \text{ cm}^3/\text{s}}{13,6 \text{ mA}} = 0,027 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{A}^{-1}$$

Pour déterminer la constante temps, on peut utiliser la réponse fréquentielle. On sait que $\omega_c = \frac{1}{T_b}$, le déphasage pour cette pulsation est de -45° et l’atténuation de -3 dB . On peut donc déduire des deux courbes

- à partir du diagramme phase
 $\omega_c = 80 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- à partir du diagramme d’amplitude
 $\omega_c = 70 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On choisit la plus petite $\omega_c = 70 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

soit $T_b = \frac{1}{70} = 0,014 \text{ s}$

Il est évident en regardant la courbe de phase que le modèle est d’un ordre supérieur à 1, en effet, le déphasage dé-

passé -90° alors qu’un premier ordre tend asymptotiquement vers -90° .

Q2. Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{\Delta P(p)}{Q(p)}$ en fonction de B, V, r, rh, M, f avec $rh = \frac{2 \cdot B \cdot S^2}{V}$ la raideur hydraulique du vérin. Montrez que $H_1(p)$ s’écrit :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

avec $N_1(p)$ et $D_1(p)$ deux polynômes en p avec $N_1(0) = 0$ et $D_1(0) = 0$.

$$\begin{aligned} Q(p) &= S \cdot p \cdot X(p) + \frac{V}{2 \cdot B} \cdot p \cdot \Delta_p(p) \\ S \cdot \Delta_p(p) &= M \cdot p^2 \cdot X(p) + f \cdot p \cdot X(p) + r \cdot X(p) \\ &= (M \cdot p^2 + f \cdot p + r) \cdot X(p) \end{aligned}$$

$$X(p) = \frac{S}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r} \cdot \Delta_p(p)$$

$$Q(p) = S \cdot p \cdot \frac{S}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r} \cdot \Delta_p(p) + \frac{V}{2 \cdot B} \cdot p \cdot \Delta_p(p)$$

$$Q(p) = \left(\frac{S^2}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r} + \frac{V}{2 \cdot B} \right) \cdot p \cdot \Delta_p(p)$$

$$Q(p) = \left(\frac{2 \cdot B \cdot S^2 + V \cdot (M \cdot p^2 + f \cdot p + r)}{(M \cdot p^2 + f \cdot p + r) \cdot 2 \cdot B} \right) \cdot p \cdot \Delta_p(p)$$

$$H_1(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{V} \cdot \frac{M \cdot p^2 + f \cdot p + r}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r + \frac{2 \cdot S^2 \cdot B}{V}}$$

$$H_1(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{V} \cdot \frac{M \cdot p^2 + f \cdot p + r}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r + rh}$$

Q3. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte

$$B_o(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$$

$$B_o(p) = K_a \cdot Sv(p) \cdot H_1(p) \cdot K_c$$

$$B_o(p) = K_a \cdot K_c \cdot \frac{K_b}{1 + T_b \cdot p} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{V} \cdot \frac{M \cdot p^2 + f \cdot p + r}{M \cdot p^2 + f \cdot p + r + rh}$$

Q4. Indiquez sur le graphe à quelles courbes correspondent chacune des fonctions de transfert.

— 1 et 4 respectivement le module et l'argument de $\frac{1}{D_1(p)}$.

— 2 et 5 le module et l'argument de $N_1(p)$.

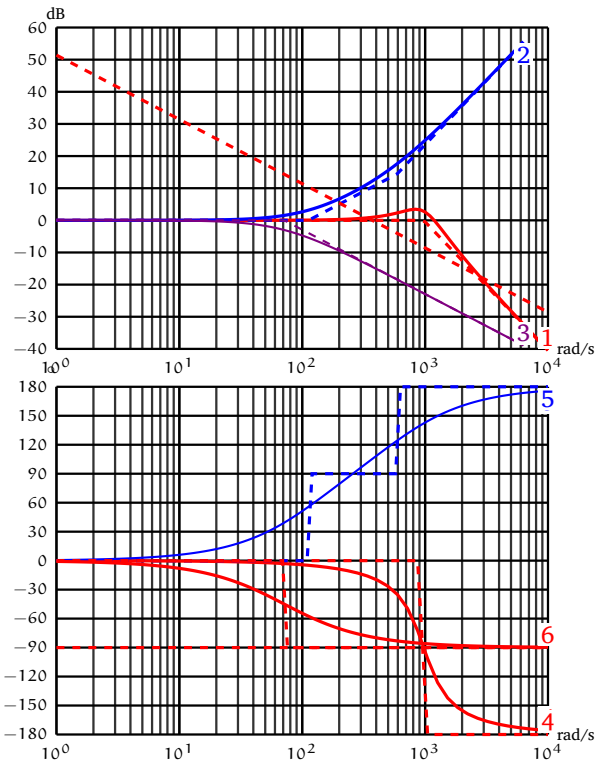
— 3 et 6 le module et l'argument de $\frac{1}{1 + T_b \cdot p}$.

Les asymptotes sont tracées sur la figure ci-dessous.

On remarque que le coefficient d'amortissement du numérateur est supérieur à 1, on peut donc le décomposer en deux premiers ordres et tracer les asymptotes correspondantes.

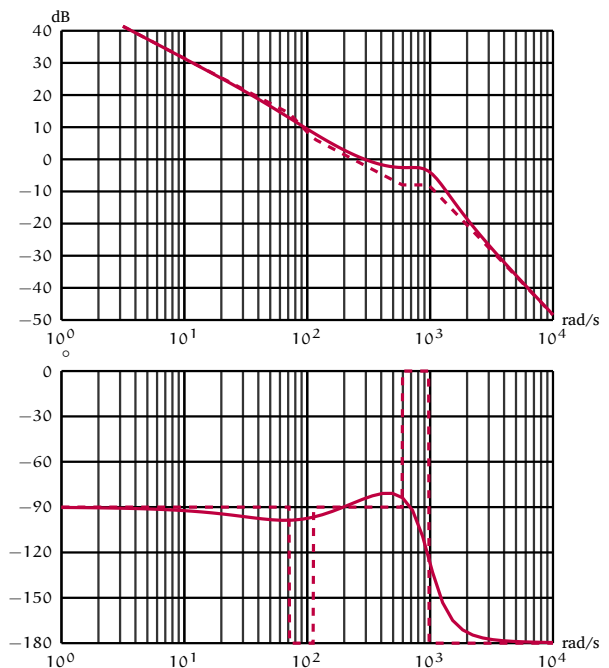
Q5. Compléter les diagrammes en ajoutant l'intégrateur de fonction de transfert $\frac{372}{p}$.

Voir sur la figure ci-dessous.



Q6. Tracer les diagrammes de Bode de la FTBO.

Il suffit d'additionner graphiquement les courbes.



Q7. Préciser la condition de stabilité en fonction de K_a .

Le déphasage n'est jamais inférieur à -180° , le système est stable pour tout K_a .

Q8. Justifier que dans le domaine de fonctionnement la FTBO peut être modélisée par $B'_o(p) = \frac{K'}{p}$. Préciser K' .

Jusqu'à environ $300 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ la modélisation par $B'_o(p) = \frac{K'}{p}$ est parfaitement valide au delà la modélisation n'est plus aussi juste. La courbe de phase au-delà de $800 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ tend vers un déphasage de -180° et la courbe de gain présente une inflexion de la courbe vers le « haut ».

On a bien $B'_o(p) = \frac{K'}{p}$ avec $K' = 372$.

Q9. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée

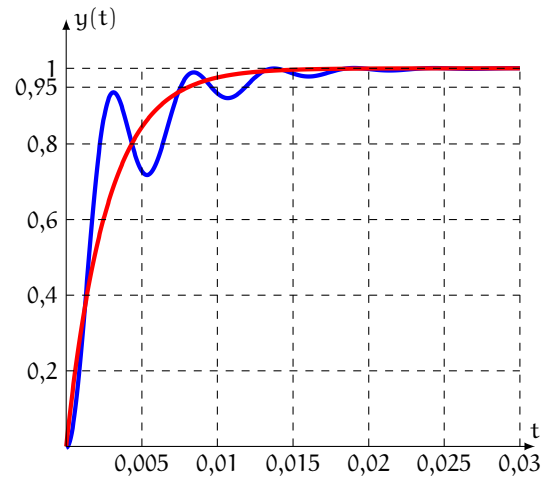
12.5 Feuille de travaux dirigés n°12

simplifiée $B'_f(p)$ puis la réponse temporelle pour une entrée en échelon.

$$B''_f(p) = \frac{B'_o(p)}{1 + B'_o(p)} = \frac{372}{372 + p} = \frac{1}{1 + \frac{p}{372}}$$

On reconnaît une fonction de transfert du premier ordre, on a donc :

$$s(t) = 1 - e^{-372 \cdot t}$$



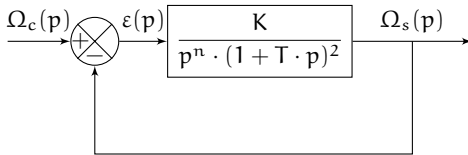
La réponse temporelle de la fonction de transfert simplifiée ne présente pas les oscillations de la réponse du système réel, mais l'allure générale est relativement proche. On peut utiliser cette fonction simplifiée pour avoir un ordre de grandeur du temps de réponse.

Q10. Tracer la réponse temporelle sur la figure 12.19. Que pensez-vous du modèle simplifié ?

Cor. 6 : Caractérisation d'une fonction de transfert

Sujet page 29

Q1. Tracer le schéma bloc de l'asservissement, l'entrée est une consigne de vitesse $\Omega_c(p)$ et la sortie $\Omega_s(p)$.



Q2. Déterminer K , n et T pour que le système en boucle fermée réponde aux exigences suivantes :

- le signal de consigne étant une rampe de $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,
- l'erreur de traînage est de $\varepsilon_t = \frac{1}{50} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,

- la marge de gain est de 6 dB

Déterminons l'erreur de traînage ε_t .

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= \Omega_c(p) - \Omega_s(p) \\ \varepsilon(p) &= \Omega_c(p) - H_{BO}(p) \cdot \varepsilon(p) \end{aligned}$$

$$(1 + H_{BO}(p)) \cdot \varepsilon_t(p) = \Omega_c(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_{BO}(p)} \Omega_c(p)$$

avec

$$\Omega_c(p) = \frac{1}{p^2}$$

finalement

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_{BO}(p)} \frac{1}{p^2}$$

On suppose le système stable, on peut donc utiliser le théorème de la valeur finale.

$$\varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$$

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{1}{1 + H_{BO}(p)} \frac{1}{p^2} \right)$$

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^n \cdot (1 + T \cdot p)^2}} \frac{1}{p^2} \right)$$

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{p^n \cdot (1 + T \cdot p)^2}{p^n \cdot (1 + T \cdot p)^2 + K} \frac{1}{p^2} \right)$$

soit

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{n-1}}{K} \right)$$

On veut

$$\varepsilon_t = \frac{1}{50}$$

Il faut donc $n = 1$ et $K = 50$.

$H_{BO}(p)$ devient.

$$H_{BO}(p) = \frac{50}{p \cdot (1 + T \cdot p)^2}$$

Déterminons le module et l'argument de $H_{BO}(j \cdot \omega)$.

$$H_{BO}(j \cdot \omega) = \frac{50}{j \cdot \omega \cdot (1 + j \cdot T \cdot \omega)^2}$$

La fonction de transfert est le produit d'une intégration et

d'un premier ordre au carré, on peut donc rapidement écrire le module et l'argument.

$$|H_{BO}(j \cdot \omega)| = \frac{50}{\omega \cdot (1 + (T \cdot \omega)^2)}$$

$$\arg(H_{BO}(j \cdot \omega)) = -90 - 2 \cdot \arctan(T \cdot \omega)$$

puis le gain en décibel.

$$|H_{BO}(j \cdot \omega)|_{dB} = 20 \cdot \log(50) - 20 \cdot \log(\omega) - 20 \cdot \log(1 + T^2 \cdot \omega^2)$$

On détermine la marge de gain pour la pulsation ω_{180} telle que $\arg(H_{BO}(j \cdot \omega_{180})) = -180^\circ$.

Soit

$$2 \cdot \arctan(T \cdot \omega_{180}) = 90^\circ \Rightarrow \omega_{180} = \frac{1}{T}$$

Déterminons $|H_{BO}(j \cdot \omega_{180})|$

$$|H_{BO}(j \cdot \omega_{180})| = \frac{K}{\omega_{180} \cdot (1 + (T \cdot \omega_{180})^2)}$$

$$|H_{BO}(j \cdot \omega_{180})| = \frac{K}{\frac{1}{T} \cdot \left(1 + \left(T \cdot \frac{1}{T}\right)^2\right)}$$

$$|H_{BO}(j \cdot \omega_{180})| = \frac{K \cdot T}{2}$$

On veut $M_G = 10$ dB, donc :

$$20 \cdot \log\left(\frac{K \cdot T}{2}\right) = -10 \text{ dB}$$

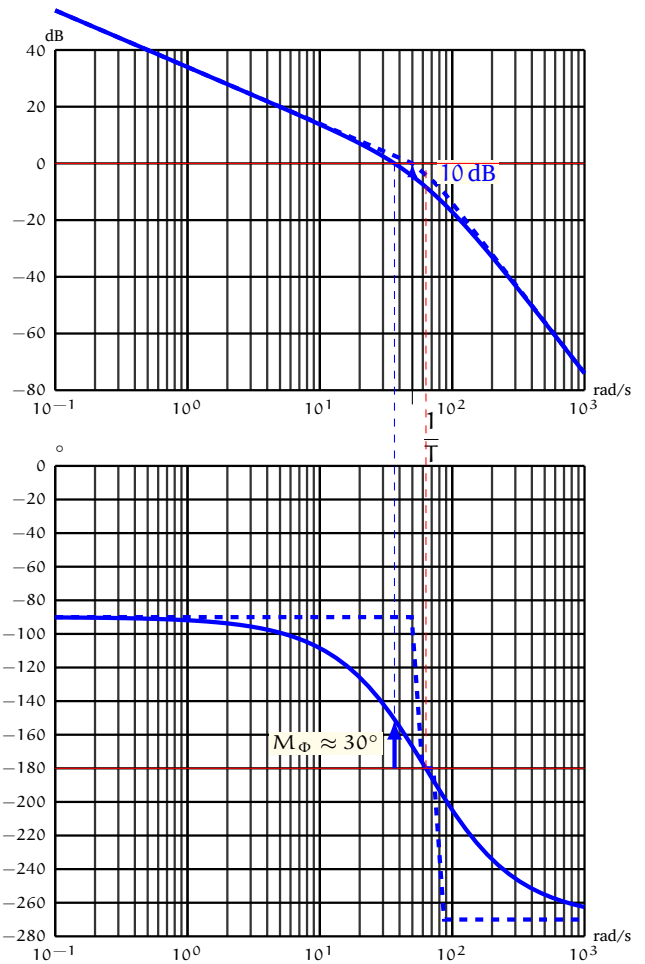
soit

$$T = \frac{2 \cdot 10^{-20}}{K} \approx 0,0125 \text{ s}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est donc :

$$H_{BO}(p) = \frac{50}{p \cdot (1 + 0,02 \cdot p)^2}$$

Q3. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels de $H_{BO}(p)$, préciser les marges de phase et de gain.



Q4. Quelle est alors l'erreur indicielle ?

La FTBO est de classe 1, donc l'erreur indicielle est nulle $\varepsilon_i = 0$.

Q5. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

$$\frac{\Omega_s(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{\frac{50}{p \cdot (1 + 0,02 \cdot p)^2}}{1 + \frac{50}{p \cdot (1 + 0,02 \cdot p)^2}}$$

Compte tenu des valeurs numériques :

$$\frac{\Omega_s(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{50}{p \cdot (1 + 0,02 \cdot p)^2 + 50}$$

$$\frac{\Omega_s(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{50}{50 + p + 0,04 \cdot p^2 + 0,0004 \cdot p^3}$$

et sous forme canonique

$$\frac{\Omega_s(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{50} + \frac{0,04}{50} \cdot p^2 + \frac{0,0004}{50} \cdot p^3}$$

Cor. 7 : Exosquelette pour le maniement de charges

Sujet page 29

Q1. Exprimer $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ en fonction de J, K₂ et p.

$$H_{\Omega}(p) = \frac{C_{\Omega}(p) \cdot M_c(p) \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}{1 + C_{\Omega}(p) \cdot M_c(p) \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}} \text{ avec } M_c(p) = 1$$

$$H_{\Omega}(p) = \frac{C_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}{1 + C_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}$$

$$H_{\Omega}(p) = \frac{K_2 \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}{1 + K_2 \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}} \text{ avec } T_i = \frac{J}{f}$$

$$H_{\Omega}(p) = \frac{K_2 \frac{1 + \frac{J}{f} \cdot p}{\frac{J}{f} \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}{1 + K_2 \frac{1 + \frac{J}{f} \cdot p}{\frac{J}{f} \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}$$

$$H_{\Omega}(p) = \frac{K_2 \frac{f + J \cdot p}{J \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}}{1 + K_2 \frac{f + J \cdot p}{J \cdot p} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}} = \frac{K_2}{1 + \frac{K_2}{J \cdot p}}$$

$$H_{\Omega}(p) = \frac{K_2}{K_2 + J \cdot p}$$

soit sous forme canonique

$$H_{\Omega}(p) = \frac{1}{1 + \frac{J}{K_2} \cdot p}$$

Q2. Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\Theta_{mC}(p)$, $H_{\Omega}(p)$, K_1 et p .

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mC}(p) - \Theta_m(p)$$

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mC}(p) - K_1 \cdot \frac{1}{1 + \frac{J}{K_2} \cdot p} \cdot \frac{1}{p} \cdot \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mC}(p) - \Theta_m(p)$$

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mC}(p) - K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p} \cdot \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) \left(1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p} \right) = \Theta_{mC}(p)$$

soit

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}} \cdot \Theta_{mC}(p)$$

Q3. Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Avant de déterminer l'erreur de position, il faut vérifier que le système est stable.

Nous avons déjà déterminé la fonction de transfert en

boucle ouverte.

$$B_o(p) = \frac{\Theta_m(p)}{\varepsilon(p)} = K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}$$

d'où la FTBF

$$\frac{\Theta_m(p)}{\Theta_{mC}(p)} = \frac{K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}}$$

$$\frac{\Theta_m(p)}{\Theta_{mC}(p)} = \frac{K_1}{\frac{J}{K_2} \cdot p^2 + p + K_1}$$

On a une fonction de transfert du second ordre, elle est stable si tous les coefficients du dénominateur sont de même signe, soit ici, $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$.

On peut donc utiliser le théorème de la valeur finale.

— Erreur de position :

$$\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{1}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}} \cdot \Theta_{mC}(p) \right)$$

$$\text{avec } \Theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p}{p + K_1 \cdot H_{\Omega}(p)} \right)$$

on a

$$\lim_{p \rightarrow 0} (H_{\Omega}(p)) = 1$$

finalemt

$$\varepsilon_p = 0$$

Remarque : On aurait pu répondre directement, la classe de la FTBO étant de 1 (une intégration dans la boucle), on sait que l'erreur pour un échelon est nulle.

— Erreur de traînage.

L'entrée est une rampe unitaire $\theta_{mC}(t) = t \cdot \mathcal{H}(t)$ ce qui donne pour $\Theta_{mC}(p) = \frac{1}{p^2}$.

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{1}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + K_1 \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{p} \right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p + K_1 \cdot H_{\Omega}(p)} \right) = \frac{1}{K_1}$$

On souhaite une erreur de traînage relative de 1%, il faut donc

$$K_1 \geq 100$$

Q4. Déterminer l'erreur en accélération ε_a et conclure quant au respect du cahier des charges.

On montre de la même manière, que ε_a tend vers $+\infty$.

Le critère d'erreur en accélération n'est pas respecté.

Q5. Déterminer $H_{2\Theta}(p) = \frac{\Theta_m(p)}{\Theta_{mC}(p)}$. La fonction de transfert est-elle stable ?

$$\Theta_m(p) = \frac{1}{p \cdot (1 + T \cdot p)} \cdot \left(K_1 \cdot (\Theta_{mC}(p) - \Theta_m(p)) + K_3 \cdot p \cdot \Theta_{mC}(p) \right)$$

$$\Theta_m(p) = \frac{1}{p \cdot (1 + T \cdot p)} \cdot \left((K_1 + K_3 \cdot p) \cdot \Theta_{mC}(p) - K_1 \cdot \Theta_m(p) \right)$$

$$\Theta_m(p) \left(1 + \frac{K_1}{p \cdot (1 + T \cdot p)} \right) = \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p)} \cdot \Theta_{mC}(p)$$

$$\Theta_m(p) = \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \cdot \Theta_{mC}(p)$$

La fonction de transfert a un dénominateur du second ordre et un numérateur du premier ordre, le système est stable si les coefficients du dénominateur sont de même signe, c'est le cas.

Q6. Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction $\Theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mC}(p) - \Theta_m(p)$$

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mC}(p) - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \cdot \Theta_{mC}(p)$$

$$\varepsilon(p) = \left(1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \Theta_{mC}(p)$$

Q7. Le modèle par anticipation a-t-il une influence sur l'erreur de position ε_p ?

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \left(1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \Theta_{mC}(p) \right)$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \left(1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \frac{1}{p} \right)$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(1 - \frac{K_1}{K_1} \right) = 0$$

Le modèle par anticipation n'a pas d'influence sur l'erreur de position.

Q8. Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant d'annuler cette erreur.

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \left(1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \Theta_{mC}(p) \right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \left(1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\left(1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \frac{1}{p} \right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\left(\frac{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1 - K_1 - K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \frac{1}{p} \right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\left(\frac{p \cdot (1 + T \cdot p) - K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \frac{1}{p} \right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\left(\frac{(1 + T \cdot p) - K_3}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \right) = \frac{1 - K_3}{K_1}$$

On choisit $K_3 = 1$ ce qui donne :

$$\varepsilon_v = 0$$

Q9. Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération ε_a en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \left(1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \Theta_{mC}(p) \right)$$

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \left(1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \frac{2 \cdot a}{p^3} \right)$$

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\left(1 - \frac{K_1 + K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \right) \cdot \frac{2 \cdot a}{p^2} \right)$$

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p \cdot (1 + T \cdot p) - K_3 \cdot p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + K_1} \cdot \frac{2}{p^2} \right)$$

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p \cdot (1 + T \cdot p) - p}{p \cdot (1 + T \cdot p) + 100} \cdot \frac{2}{p^2} \right)$$

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{T \cdot p^2}{100} \cdot \frac{1}{p^2} \right) = \frac{T}{100} = 66 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

Pour une entrée en accélération $\theta_{mC}(t) = t^2 \mathcal{H}(t)$ soit de $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$, on a une erreur de $\varepsilon_a = 66 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ soit une erreur relative de $66 \times 10^{-3} \% < 1 \%$.

La correction par anticipation permet de respecter le cahier des charges.

Q10. Déterminer $\Theta_m(p)$ sous la forme $\Theta_m(p) = H_{\Theta} \cdot \Theta_{mC}(p) + H_{Cr}(p) \cdot C_r(p)$.

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mC}(p) - \Theta_m(p)$$

$$\varepsilon(p) = \Theta_{mC}(p) - \frac{1}{p} \cdot \Omega_m(p)$$

12.5 Feuille de travaux dirigés n°12

avec

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{J \cdot p + f} \cdot (C_m(p) - C_r(p))$$

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{J \cdot p + f} \cdot (C_\Omega(p) \cdot (\Omega_{m_c}(p) - \Omega_m(p)) - C_r(p))$$

$$\Omega_m(p) \left(1 + \frac{1}{J \cdot p + f} C_\Omega(p) \right) = \frac{1}{J \cdot p + f} C_\Omega(p) \Omega_{m_c}(p) - \frac{1}{J \cdot p + f} C_r(p)$$

puis

$$C_\Omega(p) = K_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) = K_2 \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$$

$$C_\Omega(p) = K_2 \cdot \frac{f + J \cdot p}{J \cdot p}$$

$$\Omega_m(p) \left(1 + \frac{K_2}{J \cdot p} \right) = \frac{K_2}{J \cdot p} \cdot \Omega_{m_c}(p) - \frac{1}{J \cdot p + f} \cdot C_r(p)$$

$$\Omega_m(p) \left(\frac{J \cdot p + K_2}{J \cdot p} \right) = \frac{K_2}{J \cdot p} \cdot \Omega_{m_c}(p) - \frac{1}{J \cdot p + f} \cdot C_r(p)$$

$$\Omega_m(p) (J \cdot p + K_2) = K_2 \cdot \Omega_{m_c}(p) - \frac{J \cdot p}{J \cdot p + f} \cdot C_r(p)$$

$$\Omega_m(p) = \frac{K_2}{Jp + K_2} \Omega_{m_c}(p) - \frac{Jp}{(Jp + K_2)(Jp + f)} C_r(p)$$

$$\Omega_m(p) = \frac{K_2}{J \cdot p + K_2} \cdot K_1 \cdot (\Theta_{m_c}(p) - \Theta_m(p)) - \frac{J \cdot p}{(J \cdot p + K_2)(J \cdot p + f)} \cdot C_r(p)$$

$$\Theta_m(p) = \frac{K_2}{p \cdot (J \cdot p + K_2)} \cdot K_1 \cdot (\Theta_{m_c}(p) - \Theta_m(p)) - \frac{J \cdot p}{p \cdot (J \cdot p + K_2)(J \cdot p + f)} \cdot C_r(p)$$

$$\Theta_m(p) = \frac{K_2 \cdot K_1}{p \cdot (J \cdot p + K_2)} \cdot \Theta_{m_c}(p) - \frac{K_2 \cdot K_1}{p \cdot (J \cdot p + K_2)} \cdot \Theta_m(p) - \frac{J \cdot p}{p \cdot (J \cdot p + K_2)(J \cdot p + f)} \cdot C_r(p)$$

$$\Theta_m(p) \left(1 + \frac{K_2 \cdot K_1}{p(J \cdot p + K_2)} \right) = \frac{K_2 \cdot K_1}{p \cdot (J \cdot p + K_2)} \Theta_{m_c}(p) - \frac{J \cdot p}{p(J \cdot p + K_2)(J \cdot p + f)} C_r(p)$$

$$\Theta_m(p) = \frac{K_2 \cdot K_1}{p \cdot (J \cdot p + K_2) + K_2 \cdot K_1} \cdot \Theta_{m_c}(p) - \frac{J \cdot p}{(p \cdot (J \cdot p + K_2) + K_2 \cdot K_1) (J \cdot p + f)} \cdot C_r(p)$$

Q11. Déterminer $\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_m(t))$ pour

$$\theta_{m_c}(t) = \Theta_0 \mathcal{H}(t) \text{ et } c_r(t) = C_{r0} \cdot \mathcal{H}(t).$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_m(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \Theta_m(p))$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_m(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot (H_\Theta \cdot \Theta_{m_c}(p) + H_{C_r}(p) \cdot C_r(p)))$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_m(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \left(H_\Theta(p) \cdot \frac{\Theta_0}{p} + H_{C_r}(p) \cdot \frac{C_{r0}}{p} \right) \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_m(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (H_\Theta(p) \cdot \Theta_0 + H_{C_r}(p) \cdot C_{r0})$$

soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_m(t)) = \Theta_0 + 0 = \Theta_0$$

On constate que le couple résistant n'a pas d'effet sur la position finale, le système reste précis.