

# Correction des systèmes asservis

## 7.1 Nécessité de la correction

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les systèmes asservis pouvaient présenter des défauts, une précision insuffisante, une stabilité trop relative (voire une instabilité), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservi un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans détériorer les autres. Les correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité du système étudié.

On distingue deux modes principaux de correction :

**La correction série :** le correcteur est placé dans la boucle du système asservi en aval du système à corriger (figure 7.1). Il génère, à partir de l'erreur  $\epsilon(t)$ , le signal de commande  $u(t)$  ;



FIGURE 7.1 – Correction en série

**La correction en réaction :** dans ce principe, on améliore le fonctionnement en ajoutant une boucle interne permettant d'améliorer le comportement dynamique d'une partie du système (figure 7.3).

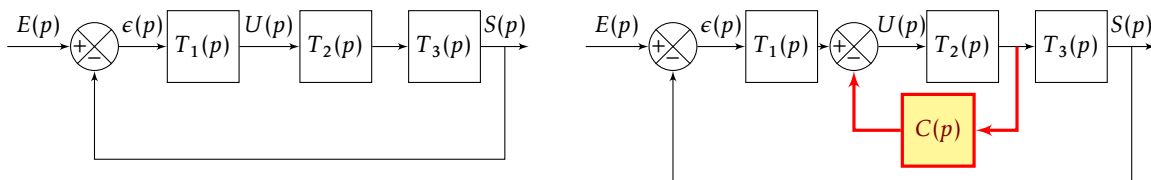


FIGURE 7.2 – Correction en réaction

Il est bien sûr possible de combiner les deux structures.

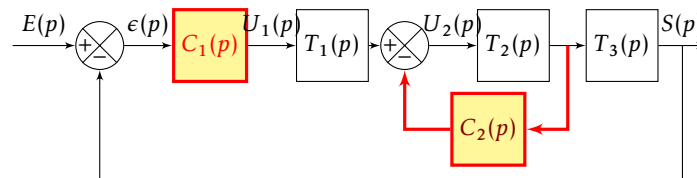


FIGURE 7.3 – Correction en réaction et série

Il existe d'autres modes de correction qui ne seront pas abordés dans le cadre de ce manuel.

## 7.2 Principaux réseaux correcteurs

### 7.2.1 Correcteur proportionnel (P)

#### a) Principe

Ce correcteur élémentaire est le correcteur de base. Il permet de régler le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte. La fonction de transfert du correcteur est :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p.$$

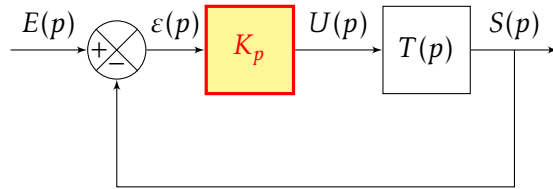


FIGURE 7.4 – Correction proportionnelle

#### b) Effet

Si la fonction de transfert en boucle ouverte du système non corrigé  $T(p)$  ne possède pas d'intégration.

$$T(p) = \frac{K_s \cdot N(p)}{p^\alpha D(p)} \quad \text{avec } \alpha = 0$$

$$T(p) = \frac{K_s \cdot N(p)}{D(p)}$$

avec  $N(0) = D(0) = 1$  et  $K_s$  le gain statique.

La fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé s'écrit :

$$BO_c(p) = K_p \cdot T(p) = \frac{K_p \cdot K_s \cdot N(p)}{D(p)}$$

Nous avons vu lors de l'étude de la précision que l'erreur indicielle  $\varepsilon_i$  d'un système ne possédant pas d'intégration est de la forme :

$$\varepsilon_i = \frac{E_O}{1 + K}$$

avec dans ce cas,  $K = K_p \cdot K_s$ .

Le correcteur proportionnel permet donc, en augmentant le gain de la FTBO, d'améliorer la précision du système à condition de rester dans la limite de la stabilité du système.

La figure 7.5 montre l'effet du correcteur proportionnel sur un système du second ordre. On remarque, lorsque le gain augmente que :

— pour la réponse temporelle :

- l'erreur indicielle  $\varepsilon_i$  diminue,
- la sortie est de plus en plus oscillante,
- le dépassement  $d$  augmente,
- le temps de montée diminue,
- la pseudo-période  $T_p$  diminue ( $\omega_p$  augmente).

— pour la réponse fréquentielle :

- le diagramme d'amplitude est décalé vers le haut (la phase reste inchangée),
- la bande passante de la FTBO augmente, le temps de montée est donc réduit d'autant (Cf. chapitre ?? page ??).

Si la fonction de transfert du système non corrigé comporte une intégration.

$$T(p) = \frac{K_s \cdot N(p)}{p \cdot D(p)} \quad \text{avec } \alpha = 1$$

avec  $N(0) = D(0) = 1$  et  $K_s$  le gain statique.

## 7.2 Principaux réseaux correcteurs

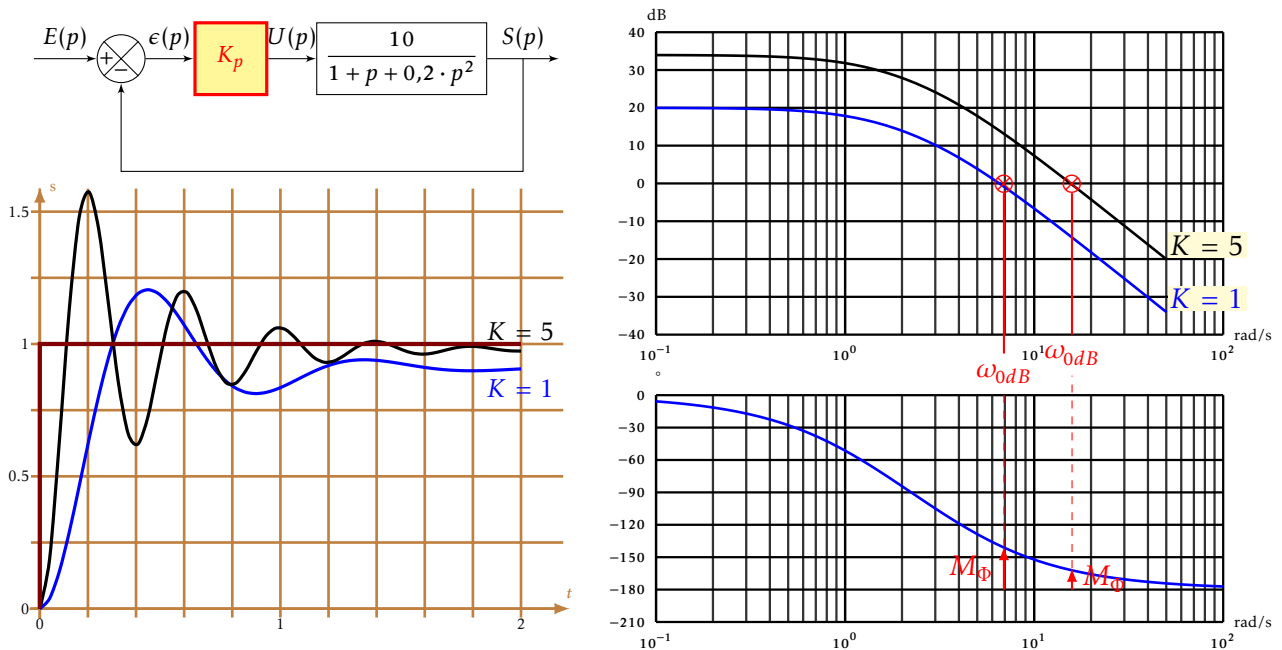


FIGURE 7.5 – Influence d'un correcteur proportionnel

La fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé s'écrit :

$$BO_c(p) = K_p \cdot T(p) = \frac{K_p \cdot K_s \cdot N(p)}{p \cdot D(p)}$$

Le système est déjà naturellement précis pour une entrée en échelon  $\varepsilon_i = 0$ . Le correcteur proportionnel n'a donc pas d'effet direct sur l'erreur indicielle, par contre en décalant la courbe de gain vers le haut, le système peut devenir oscillant voire instable.

On sait aussi que l'erreur de traînage est de la forme :

$$\varepsilon_t = \frac{A}{K}$$

avec  $K = K_p \cdot K_s$ .

La correction proportionnelle permet donc pour un système classe  $\alpha = 1$  de diminuer l'erreur de traînage.

### 7.2.2 Correcteur intégral (I)

Pour un intégrateur pur ou idéal, la loi de commande  $u(t)$  est de la forme :

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(u) \cdot du$$

d'où la fonction de transfert

$$C_i(p) = \frac{1}{T_i \cdot p}$$

Ce type de correcteur peut être réalisé avec une bonne approximation par un montage intégrateur à base d'amplificateurs opérationnels.

#### Effets du correcteur intégral

Le correcteur apporte une intégration dans la chaîne de commande.

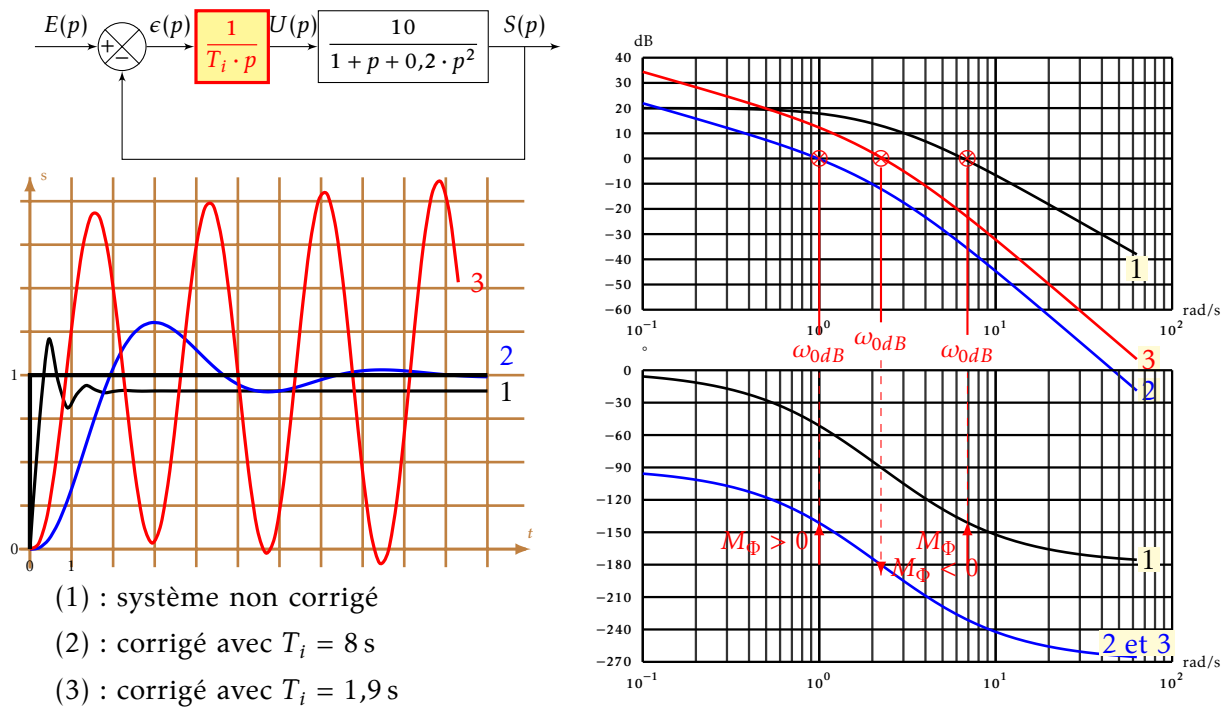


FIGURE 7.6 – Effets d’un correcteur intégral

Cette intégration dans la FTBO permet d’annuler l’erreur statique pour une entrée en échelon, l’intérêt principal de ce type de correcteur est donc d’améliorer la précision.

Il introduit malheureusement un déphasage de  $-90^\circ$  et risque donc de rendre le système instable par diminution de la marge de phase. On retrouve ces effets, sur l’exemple de la figure 7.6, le système non corrigé, n’est pas précis, l’intégration rend le système précis mais peut aussi le rendre instable.

On constate aussi sur la réponse temporelle que l’intégrateur diminue le temps de réponse du système (diminution de la bande passante de la FTBO  $\Rightarrow$  diminution de la bande passante de la FTBF  $\Rightarrow$  augmentation du temps de montée  $\Rightarrow$  augmentation du temps de réponse).

Compte tenu de tous ces défauts, ce correcteur est rarement utilisé seul.

### 7.2.3 Correcteur proportionnel intégral (P.I.)

Le correcteur intégrateur idéal est en général associé au correcteur proportionnel. La loi de commande de ce correcteur est alors de la forme :

$$u(t) = K_p \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(u) du \right)$$

d’où la fonction de transfert :

$$C_{pi}(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) = K_p \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$$

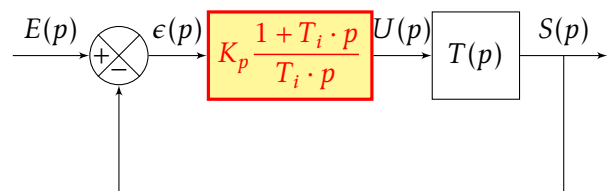


FIGURE 7.7 – Correction proportionnelle intégrale

#### a) Diagrammes de Bode

Ce correcteur possède deux paramètres de réglage :

- $K_p$  n’agit que sur le gain (fig. 7.8a), la courbe de gain est translatée en fonction de  $K_p$  ;
- $T_i$ , la constante d’intégration agit principalement sur la phase pour les pulsations inférieures  $\frac{1}{T_i}$  (fig. 7.8b), les courbes sont translatées le long de l’axe des pulsations.

## 7.2 Principaux réseaux correcteurs

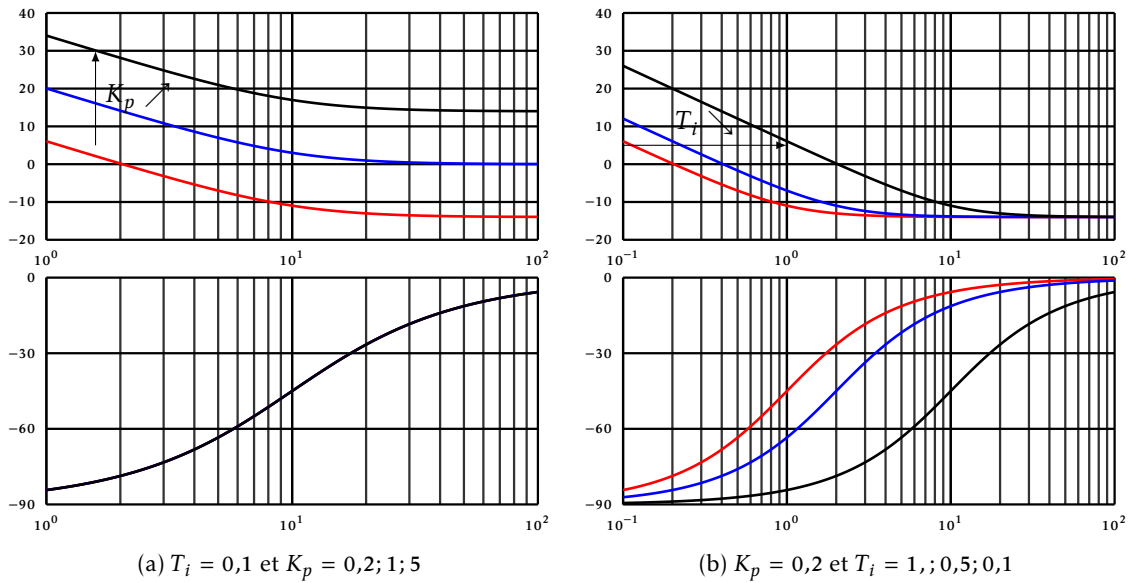


FIGURE 7.8 – Correcteur P.I., influence de  $K_p$  et  $T_i$

### b) Effets

Le correcteur P.I. permet d'améliorer aussi bien :

**Le comportement statique :** par la présence de l'intégration dans la FTBO, l'erreur indicielle est nulle.

**Le comportement dynamique :** le numérateur  $(1 + T_i \cdot p)$  apporte une phase positive dans la zone critique, celle-ci permet d'améliorer la marge de phase en pondérant l'effet négatif de l'intégration.

Un choix judicieux du gain  $K_p$  et de la constante d'intégration  $T_i$  permet ainsi d'améliorer le comportement du système sans trop dégrader la stabilité et la rapidité comme le montre l'exemple de la figure 7.9.

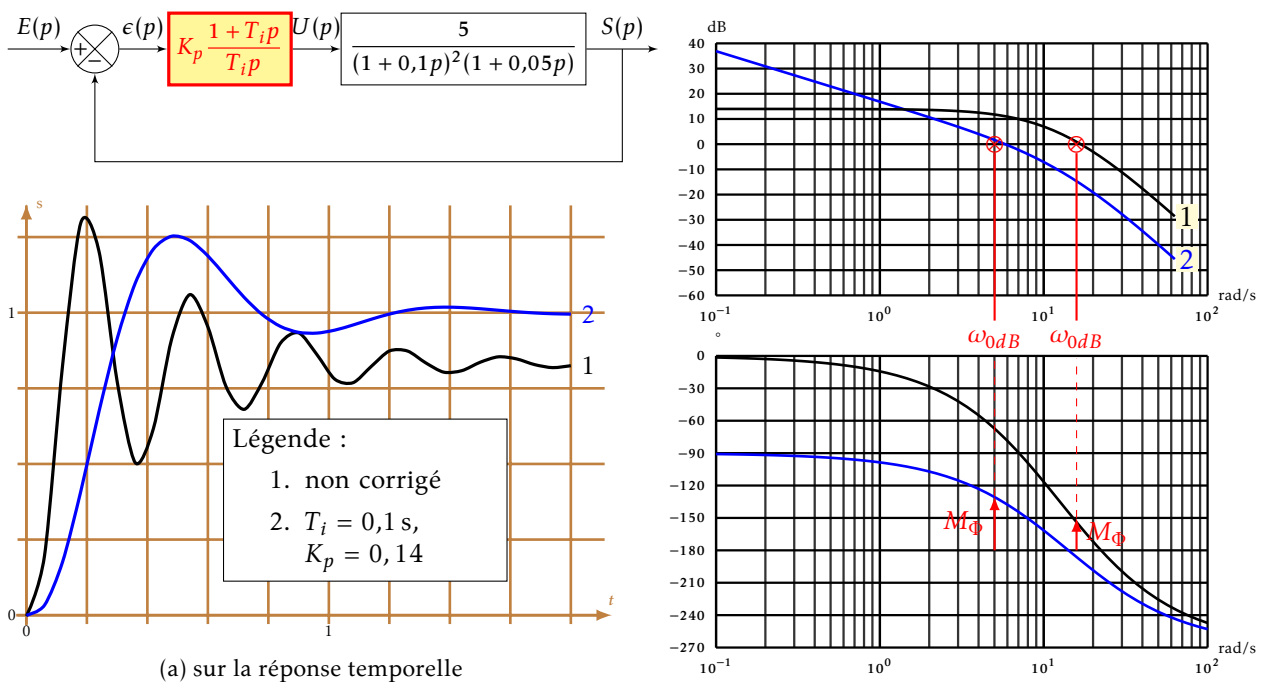


FIGURE 7.9 – Influence d'un correcteur P.I.

## c ) Détermination du correcteur

Cette partie n'est qu'une approche de la détermination du correcteur, elle présente, de manière succincte, deux méthodes, l'une algébrique, l'autre expérimentale.

**Exemple guidé : Détermination du correcteur P.I. par la méthode du pôle dominant**

Le principe de cette méthode est d'éliminer de la FTBO le pôle dominant, c'est-à-dire le pôle avec la plus grande constante de temps.

Soit un système (fig. 7.9) dont la fonction de transfert est

$$\frac{5}{(1 + 0,1 \cdot p)^2(1 + 0,05 \cdot p)}$$

On se propose d'améliorer le comportement temporel en rendant ce système précis pour une entrée de type échelon en insérant un correcteur de type P.I..

La procédure est la suivante :

1. Identifier la constante de temps la plus grande - ici  $T_{max} = 0,1$  s.
2. Choisir  $T_i = T_{max} = 0,1$  s le correcteur devient  $C_i(p) = K_p \frac{1 + 0,1 \cdot p}{0,1 \cdot p}$ .
3. Tracer les diagrammes de Bode (figure 7.10) pour  $K_p = 1$ .
4. Déterminer  $K_p$  afin d'obtenir les marges de gain et de phase souhaitées, on lit sur le diagramme de Bode de la figure 7.10  $K'_{dB} = -17$  dB, d'où  $K_p = 10^{\frac{-17}{20}} \approx 0,14$  pour obtenir une marge de phase de  $45^\circ$ . La réponse temporelle et les diagrammes de Bode corrigés sont représentés sur la figure 7.9.

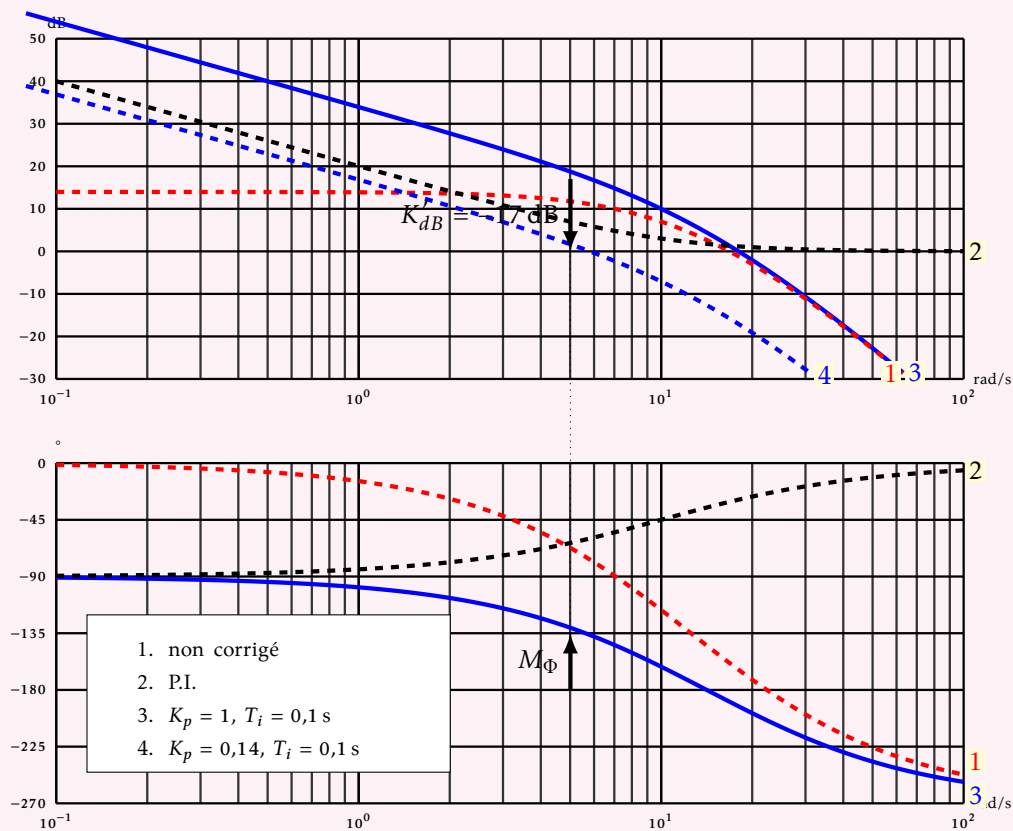


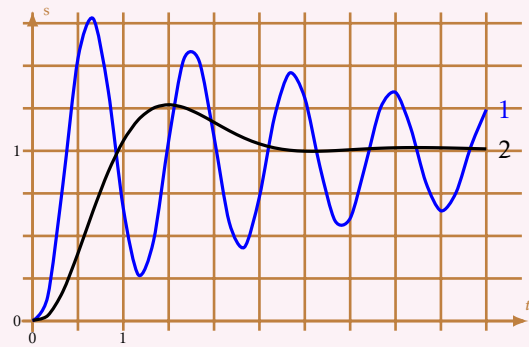
FIGURE 7.10 – Régulation du correcteur P.I., méthode du pôle dominant

**Exemple guidé : Méthode expérimentale**

La fonction de transfert du système n'est pas connue algébriquement mais uniquement par sa réponse fréquentielle (fig. 7.12) déterminée expérimentalement et sa réponse temporelle. On constate que le système est fortement oscillant (marge de phase trop petite !) et qu'il n'est pas précis. On se propose d'installer un correcteur de type P.I. pour améliorer la précision.

La procédure de réglage est la suivante :

- Déterminer la pulsation  $\omega_{0dB}$  pour laquelle le module en dB est nul, ici  $\omega_{0dB} = 5,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Régler  $T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}} \approx 1,9 \text{ s}$  puis tracer le correcteur pour  $K_p = 1$ .
- Tracer le diagramme de Bode de la fonction corrigée en sommant le graphe expérimental du système et celui du correcteur ( $K_p = 1$ ).
- Déterminer graphiquement  $K_p$  pour avoir la marge de phase désirée, ici pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$  il faut « descendre » la courbe de gain de 14dB d'où  $K_p = 10^{\frac{-14}{20}} \approx 0,19$ .



1. Non corrigé
2. Corrigé :  $K_p = 0,19, T_i = 1,9 \text{ s}$

FIGURE 7.11 – Réponse temporelle

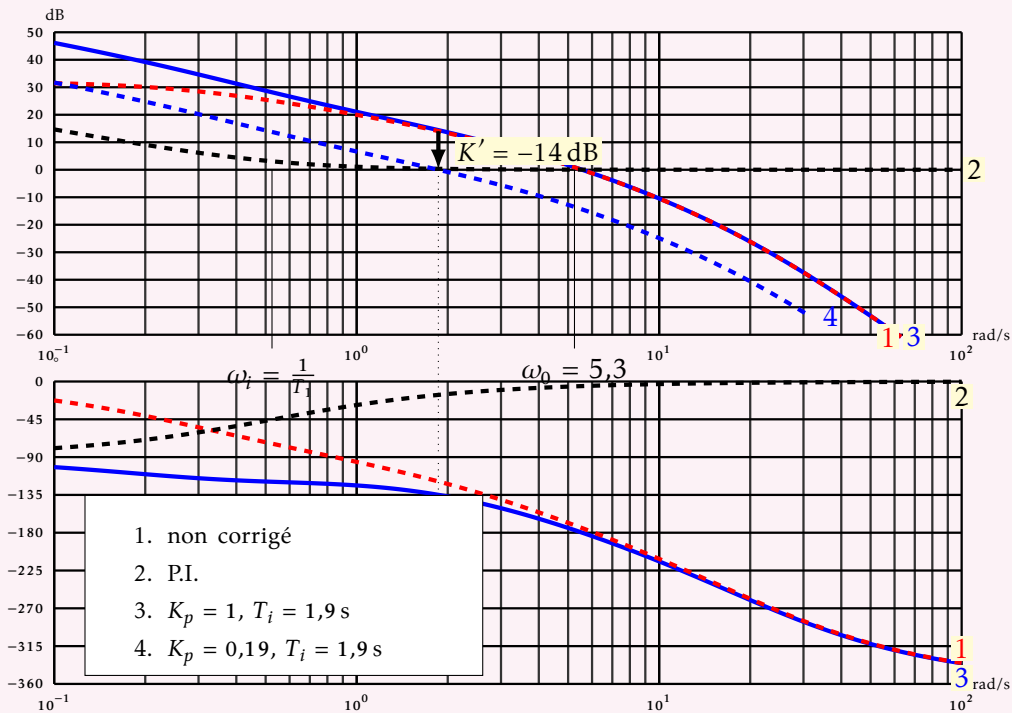


FIGURE 7.12 – Réglage du correcteur P.I., méthode expérimentale

Après réglage du correcteur, on obtient la courbe de réponse temporelle figure 7.11, on constate que la réponse est beaucoup moins oscillante.

**Remarque :** La FTBO tracée est  $T(p) = \frac{50}{(1+4p+p^2)(1+0,05p)^2}$

## 7.2.4 Correcteur proportionnel dérivateur (P.D.)

### a) Dérivateur idéal

On appelle dérivateur idéal un correcteur dont la loi de commande du correcteur est de la forme :

$$u(t) = T_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad \text{soit} \quad C_{di}(p) = T_d \cdot p$$

avec  $T_d$  la constante de temps de dérivation.

Le correcteur dérivateur idéal est un correcteur purement théorique qui ne peut exister, en effet le gain de ce correcteur est infini lorsque la pulsation tend vers l'infini. Il ne respecte pas le principe de causalité en effet le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur.

### b) Dérivateur réel

Les circuits électroniques (à base d'amplificateurs opérationnels) permettent de réaliser une forme approchée du dérivateur :

$$C_{dr}(p) = \frac{T_d \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{avec } \tau \ll T_d$$

Le circuit se comporte comme un dérivateur pur pour des pulsations inférieures à  $\omega_{lim} \ll \frac{1}{\tau}$ .

**Effet** Le correcteur dérivé apporte une avance de phase de  $+90^\circ$  pour les basses fréquences. Il a un effet stabilisant en augmentant la marge de phase. Le correcteur dérivé ne s'utilise jamais seul, car il dégrade la précision en diminuant la classe du système.

### c) Proportionnel dérivateur

La loi de commande du correcteur proportionnel dérivateur est de la forme :

$$u(t) = K_p \left( \varepsilon(t) + T_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$$

Comme le dérivateur idéal, il ne peut exister de correcteur P.D. idéal dont la fonction de transfert serait :

$$C_{P.D.i}(p) = K_p (1 + T_d \cdot p)$$

Il est par contre possible de réaliser un correcteur P.D. approché de forme :

$$C_{P.D.}(p) = K_p \frac{1 + T_d \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{avec } \tau \ll T_d$$

Malgré tout, dans nos calculs, nous considérerons que le correcteur est idéal.

**Effet** Le correcteur P.D. (réel ou idéal) permet d'apporter une phase positive de  $+90^\circ$  pour les hautes fréquences. Le correcteur P.D. améliore ainsi très sensiblement la marge de phase. Il a un fort effet stabilisant sans détériorer la précision.

**Remarque** : Pour la suite, lorsque nous aurons à étudier un correcteur P.D., en l'absence d'information contraire, il s'agira (malgré la remarque précédente) d'un correcteur P.D. idéal.

**Remarque 2** : Ce correcteur n'est pas explicitement au programme mais permet de comprendre l'effet du correcteur à avance de phase.



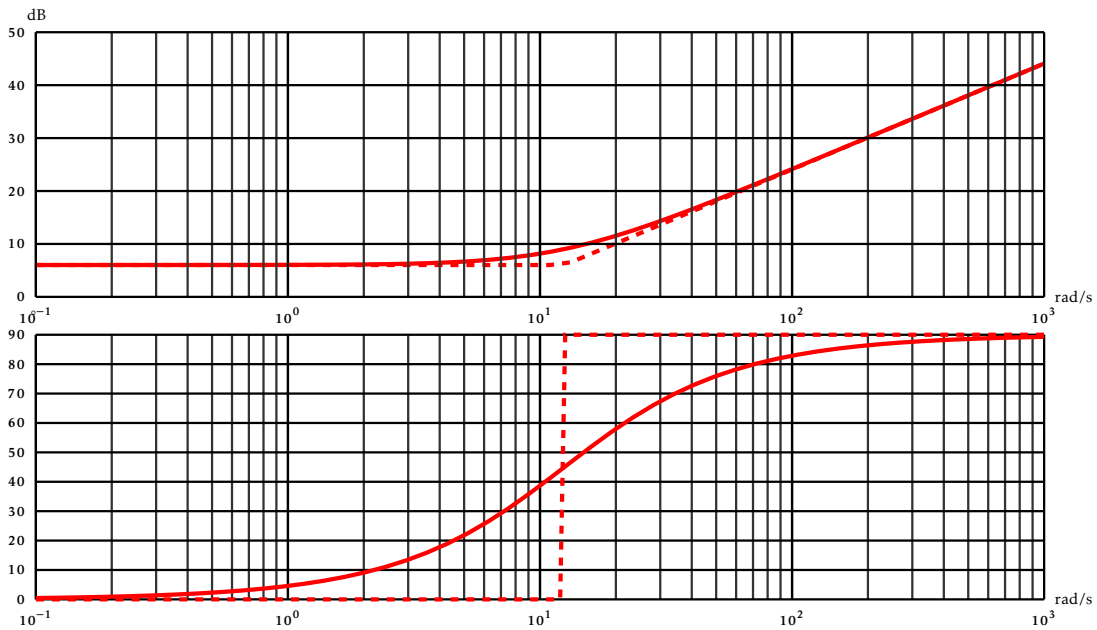


FIGURE 7.13 – Diagrammes de Bode du correcteur P.D. idéal

d) Détermination

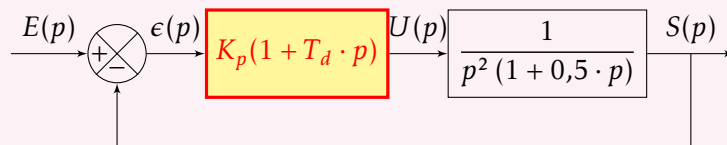
La méthode du pôle dominant peut comme pour le correcteur P.I. être utilisée, sinon de manière générale on détermine la constante de temps du correcteur de telle sorte que le correcteur apporte une phase positive avant le point critique.

**Exemple guidé : Détermination du correcteur P.D. (méthode pratique)**

Soit un système dont on souhaite qu'il soit précis, aussi bien pour une entrée en échelon que pour une rampe. Ce système est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{1}{p^2 (1 + 0,5 \cdot p)}$$

Ce système est instable (deux intégrateurs dans la boucle ouverte + un premier ordre). On souhaite le stabiliser en restant précis pour les deux signaux.



On installe un correcteur P.D. (idéal pour faciliter les calculs) dans la chaîne directe.

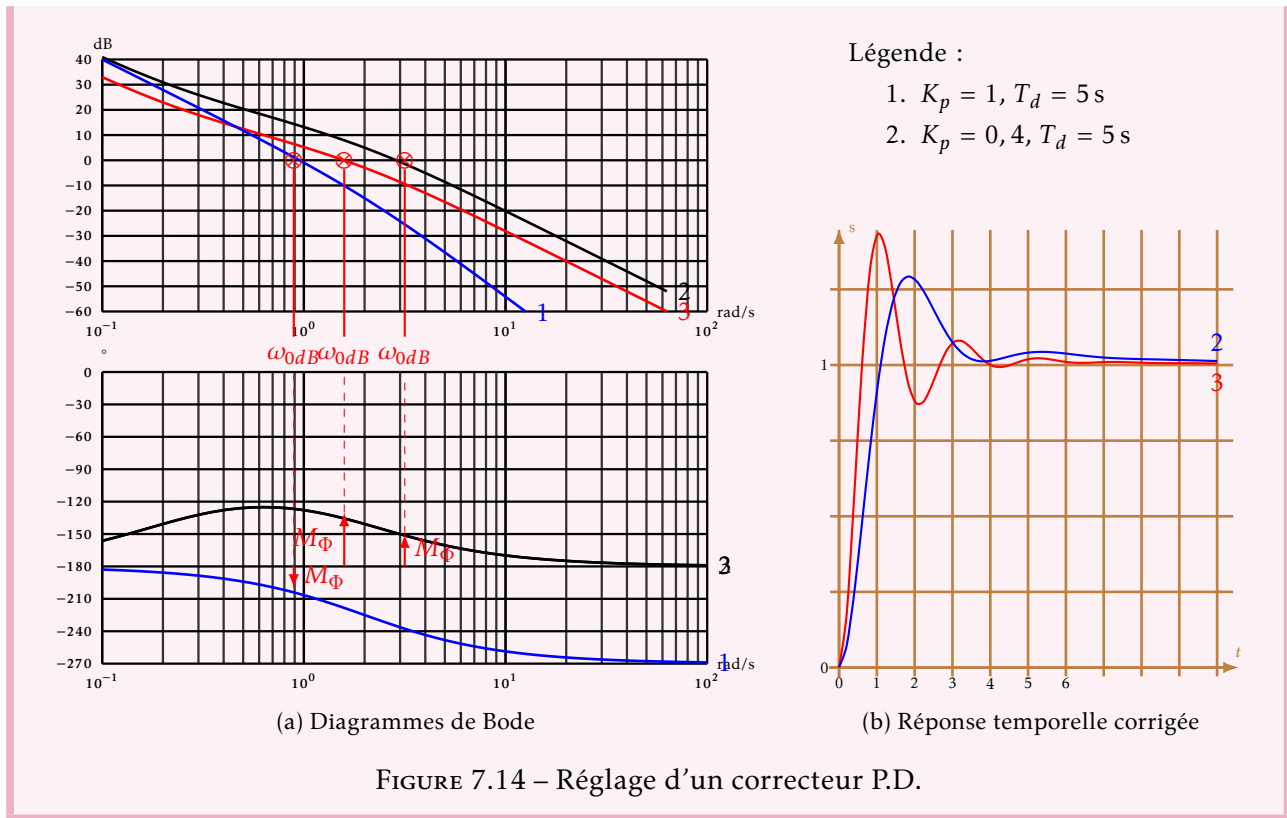
La FTBO s'écrit  $BO(p) = K_p \frac{1 + T_d \cdot p}{p^2 (1 + 0,5 \cdot p)}$

1. Choisir la constante de dérivation  $T_d = 10 \cdot T_{max} = 5$  s avec  $T_{max} = 0,5$  s la plus grande des constantes de temps et dans un premier temps  $K_p = 1$ . La FTBO devient

$$BO(p) = \frac{1 + 5 \cdot p}{p^2 (1 + 0,5 \cdot p)}$$

2. Tracer les diagrammes de Bode du système corrigé (fig. 7.14a).
3. Déterminer  $K_p$  pour améliorer la marge de phase, ici pour une marge de phase de  $-45^\circ$  il faut « descendre » la courbe de 8dB soit  $K_p = 10^{\frac{-8}{20}} \approx 0,4$ .

On constate, sur la réponse temporelle (fig. 7.14b), que les objectifs sont atteints.



### 7.2.5 Correcteur à avance de phase

Le correcteur à avance de phase est défini par la fonction de transfert :

$$C_{ap} = K_p \frac{1 + a \cdot T_a \cdot p}{1 + T_a \cdot p} \quad \text{avec } a > 1$$

**Remarque :** Si  $a$  est très grand on retrouve un correcteur proportionnel dérivateur réel.

#### a) Diagrammes de Bode

On remarque, sur le diagramme de phase (fig. 7.15), la principale caractéristique du correcteur à avance de phase, le correcteur ne modifie la phase que localement, sans influence sur les basses et hautes fréquences. Le module lui aussi est peu modifié, le gain des hautes fréquences est augmenté de  $20 \log a$ , les basses fréquences étant inchangées.

Le maximum de l'argument est atteint pour

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot T_a}$$

c'est-à-dire la moyenne géométrique des pulsations  $\omega_{T_a} = \frac{1}{T_a}$  et  $\omega_{aT_a} = \frac{1}{a \cdot T_a}$ .

Pour la pulsation  $\omega_{max}$ , on a :

$$\text{Argument } \Phi(\omega_{max}) = \arctan\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right) = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right);$$

$$\text{Module (dB)} \quad A_{dB}(\omega_{max}) = 10 \log a.$$

#### b) Effets

Le correcteur à avance de phase permet de modifier localement l'argument en ajoutant une phase positive en modifiant peu le gain de la FTBO.

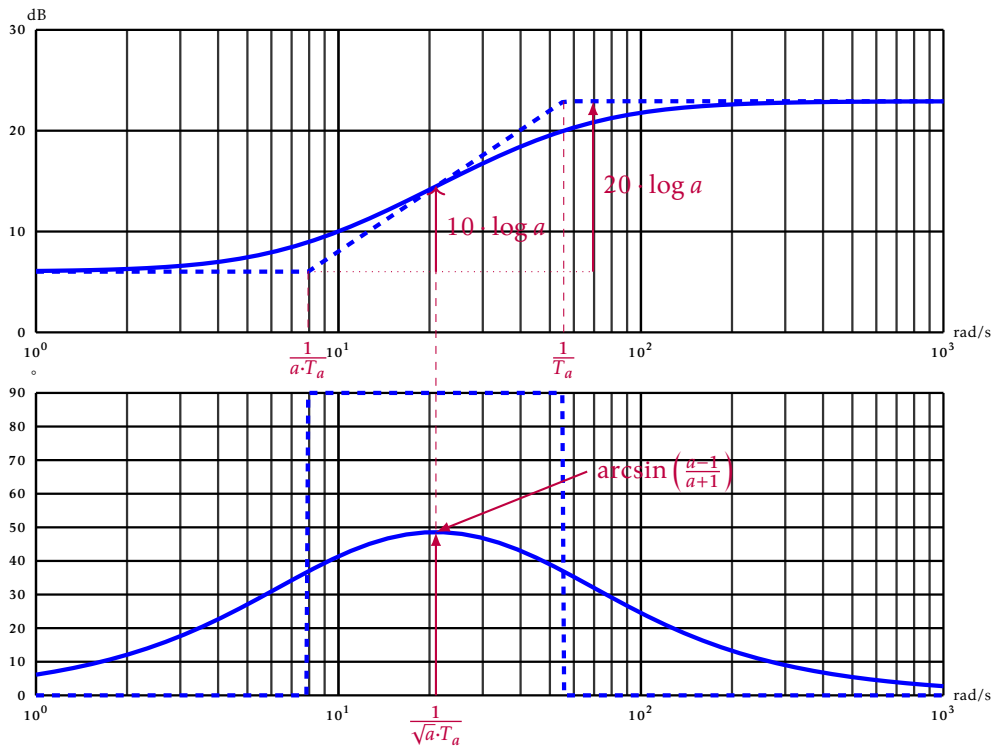


FIGURE 7.15 – Correcteur à avance de phase

Il permet :

- de modifier localement la courbe de phase avec un effet réduit sur la courbe de gain;
- d’améliorer les marges de stabilité (effet stabilisant);
- d’améliorer la bande passante du système et d’augmenter la rapidité.

Il est en général associé à un correcteur P.I. qui assure la précision, le correcteur à avance de phase va permettre de diminuer les effets négatifs du correcteur P.I. (oscillations) en augmentant la marge de phase.

c ) Réglage du correcteur

**Exemple guidé : Réglage du correcteur à avance de phase - Pôle dominant**

Si la FTBO est algébriquement connue, on cherche à annuler la constante de temps  $T_{max}$  du pôle dominant avec le numérateur du correcteur, on en déduit la constante de temps du numérateur  $a \cdot T_a = T_{max}$ . On détermine ensuite  $a$  en fonction de l’avance de phase souhaitée, on termine le gain expérimentalement.

**Exemple guidé : Réglage du correcteur à avance de phase - Méthode expérimentale itérative**

Si la FTBO n’est connue que par ses diagrammes de Bode (figure 7.16).

1. On recherche la pulsation  $\omega_{0dB}$  pour laquelle le module en dB de la FTBO est nul, ici  $\omega_{0dB} = 2,25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .
2. On mesure la marge de phase pour cette pulsation, ici  $M_{P1} \approx 7^\circ$ .
3. On détermine  $a$  pour obtenir la marge de phase désirée

$$M_{P1} + \arctan\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right) = 45^\circ \text{ soit } a \approx 4,2.$$

4. On centre ensuite sur  $\omega_{0dB}$  le correcteur, on a donc :  $\frac{1}{\sqrt{a} \cdot T_a} = \omega_{0dB}$  soit ici  $T_a \approx 0,216$  s.
5. À partir des valeurs calculées de  $a$  et  $T_a$  on trace le diagramme corrigé pour  $K_p = 1$ .
6. On détermine ensuite  $K_p$  de telle sorte que pour la pulsation  $\omega_{0dB}$  le gain de la FTBO corrigé soit nul, soit  $K_p = 10^{\frac{-10 \cdot \log(a)}{20}} \approx 0,48$ .
7. On trace ensuite le diagramme corrigé, la réponse temporelle montre que le réglage est correct (fig. 7.16a).

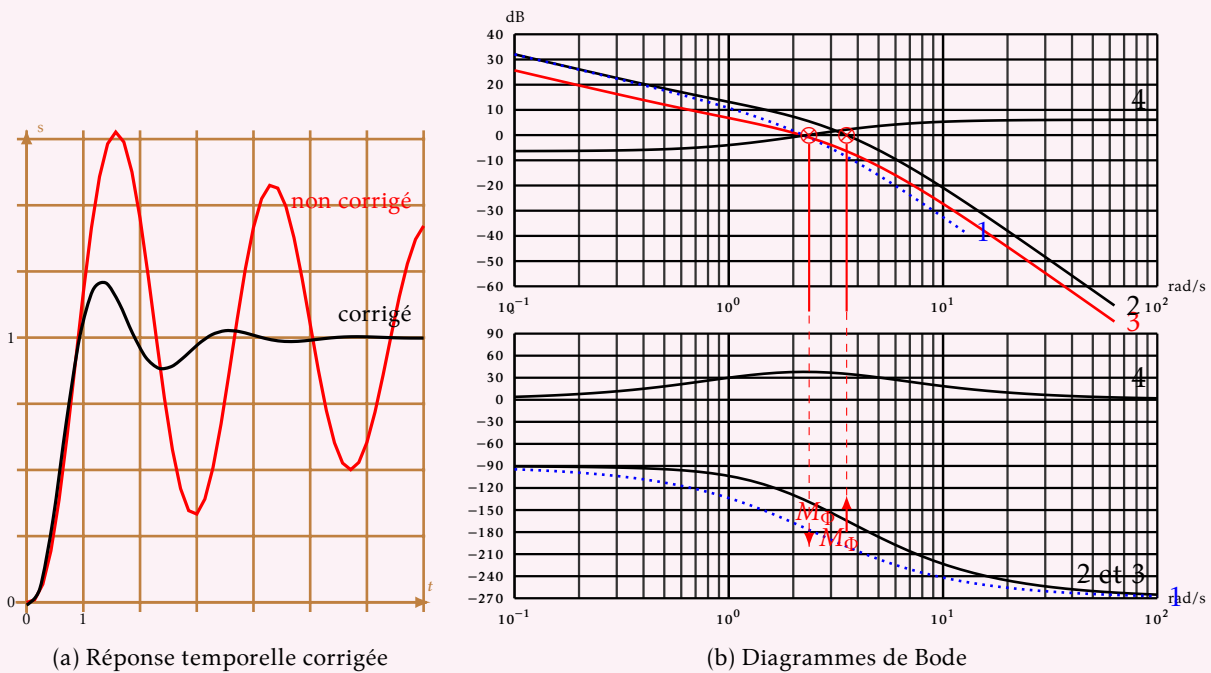


FIGURE 7.16 – Régulation d'un correcteur à avance de phase

**Remarque :** La FTBO non corrigée tracée ci-dessus est  $T(p) = \frac{4}{p \left(1 + \frac{2}{2,5}p + \frac{p^2}{2,5^2}\right)}$ .

## 7.2.6 Correcteur à retard de phase

Le correcteur à retard de phase est le correcteur complémentaire du correcteur à avance de phase :

$$C_{rp}(p) = K_p \frac{1 + T_r \cdot p}{1 + b \cdot T_r \cdot p} \text{ avec } b > 1.$$

Pour  $b \gg 1$  ce correcteur est une forme approchée du correcteur P.I.

On l'utilise surtout pour sa capacité à diminuer le module de la FTBO pour les hautes fréquences.

Il doit être manipulé avec précaution, car il peut rendre le système instable. Il est souvent associé à un correcteur à avance de phase.

## 7.2.7 Correcteur à retard-avance de phase

Le correcteur à avance-retard (ou retard-avance) combine les deux correcteurs précédents :

$$C_{avr}(p) = K_p \frac{1 + T_r \cdot p}{1 + b \cdot T_r \cdot p} \frac{1 + a \cdot T_a \cdot p}{1 + T_a \cdot p}$$

## 7.2 Principaux réseaux correcteurs

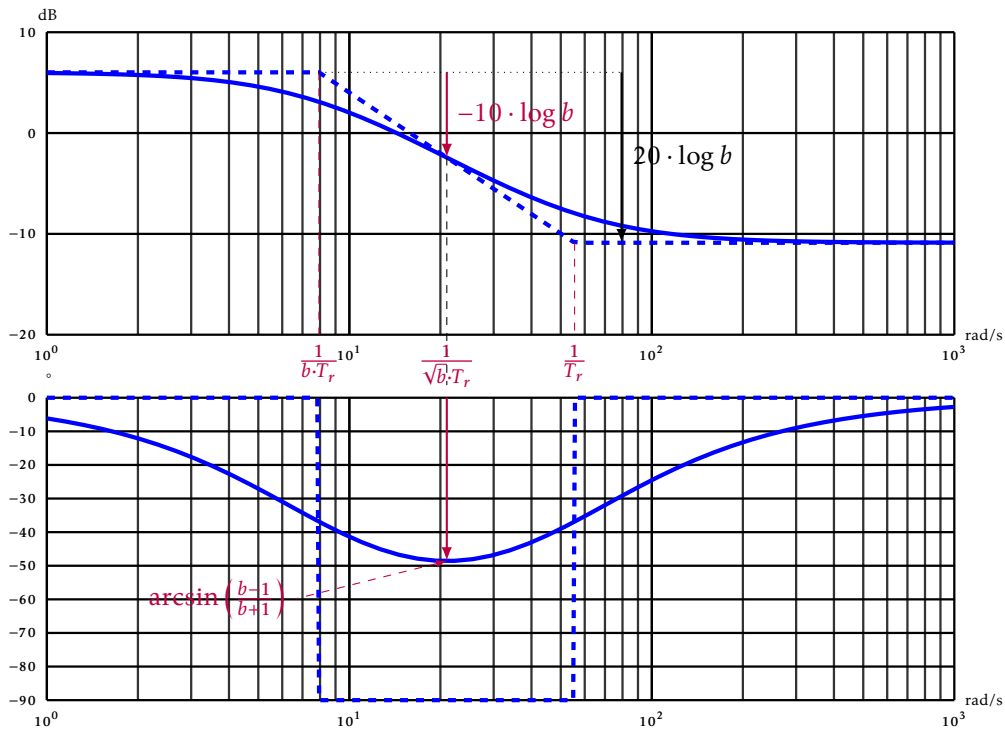


FIGURE 7.17 – Correcteur à retard de phase

avec  $b > 1$  et  $a > 1$ . On choisit souvent  $a = b$ .

On voit bien sur les diagrammes de Bode de la figure 7.18 les propriétés de ce correcteur.

- Pas d'effet sur les basses et hautes fréquences aussi bien pour le gain que pour la phase.
- Il existe une pulsation pour laquelle le gain est fortement diminué sans que l'argument soit modifié.

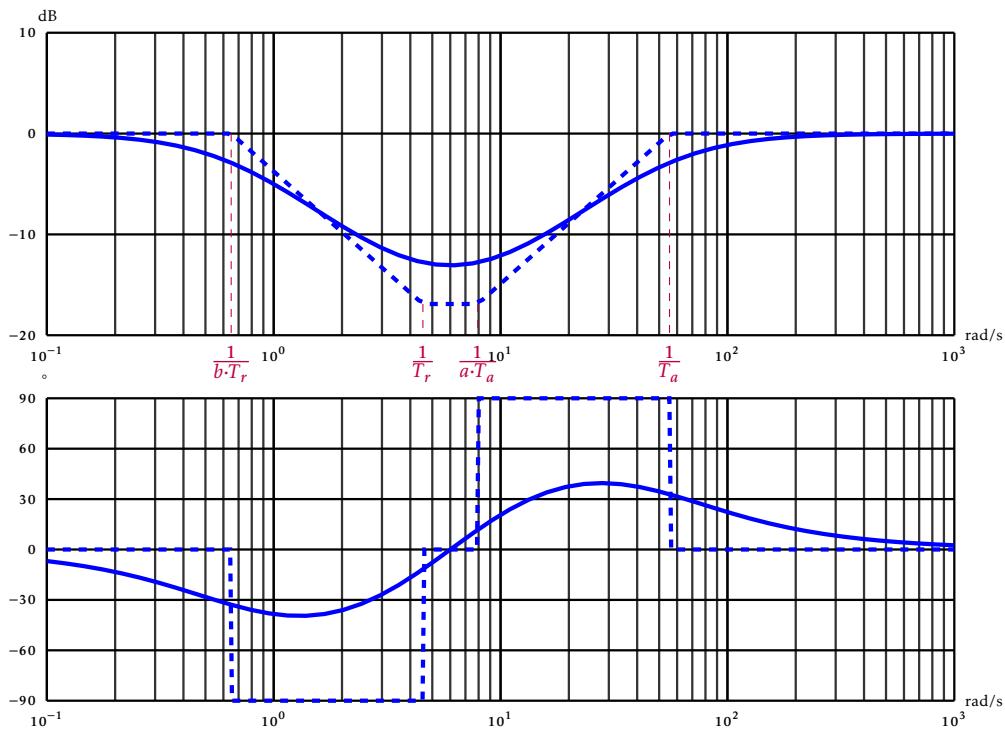


FIGURE 7.18 – Correcteur à avance-retard de phase

Ce correcteur combine les avantages des correcteurs à avance de phase et à retard de phase. On

l'utilise pour améliorer la marge de phase autour du point critique.

Correctement placé, il permet d'augmenter la bande passante et donc la rapidité du système.

## 7.2.8 Correcteur P.I.D.

Le correcteur P.I.D. combine les effets des correcteurs proportionnel, intégrateur et dérivé. La loi de commande de ce correcteur est donc une combinaison de ces trois fonctions, plusieurs structures sont possibles.

**Remarque :** Le correcteur P.I.D n'est pas explicitement au programme mais ce correcteur peut être considéré comme la mise en série d'un correcteur P.I et d'un correcteur à avance de phase qui sont tous les deux au programme.

### a ) Structure des correcteurs P.I.D.

**P.I.D. parallèle :** (fig. 7.19)

$$C(p) = K_p + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p$$

$$C(p) = \frac{1 + K_p \cdot T_i \cdot p + T_d \cdot T_i \cdot p^2}{T_i \cdot p}$$

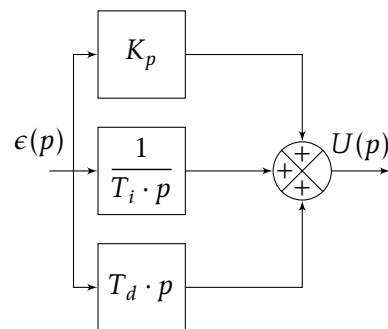


FIGURE 7.19 – P.I.D. parallèle

**P.I.D. mixte :** (fig. 7.20)

$$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right)$$

$$C(p) = \frac{K_p \cdot (1 + T_i \cdot p + T_d \cdot T_i \cdot p^2)}{T_i \cdot p}$$

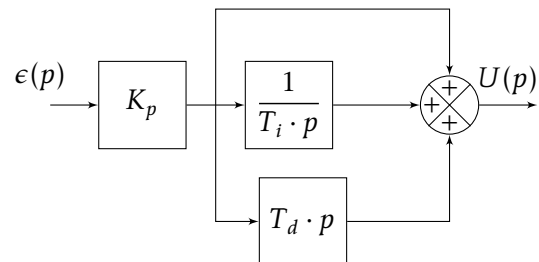


FIGURE 7.20 – P.I.D. mixte

**P.I.D. série :** (fig. 7.21)

$$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) (1 + T_d \cdot p)$$

$$C(p) = \frac{K_p \cdot (T_i \cdot p + 1)(1 + T_d \cdot p)}{T_i \cdot p}$$

$$C(p) = \frac{K_p \cdot (1 + (T_i + T_d)p + T_i \cdot T_d \cdot p^2)}{T_i \cdot p}$$

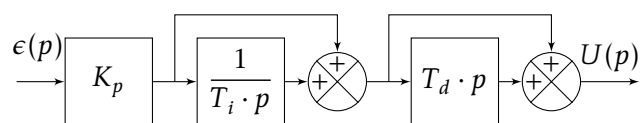


FIGURE 7.21 – P.I.D. série

Un correcteur P.I.D. de type série est la mise en série des trois correcteurs élémentaires, un correcteur proportionnel, un correcteur P.I. et un correcteur P.D.

**Remarque :** On constate que le degré du numérateur d'un correcteur P.I.D. est supérieur au degré du dénominateur, or comme pour le correcteur proportionnel dérivateur (P.D.) idéal, il n'existe pas de correcteur P.I.D. idéal. Un correcteur P.I.D. approché réalisable est de la forme :

$$C(p) = K_p + \frac{1}{T_i \cdot p} + \frac{T_d \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \text{ avec } T_d \gg \tau.$$

Malgré tout, pour l'étude qui suit nous ne considérons que les correcteurs idéaux.

Ces trois formes ne sont pas totalement équivalentes.

Il est toujours possible de passer d'un P.I.D. mixte à un P.I.D. parallèle et réciproquement.

$$\begin{aligned} C_m(p) &= K_{pm} \left( 1 + \frac{1}{T_{im} \cdot p} + T_{dm} \cdot p \right) = K_{pm} + \frac{K_{pm}}{T_{im} \cdot p} + K_{pm} \cdot T_{dm} \cdot p \\ &= K_{pp} + \frac{1}{T_{id} \cdot p} + T_{dp} \cdot p = C_p(p) \end{aligned}$$

Il est toujours possible de passer d'un P.I.D. série à un P.I.D. mixte (ou parallèle)

$$C_m(p) = K_{pm} \left( 1 + \frac{1}{T_{im} \cdot p} + T_{dm} \cdot p \right) = K_{pm} \frac{1 + T_{im} \cdot p + T_{im} \cdot T_{dm} \cdot p^2}{T_{im} \cdot p}$$

L'identification donne :

$$\begin{aligned} T_{im} &= T_{is} + T_{id} \\ T_{dm} &= \frac{T_{is} \cdot T_{id}}{T_{is} + T_{id}} \end{aligned}$$

Par contre dans l'autre sens, ce n'est possible que si les racines de

$$1 + T_{im} \cdot p + T_{im} \cdot T_{dm} \cdot p^2 = 0$$

sont réelles. On montre qu'il faut  $T_{im} > 4 \cdot T_{dm}$ .

### b ) Diagrammes de Bode

---

La figure 7.22 présente les diagrammes de Bode d'un correcteur P.I.D. de type série

$$C_s(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) (1 + T_d \cdot p)$$

On constate :

- une intégration à basse fréquence ( $\omega < \frac{1}{T_i}$ ) caractérisée par
  - un déphasage de  $-90^\circ$  du diagramme de phase,
  - une pente de  $-20\text{dB/dec}$ ;
- une zone plus ou moins large ( $\frac{1}{T_i} < \omega < \frac{1}{T_d}$ ) dans laquelle le gain varie peu ( $20 \log(K_p)$ );
- un fonctionnement de type dérivateur pour les hautes fréquences ( $\omega > \frac{1}{T_d}$ ) caractérisé par :
  - une avance de phase de  $+90^\circ$ ,
  - une pente positive de  $+20\text{dB/dec}$ .

### c ) Détermination du correcteur P.I.D.

---

Le réglage d'un correcteur P.I.D. est relativement complexe car, il s'agit ici de régler trois paramètres  $T_i$ ,  $T_d$  et  $K_p$ . Les deux paramètres temporels permettent de positionner le correcteur sur l'axe des

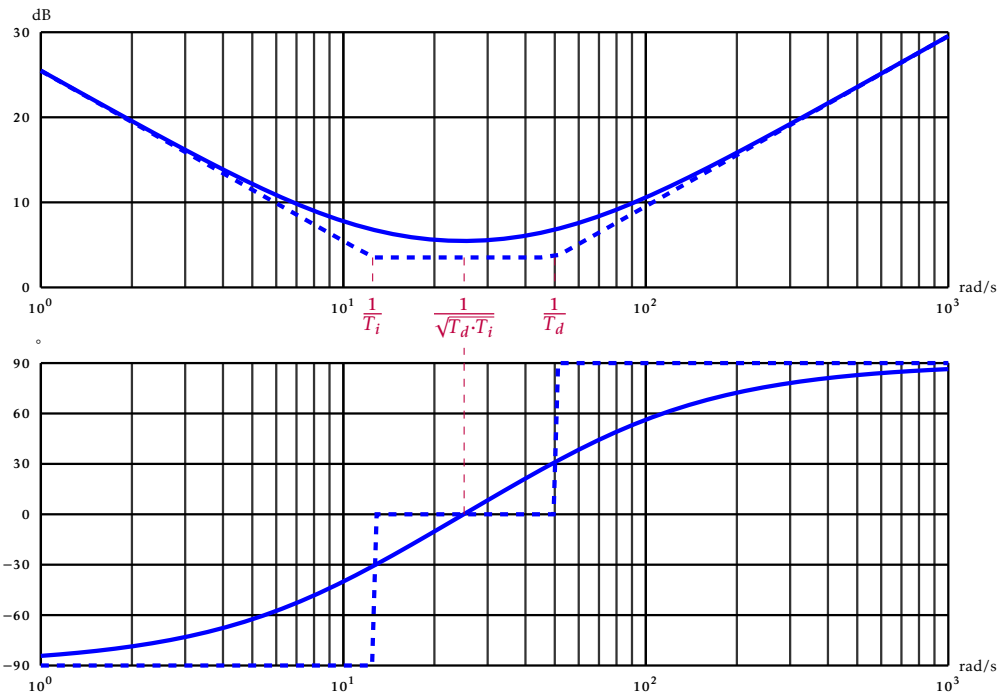


FIGURE 7.22 – Correcteur P.I.D.

pulsations, le gain  $K_p$  permet d'affiner le réglage.

### Exemple guidé : Réglage d'un correcteur P.I.D par la méthode des pôles dominants

Nous avons déjà utilisé cette méthode pour configurer un correcteur P.I. (page 6). Un correcteur P.I.D. comportant deux constantes de temps (si  $T_i > 4 \cdot T_d$ ) permet d'annuler algébriquement deux constantes de temps du système à corriger ( $T_i$  compensant la plus grande et  $T_d$  la suivante).

Le système à corriger est connu par sa fonction de transfert en boucle ouverte.

$$G(p) = \frac{40}{(1 + 0,12 \cdot p + 0,01 \cdot p^2)(1 + 0,5 \cdot p)(1 + 5 \cdot p)}$$

Le cahier des charges précise :

- erreur indicielle nulle;
- marge de phase supérieure à  $50^\circ$ ;
- temps de réponse à 5% inférieur à 1 s.

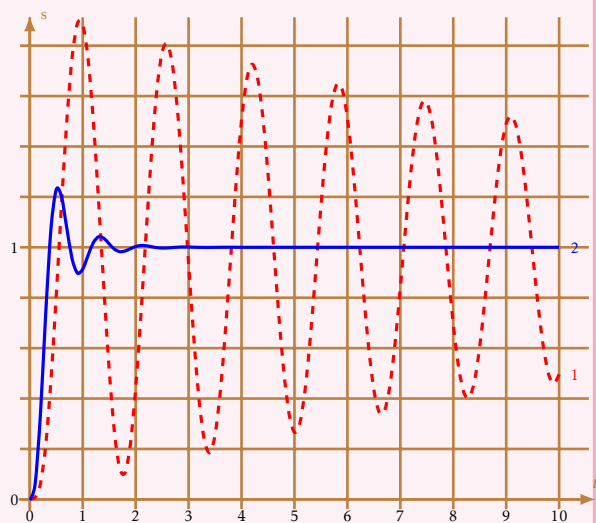
Le système non réglé (tracé en pointillé) est fortement oscillant, sa marge de phase et sa marge de gain sont insuffisants (fig. 7.23, tracé en pointillé).

On choisit d'installer un correcteur de type P.I.D. série.

$$C_s(p) = K_{ps} \left( 1 + \frac{1}{T_{is} \cdot p} \right) (1 + T_{ds} \cdot p)$$

Détermination du correcteur :

- on associe la plus grande des constantes de temps à la constante d'intégration  $T_{is} = T_1 = 5$  s;





## 7.2 Principaux réseaux correcteurs

- on associe la suivante à la constante de dérivation  $T_{ds} = T_2 = 0,5$  s ;
- dans un premier temps on pose  $K_{ps} = 1$ .

D'où le correcteur P.I.D.

$$C_s(p) = \left(1 + \frac{1}{5 \cdot p}\right)(1 + 0,5 \cdot p) = \frac{(1 + 5 \cdot p)(1 + 0,5 \cdot p)}{5 \cdot p}$$

La FTBO devient :

$$BO(p) = C_s(p) \cdot G(p) = \frac{55}{5 \cdot p \cdot (1 + 0,1 \cdot p)}$$

On trace les diagrammes de Bode de la fonction corrigée (fig. 7.23). On constate que la marge de phase est insuffisante. Il faut donc ajuster  $K_{ps}$ . Pour cela, on recherche sur la courbe de phase la pulsation correspondant à un déphasage de  $-180 + 50 = -130^\circ$  que l'on reporte sur la courbe de gain. Ici on constate que l'on doit « descendre » la courbe de gain de  $-4$ dB soit un gain  $K_{ps} = 10^{\frac{-4}{20}} \approx 0,63$ .

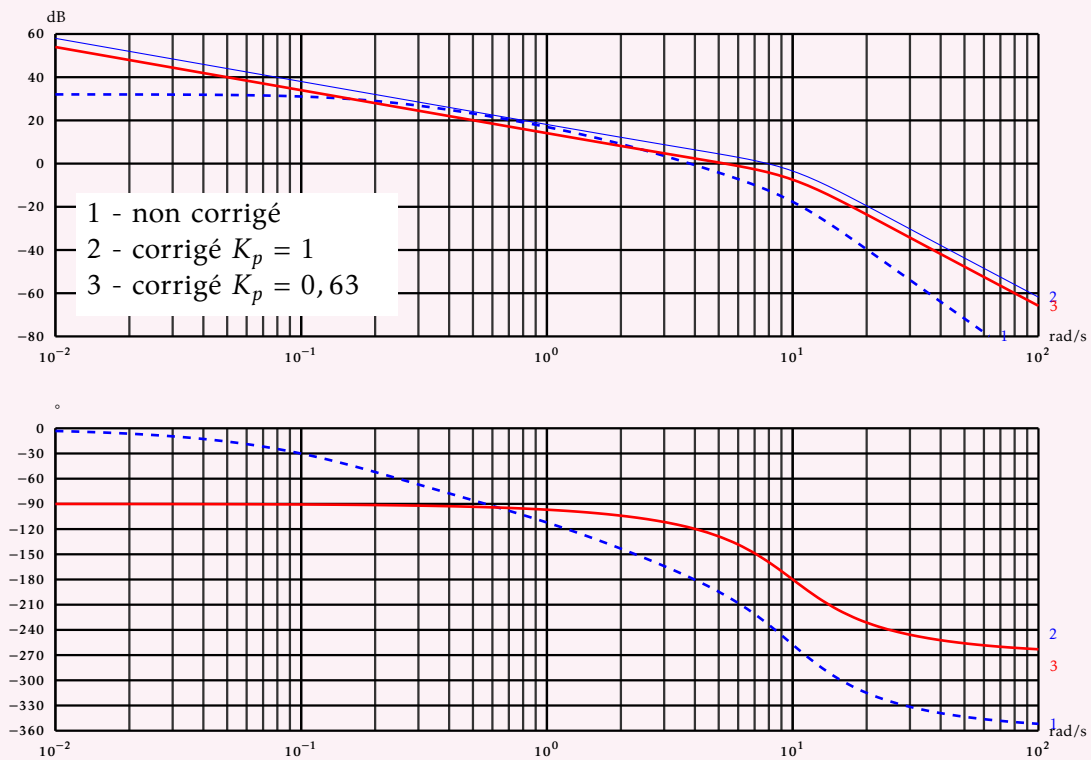


FIGURE 7.23 – Détermination correcteur P.I.D. - Diagrammes de Bode du système corrigé

La réponse temporelle définitive obtenue, superposée à la réponse non corrigée, est conforme au cahier des charges.

Le correcteur obtenu est donc :  $C_s(p) = 0,63 \frac{(1 + 5 \cdot p)(1 + 0,5 \cdot p)}{5 \cdot p}$ .

## 7.2.9 Correction en réaction

Nous allons dans cette partie, montrer le principe et l'intérêt des correcteurs en réaction à partir d'un exemple, la correction tachymétrique d'un moteur.

### a) Correction tachymétrique

Pour réaliser la correction tachymétrique, on installe une dynamo-tachymétrique qui permet de mesurer la vitesse de rotation de l'axe du moteur et on compare cette vitesse à la commande.

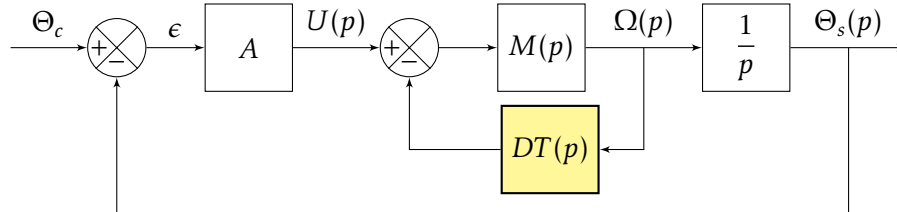
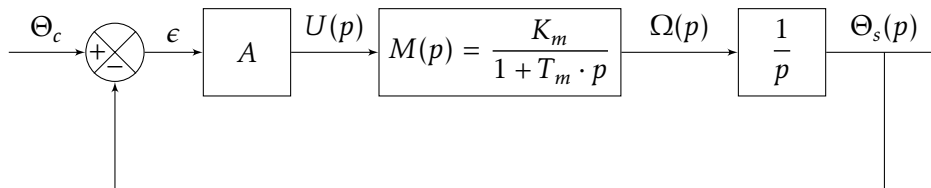


FIGURE 7.24 – Correction en tachymétrie

La boucle interne permet d'asservir la vitesse de rotation du moteur.

Afin d'évaluer l'effet de la correction, nous allons déterminer les caractéristiques du système avec et sans correction tachymétrique.

Soit un asservissement de position décrit par le schéma bloc ci-dessous.



avec

- $M(p)$  : la fonction de transfert du moteur modélisée pour l'étude par une fonction du premier ordre ;
- $A$  : un correcteur proportionnel de gain  $A$ .

On détermine rapidement :

$$\text{FTBO : } BO(p) = \frac{A \cdot K_m}{p(1 + T_m \cdot p)} ;$$

$$\text{FTBF : } BF(p) = \frac{\Theta_s(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{A \cdot K_m}{A \cdot K_m + p + T_m \cdot p^2}$$

On reconnaît un second ordre que l'on met sous forme canonique :

$$BF(p) = \frac{A \cdot K_m}{1 + \frac{1}{A \cdot K_m} p + \frac{T_m}{A \cdot K_m} \cdot p^2}$$

après identification on obtient :

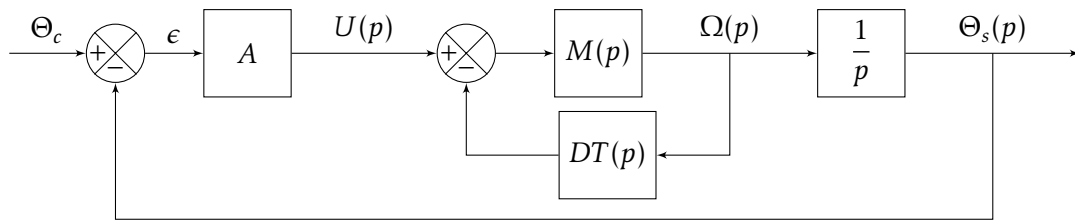
gain :  $K = 1$  ;

pulsation propre :  $\omega_n = \sqrt{\frac{A \cdot K_m}{T_m}}$  ;

coefficient d'amortissement :  $z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{A \cdot K_m \cdot T_m}}$ .

On insère maintenant une dynamo tachymétrique. On assimile la dynamo à un gain pur  $DT(p) = K_d$ .

## 7.2 Principaux réseaux correcteurs



La fonction de transfert  $\frac{\Omega(p)}{U(p)} = M_d(p)$  devient :

$$M_d(p) = \frac{M(p)}{1 + K_d \cdot M(p)} = \frac{K_m}{1 + K_m \cdot K_d + T_m \cdot p}$$

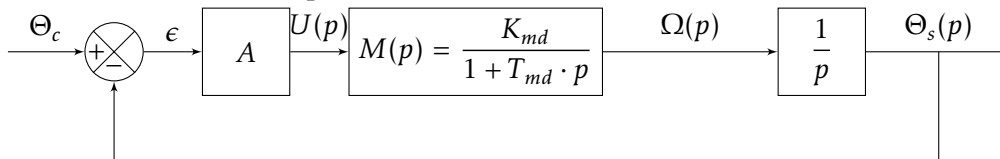
soit sous forme canonique :

$$M_d(p) = \frac{K_{md}}{1 + T_{md} \cdot p} = \frac{\frac{K_m}{1 + K_m \cdot K_d}}{1 + \frac{T_m}{1 + K_m \cdot K_d} \cdot p}$$

On constate un premier effet de la correction tachymétrique, elle permet de diminuer la constante de temps de l'ensemble moteur+dynamo. Le moteur atteindra donc sa valeur finale plus rapidement que s'il était seul :

$$T_{md} = \frac{T_m}{1 + K_m \cdot K_d}, \quad K_{md} = \frac{K_m}{1 + K_m \cdot K_d}$$

En remplaçant la boucle interne par sa fonction de transfert, on obtient le schéma suivant :



Par analogie avec l'étude précédente, on détermine

FTBO corrigée :  $BO_c(p) = \frac{A \cdot K_{md}}{p(1 + T_{md} \cdot p)}$  ;

FTBF corrigée :  $BF_c(p) = \frac{\Theta_s(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{A \cdot K_{md}}{A \cdot K_{md} + p + T_{md} \cdot p^2}$  soit sous forme canonique :

$$BF_c(p) = \frac{A \cdot K_{md}}{1 + \frac{1}{A \cdot K_{md}} p + \frac{T_{md}}{A \cdot K_{md}} \cdot p^2}$$

d'où on déduit les nouvelles valeurs de :

gain :  $K_c = 1$  ;

pulsation propre corrigée :  $\omega_{nc} = \sqrt{\frac{A \cdot K_{md}}{T_{md}}} = \sqrt{\frac{A \cdot K_m}{T_m}}$  ;

coefficient d'amortissement corrigé :  $z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{A \cdot K_{md} \cdot T_{md}}} = z \cdot (1 + K_m \cdot K_d)$ .

On constate

- que la correction tachymétrique n'a pas modifié la pulsation propre ;
- que le système est toujours précis pour un échelon ;
- que le coefficient d'amortissement a augmenté.

Cette augmentation du coefficient d'amortissement correspond à un effet stabilisant (diminution des oscillations, augmentation de la marge de phase).

## b) Effet de la correction tachymétrique

La correction tachymétrique a un effet stabilisant tout en augmentant la dynamique de la boucle intérieure.

Pour régler le système on dispose de deux paramètres, le gain  $A$  et le gain  $K_d$  de la dynamo tachymétrique. Ces deux paramètres permettent d'ajuster la marge de phase et le gain du système.

## 7.3 Détermination expérimentale des correcteurs

Sur les systèmes installés, on ne connaît en général pas la fonction de transfert du système, la détermination et le réglage d'un correcteur ne peuvent se faire que expérimentalement.

L'étude expérimentale peut se conduire soit à partir d'essais en boucle ouverte, soit à partir d'une étude fréquentielle sur la boucle fermée.

### 7.3.1 Méthode de Ziegler-Nichols

#### a) Détermination fréquentielle en boucle fermée

La détermination d'un correcteur par Ziegler et Nichols s'appuie sur la recherche de la juste instabilité en ne faisant varier que le gain proportionnel.

Procédure

Étape 1 : désactiver les composantes intégrales et dérivées du correcteur ;

Étape 2 : augmenter progressivement le gain proportionnel du correcteur jusqu'à la juste instabilité ;

Étape 3 : noter le gain  $K_{osc}$  correspondant à la juste instabilité et la période des oscillations  $T_{osc}$ .

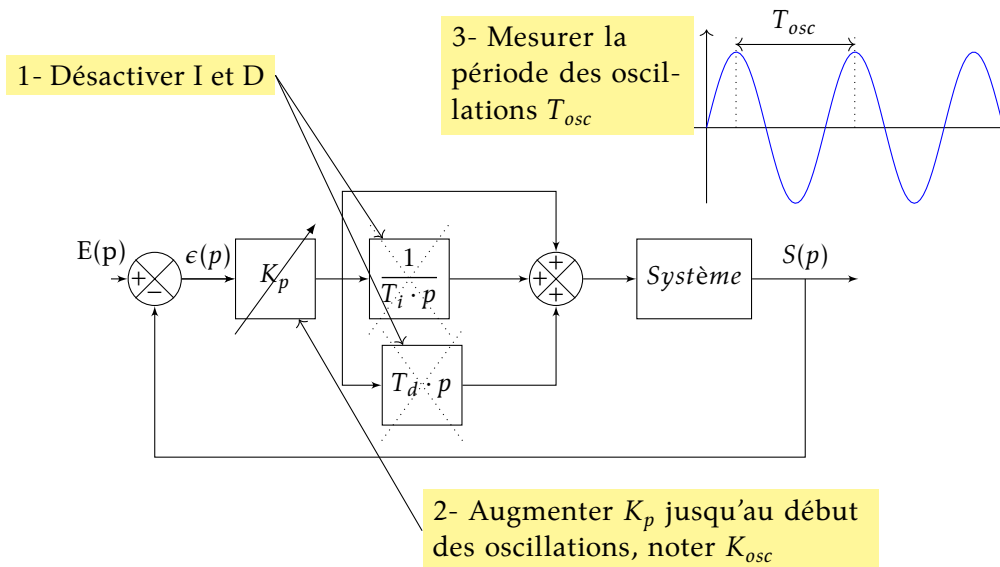


FIGURE 7.25 – Ziegler–Nichols - Détermination fréquentielle

À partir de la mesure de  $K_{osc}$  et  $T_{osc}$ , Ziegler et Nichols ont proposé des valeurs typiques de réglages des correcteurs P, P.I. et P.I.D. mixte.

Correcteur	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$K_p = 0,5 \cdot K_{osc}$		
P.I.	$K_p = 0,45 \cdot K_{osc}$	$T_i = 0,83 \cdot T_{osc}$	
P.I.D.	$K_p = 0,6 \cdot K_{osc}$	$T_i = 0,5 \cdot T_{osc}$	$T_d = 0,12 \cdot T_{osc}$

Ces valeurs permettent de réaliser un réglage dit du quart décroissant, c'est-à-dire que l'amplitude du deuxième dépassement n'est que le quart du premier. Le système corrigé ainsi, se comporte comme un système du second ordre dont le coefficient d'amortissement est  $z \approx 0,4$ .

### 7.3 Détermination expérimentale des correcteurs

Si on souhaite un système moins dynamique, on pourra diminuer le gain préconisé par Ziegler et Nichols.

**Remarque :** La détermination fréquentielle du correcteur ne peut s'utiliser que sur des systèmes qui autorisent les dépassements et les oscillations sans risque de destruction du système.

Cette procédure de réglage peut aussi être utilisée à partir de la représentation fréquentielle du lieu de transfert (Bode, Black ou Nyquist) d'un système non corrigé. On détermine directement la pulsation des oscillations correspondant à la juste instabilité ( $\omega_{osc} = \omega_{0dB}$ ) et le gain  $K_{osc}$  correspond au gain à appliquer pour que le système soit juste instable.

#### b ) Détermination temporelle à partir de la boucle ouverte

Cette procédure ne peut s'utiliser que si le système est stable en boucle ouverte (pas d'intégration dans la boucle).

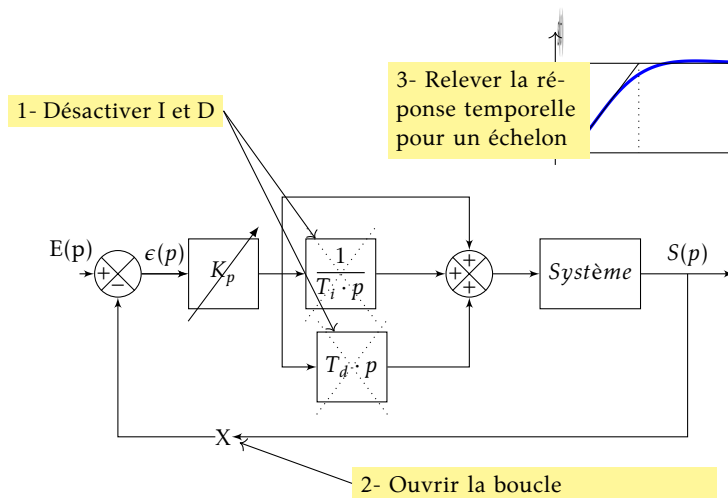


FIGURE 7.26 – Ziegler–Nichols - Détermination à partir de la boucle ouverte

**Étape 1 :** désactiver les composantes intégrale et dérivée du correcteur.

**Étape 2 :** ouvrir la boucle de retour.

**Étape 3 :** relever l'évolution de la sortie pour une entrée de type échelon unitaire.

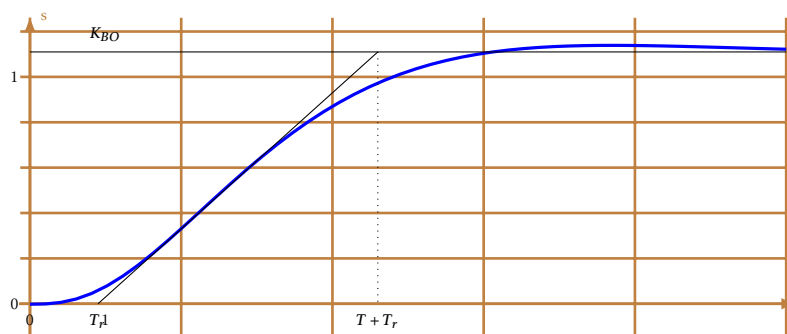


FIGURE 7.27 – Ziegler-Nichols, identification des paramètres en boucle ouverte

À partir de la réponse temporelle relevée 7.27, on détermine :

- le temps de retard,  $T_r$  ;
- le gain de la FTBO,  $K_{BO}$  ;
- le temps d'établissement,  $T$ .

Pour cela,

- on cherche le point d'inflexion de la courbe,
  - on trace la tangente en ce point,
  - on relève les intersections avec l'axe des abscisses et l'asymptote finale qui donnent  $T_r$  et  $T$ .
- Le tableau suivant donne les valeurs des paramètres des correcteurs P.I. et P.I.D. mixte.

Correcteur	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P.I.	$K_p = \frac{T}{K_{BO} \cdot T_r}$	$T$	
P.I.D.	$K_p = 0,6 \frac{T}{K_{BO} \cdot T_r}$	$T$	$T_d = 0,5 \cdot T$

TABLEAU 7.1 – Coefficients du correcteur P.I.D

## 7.4 Feuille de travaux dirigés n°7

### Exercice 1 - Robot assistant « EFFIBOT »

Adapté de Icna 2018

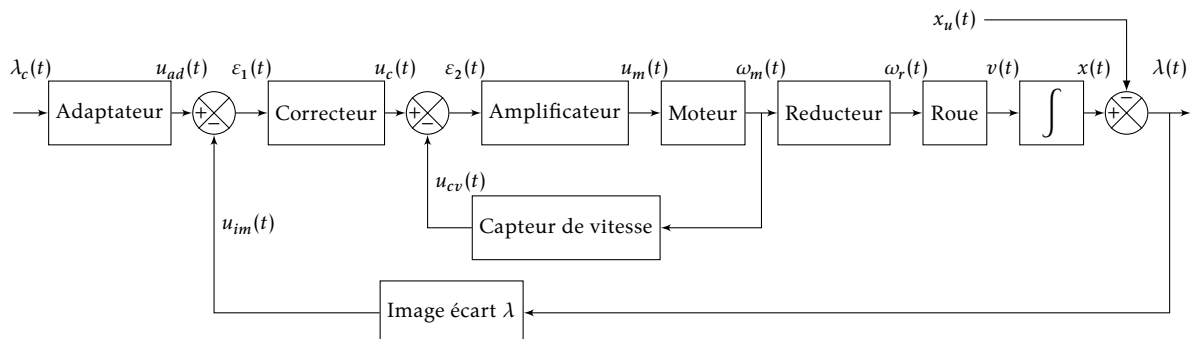
Corrigé page 37

#### A. Présentation

Ce robot est un robot d'aide à la personne permettant de transporter des charges lourdes. Il est actuellement développé par la société française Efficience. Cette société développe ce robot afin de répondre au plus près au besoin des utilisateurs en proposant différentes évolutions des modèles disponibles. Le principe du fonctionnement d'« Effibot » est relativement simple. L'utilisateur se place devant le robot qui le repère, à l'aide de différents capteurs et d'un traitement des informations. Le robot Effibot suit alors à une distance constante l'utilisateur.



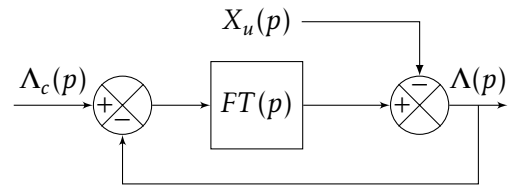
Le schéma-blocs fonctionnel du système d'asservissement de suivi d'une personne est présenté sur la figure suivante. On suppose que la charge est équi-répartie sur chacune des roues et que le déplacement se fait en ligne droite parfaitement horizontale. Le déplacement de « l'Effibot » est assuré par 4 roues-moteurs. Chacune des roues peut donc avoir un comportement qui lui est propre. Puisque l'étude s'effectue en ligne droite parfaitement horizontale et que la charge est équi-répartie, on suppose alors un comportement équivalent pour chacune d'entre elle. L'inertie équivalente ramenée sur chacune des roues-moteurs est donc égale. Ce qui nous amène à étudier l'asservissement sous cette forme :



- $\lambda_c$  est la consigne d'écart (en m) que l'on veut maintenir entre l'utilisateur et « l'Effibot ».
- $\lambda$  est la valeur d'écart (en m) entre l'utilisateur et « l'Effibot ».
- L'adaptateur est un gain pur :  $K_{ad}$  (en  $V \cdot m^{-1}$ ) permettant d'adapter la consigne d'écart en tension de commande.
- Le capteur « Image écart  $\lambda$  » renvoie une tension image de l'écart réel entre l'utilisateur et le système, celui est modélisé par un gain pur  $K_{im}$  (en  $V \cdot m^{-1}$ ). Cette information est en réalité issue des différents capteurs du robot et traitée par le module « Effinav ».
- L'amplificateur est modélisé par un gain pur :  $K_{am}$ .
- Le capteur de vitesse est modélisé par un gain pur :  $K_{cv}$  (en  $V \cdot s \cdot rad^{-1}$ ).
- Le réducteur est modélisé par un gain pur :  $K_r$ .
- La roue de « l'Effibot » a un rayon  $R_r$  (en m).
- Le correcteur, l'amplificateur et le moteur sont modélisés dans la suite du sujet.
- Le déplacement utilisateur  $x_u(t)$  est modélisé par une rampe de pente  $a = 1,4 m \cdot s^{-1}$ . Il sera vu comme une perturbation du système.

**B. Modélisation**

On souhaite pouvoir modéliser l'asservissement du système par le schéma-blocs ci-contre : avec  $\Lambda_c(p)$ ,  $\Lambda(p)$  et  $X_u(p)$  les transformées de Laplace de  $\lambda_c(t)$ ,  $\lambda(t)$  et  $x_u(t)$ .



**Q1.** Justifier alors que  $K_{ad} = K_{im}$ .

Le moteur permettant la mise en rotation d'une roue est un moteur brushless DC 48 V. On peut alors le modéliser par un moteur à courant continu.

La fonction de transfert du moteur peut alors se mettre sous la forme d'une fonction de transfert du second ordre de gain  $K_{mot}$ , de facteur d'amortissement  $\xi_{mot}$  et de pulsation propre  $\omega_{mot}$ .

**Q2.** Donner la fonction de transfert du moteur  $M(p)$ .

La fonction de transfert de la boucle de vitesse est définie par  $H_{bv}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)}$ , avec  $\Omega_m(p)$  la transformée de Laplace de  $\omega_m(t)$  et  $U_c(p)$  celle de  $u_c(t)$ .

**Q3.** Déterminer la fonction de transfert de la boucle de vitesse  $H_{bv}(p)$ . Mettre sous forme canonique.

On note pour la suite

$$H_{bv}(p) = \frac{K_{bv}}{1 + \frac{2 \cdot \xi_{bv}}{\omega_{bv}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{bv}^2}}$$

**Q4.** Déterminer  $K_{am}$  pour avoir un temps de réponse minimal sans dépassement de la boucle de vitesse en fonction des autres paramètres. Justifier alors que la fonction de transfert  $H_{bv}(p)$  s'écrit :

$$H_{bv}(p) = \frac{K_{bv}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_{bv}}\right)^2}$$

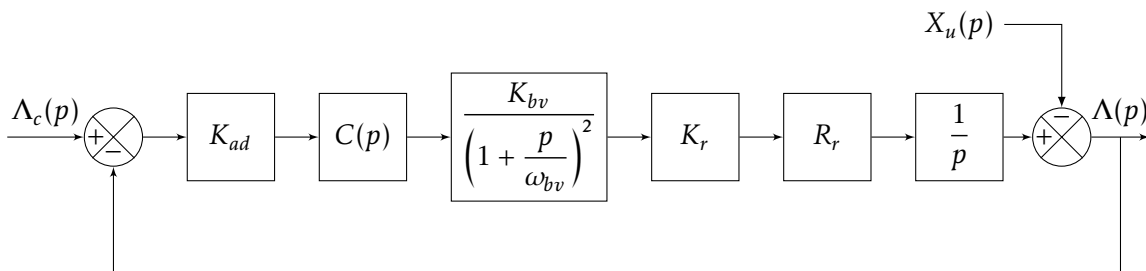
**C. Étude des performances de l'asservissement**

Le cahier des charges concernant les performances de l'asservissement est donné ci-dessous :

Exigence	Critères	Niveaux
Suivre un utilisateur à une distance imposée	Stabilité	$M_G \geq 10$ dB en boucle ouverte $M_\phi = 45^\circ$ en boucle ouverte
	Précision	Erreur statique nulle lors d'un déplacement de l'utilisateur $\lambda(t \rightarrow \infty) = \lambda_c$
	Rapidité	La pulsation $\omega_{0dB} \geq 30$ rad · s <sup>-1</sup> de la boucle ouverte

Pour rappel, dans notre étude, le déplacement de l'utilisateur  $x_u(t)$  est modélisé par une rampe de pente  $a$ . La consigne d'écart  $\lambda_c(t)$  entre l'utilisateur et « l'Effibot » est un échelon d'amplitude  $\lambda_0 = 1$  m.

D'après les différentes hypothèses et modélisations réalisées précédemment, le schéma-blocs de l'asservissement en écart de « l'Effibot » est alors le suivant :



avec  $C(p)$  la fonction de transfert du correcteur.

**Q5.** Donner la fonction de transfert en boucle ouverte  $B_O(p) = C(p) \cdot \frac{K_o}{D_o(p)}$  avec  $K_o$  le gain de la FTBO



## 7.4 Feuille de travaux dirigés n°7

et  $D_o(p)$  le dénominateur de la FTBO écrit sous sa forme canonique la plus simple.

On cherche à synthétiser une correction permettant de vérifier l'ensemble du cahier des charges. On se propose d'utiliser une approche incrémentale.

### C.1. Premier correcteur

On cherche tout d'abord à régler la marge de phase. Le diagramme de Bode de la FTBO( $p$ ) est donné pour  $C(p) = 1$  (figure 7.28).

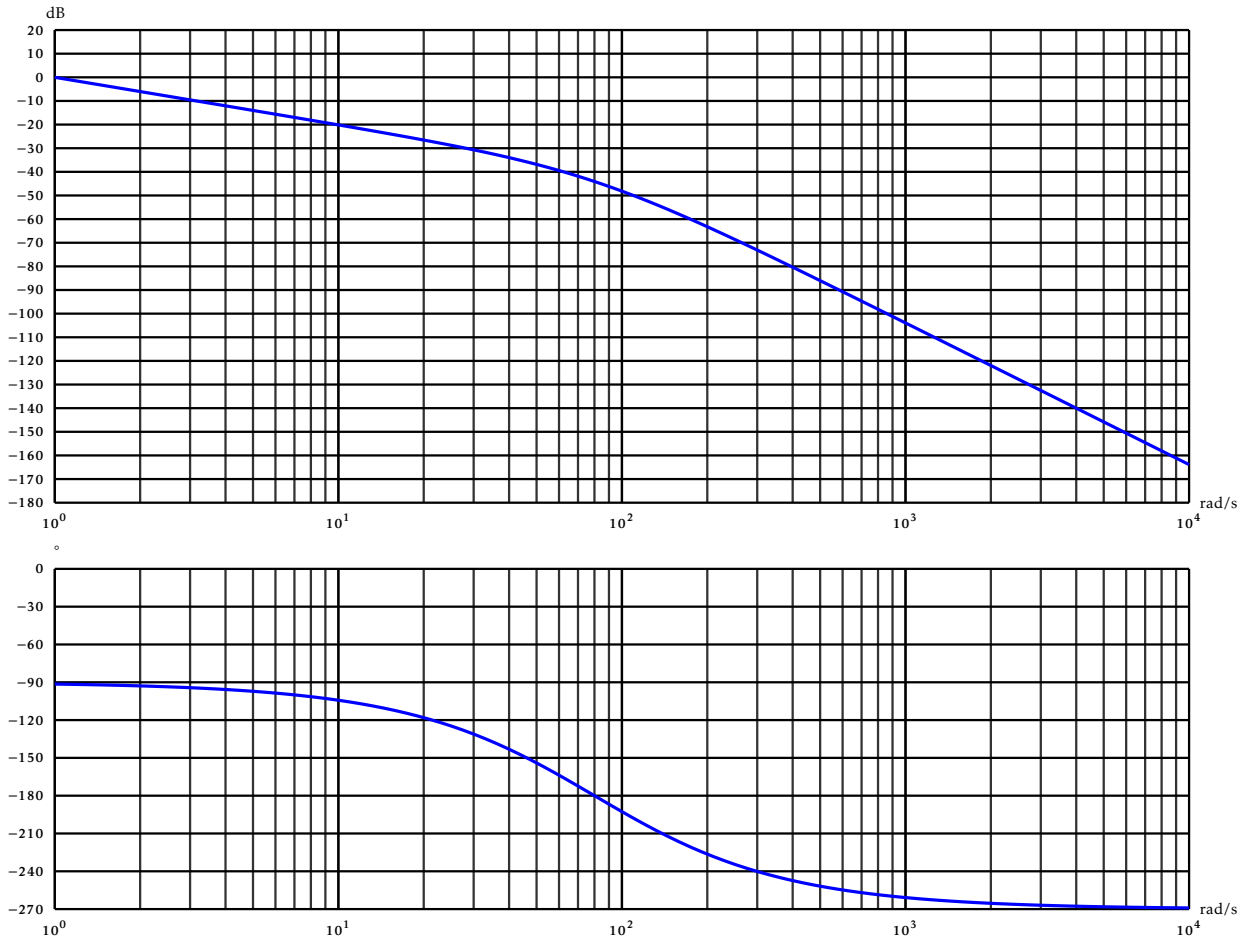


FIGURE 7.28 – Diagrammes de Bode de la FTBO

**Q6.** Le système étudié est-il stable en boucle fermée?

On pose  $C(p) = K_p$ .

**Q7.** Déterminer graphiquement la valeur maximale de  $K_p$  qui assure la stabilité.

**Q8.** Déterminer analytiquement la valeur maximale de  $K_p$  en fonction des différents paramètres de  $K_o$  et  $\omega_{bv}$ . Déterminer graphiquement  $K_o$  et  $\omega_{bv}$ , en déduire la valeur de  $K_p$ .

**Q9.** Déterminer  $K_p$  permettant de vérifier le critère de la marge de phase.

**Q10.** Le critère de bande passante est-il vérifié?

### C.2. Validation du critère d'erreur statique

On prend pour  $C(p) = K_p = K_{135}$  la valeur trouvée pour le respect de la marge de phase.

**Q11.** Déterminer  $\Lambda(p)$  en fonction de  $\Lambda_c(p)$  et  $X_u(p)$ .

On se place dans un cas particulier de test. On place une cible mobile devant les capteurs de l'Effibot. La cible se déplace à vitesse constante  $v(t) = a\mathcal{H}(t)$  ( $\mathcal{H}(t)$  fonction de Heaviside).

On place une consigne  $\lambda_c(t) = 0$ .

**Q12.** Déterminer la valeur finale de  $\lambda(t \rightarrow \infty)$ . Conclure sur le respect de l'exigence relative à la précision statique.

On choisit afin d'améliorer la précision le correcteur décrit par le schéma-blocs de la figure 7.29.

**Q13.** Déterminer la fonction de transfert du correcteur  $C(p) = \frac{U_c(p)}{\varepsilon_1(p)} = K_{135} \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$

**Q14.** Donner la désignation de ce correcteur, préciser l'intérêt et les risques.

**Q15.** Déterminer la FTBO avec ce correcteur.

Une méthode de réglage usuelle de ce correcteur est de choisir  $T_i$  égal à la plus grande des constantes de temps de la FTBO.

**Q16.** Justifiez qu'ici cette méthode n'est pas applicable.

On hésite entre deux valeurs pour  $T_i$  :  $T_{i1} = \frac{10}{\omega_{bv}}$  et  $T_{i2} = \frac{1}{10 \cdot \omega_{bv}}$ .

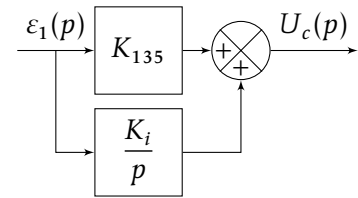


FIGURE 7.29 – second correcteur

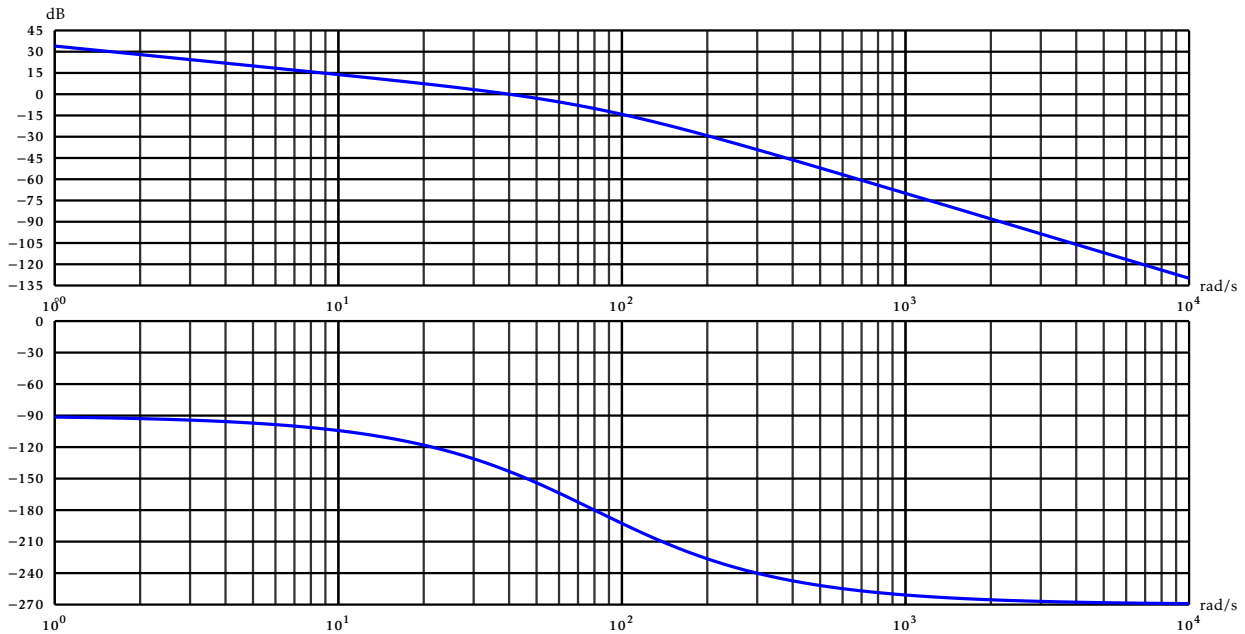


FIGURE 7.30 – Diagrammes de Bode avec  $C(p) = K_{135}$

**Q17.** Tracer sur la figure 7.30 les diagrammes de Bode de  $\frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$  pour les deux valeurs de  $T_i$ . Quelle valeur faut-il choisir pour que le système soit stable ?

On constate à l'issue de ce réglage que le système est maintenant conforme du point de vue de l'erreur statique mais que les marges ont diminuées.

**Q18.** Quel correcteur peut-on encore ajouter en série, pour améliorer les marges ?

### C.3. Analyse temporelle

Une simulation de l'asservissement établi met en avant une tension d'alimentation du moteur brushless de 1 000 V. Ceci n'est pas physiquement viable car la tension d'alimentation maximale du moteur est limitée à 48 V.

**Q19.** Comment se nomme le phénomène dont il faudrait alors tenir compte dans la modélisation de la simulation établie ?

**Exercice 2 - Étude d'un accéléromètre**

Adapté du concours d'entrée en 3<sup>e</sup> année de l'ENS Cachan

Corrigé page 40

Les capteurs d'accélération permettent des mesures statiques de gravité comme des mesures dynamiques de vibration. On les retrouve comme élément sensible des Airbags et désormais ils sont intégrés dans les manettes des dernières consoles de jeux vidéo (prise en compte des mouvements du joueur et de l'inclinaison de la manette). Ces capteurs sont désormais miniaturisés, ils tiennent dans des dimensions typiques de  $(3 \times 3 \times 1 \text{ mm}^3)$  et sont utilisés de plus en plus en mode asservi.

Nous nous intéressons ici à un accéléromètre associé à un mouvement purement rectiligne dont on notera l'accélération  $\gamma$ . L'accéléromètre est constitué d'une masse sismique  $m$ , retenue par un ressort de rappel de raideur  $k$  et soumise à un amortissement, du type frottement visqueux, de coefficient  $\lambda$  (Fig. 7.31). Dans le cadre de capteurs miniaturisés, on mesure le déplacement de la masse sismique par une détection capacitive, on obtient ainsi un signal tension  $V$  qui est proportionnel au déplacement de la masse sismique au sein du capteur via un gain  $K_V$ .

L'accéléromètre sera utilisé en mode asservi par l'application d'une force  $F$  qui permet de ramener la masse à sa position d'équilibre (obtenue sans accélération) lorsqu'elle subit une accélération  $\gamma$ . La commande de cette force  $F$  se fait à partir de la tension de mesure  $V$ .

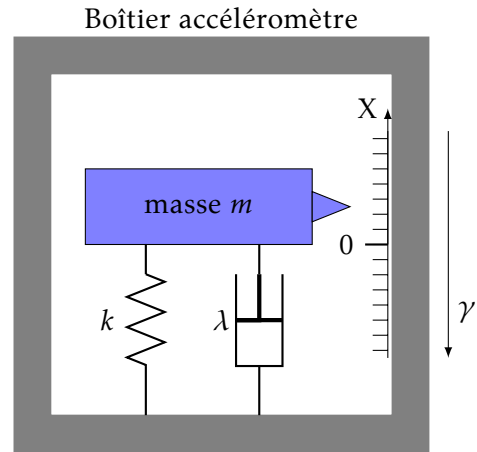


FIGURE 7.31 – Accéléromètre

Cette force est considérée comme directement proportionnelle à la tension de mesure, on lui associe alors un gain  $K_F$ . Elle vient s'opposer à l'effet de l'accélération  $\gamma$  qui s'applique sur la masse.

On note  $\mathcal{R}_B$  le repère associé au boîtier,  $\mathcal{R}_g$  le repère galiléen.

On notera, dans le domaine de Laplace,  $\Gamma(p)$  l'accélération du boîtier par rapport au repère galiléen que l'on cherche à mesurer,  $X(p)$  la position de la masse sismique,  $F(p)$  la force de contre-réaction et  $V(p)$  la tension permettant d'avoir une image électrique du déplacement de la masse.

**A. Mise en équation et modèle**

**Q1.** Établir le bilan des actions extérieures à la masse sismique.

**Q2.** Montrer que l'équation différentielle du mouvement de la masse sismique en fonction de  $m, k, \lambda$  et  $\gamma$  et  $F$  autour de la position d'équilibre  $x(0) = 0$  au repos s'écrit :

$$\gamma(t) - \frac{F(t)}{m} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x(t) + \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

Le schéma bloc figure 7.32 représente le fonctionnement du capteur en boucle fermée avec en entrée l'accélération  $\Gamma(p)$  et en sortie la tension de mesure  $V(p)$ .

**Q3.** Préciser les blocs A et B.

**Q4.** Montrez que  $H(p)$  peut se mettre sous la forme d'un second ordre

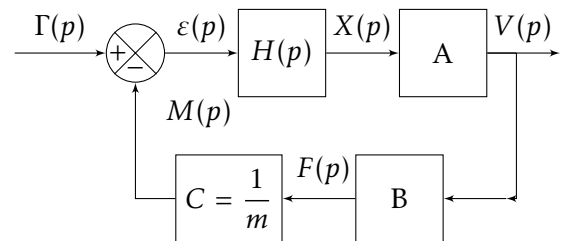


FIGURE 7.32 – Schéma bloc de l'accéléromètre asservi

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega} \cdot p + \frac{p^2}{\omega^2}}$$

Donner l'expression et la signification de  $H_0, \xi,$  et  $\omega_0$ .

L'effet de la miniaturisation a comme conséquence des valeurs pour les paramètres  $(m, k, \lambda)$  peu conventionnelles ce qui fait ici la particularité du sujet. On prendra pour les calculs les valeurs sui-

vantes :  $m = 165 \mu\text{g}$ ,  $k = 0,3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\lambda = 42 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q5.** En déduire les valeurs de  $H_0$ ,  $\xi$ , et  $\omega_0$ , commentez.

**Q6.** Sous une accélération continue  $\lambda$  de  $1\text{g}$ , ( $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ), quelle serait la valeur du déplacement de la masse sismique au sein du capteur s'il n'y avait pas d'asservissement ?

On prendra pour toute la suite du sujet :  $\xi = 0,1$ ,  $\omega_0 = 1,5 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $H_0 = 5 \times 10^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

**Q7.** Que peut-on dire de ces valeurs pour un deuxième ordre ?

### B. Étude en boucle ouverte de l'accéléromètre

**Q8.**

**Q8a.** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte, du système complet, que l'on notera  $G(p)$  et que l'on exprimera sous la forme :

$$G(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{G_0}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On donne :  $K_V = 0,5 \text{ V} \cdot \mu\text{m}^{-1}$  et  $K_F = 0,6 \mu\text{N} \cdot \text{V}^{-1}$ .

**Q8b.** Calculer  $G_0$ .

Pour la suite du problème on prendra  $G_0 = 1$ .

**Remarque :** Pour la suite des calculs, au regard de la valeur de  $\xi$ , on pourra considérer que le terme ( $\xi^2$ ) est fortement négligeable devant 1.

**Q9.** Déterminer par le calcul, l'expression de la pulsation  $\omega_r$  pour laquelle le module de la fonction complexe  $G(j \cdot \omega)$  est maximum. Faire l'application numérique.

**Q10.** Déterminer l'expression de la marge de phase et de la pulsation associée  $\omega_{m\phi}$  pour laquelle le module de  $G(p)$  en dB est nul. Faire l'application numérique.

**Q11.** Tracer les diagrammes de Bode associés à  $G(p)$ . Vous y indiquerez les pulsations qui vous semblent pertinentes.

**Q12.** Que vaut la marge de gain ?

**Q13.** Au regard de ce tracé, que peut-on prédire du comportement en boucle fermée du système ?

### C. Étude en boucle fermée

On se place en boucle fermée. On s'intéresse désormais à la fonction de transfert suivante :

$$T(p) = \frac{V(p)}{\Gamma(p)}$$

**Q14.** Déterminer l'expression de la fonction de transfert  $T(p)$ .

**Q15.** Quelles sont la nature et les caractéristiques de  $T(p)$ .

**Q16.** Le système est-il stable ?

**Q17.** Déterminer la valeur finale de l'erreur en accélération  $\varepsilon_i$  avec  $\varepsilon(t) = \gamma(t) - \frac{F(t)}{m}$ .

**Q18.** Tracer l'allure de l'évolution temporelle de la tension  $V(t)$  lors de la réponse à un échelon d'accélération unitaire  $\gamma(t)$ .

**Q19.** On considère maintenant une rampe d'accélération  $\gamma(t) = a \cdot t \mathcal{H}(t)$ . Déterminer  $\varepsilon(t)$ . Que peut-on en déduire ?

**Q20.** Conclure sur les performances obtenues.

### D. Mise en place d'un correcteur

Afin d'améliorer les performances de l'accéléromètre, on insère en série dans la chaîne directe un correcteur du type P.I.D. dont la fonction de transfert théorique s'écrit :

$$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p} + \tau_d \cdot p \right)$$

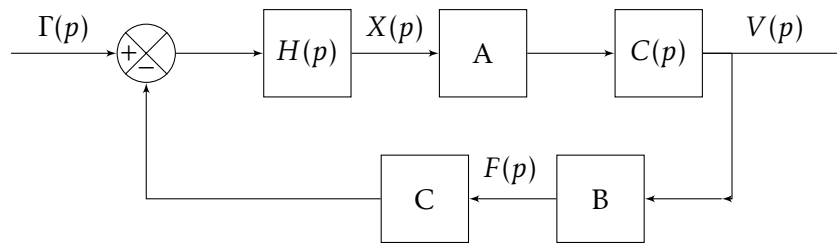


FIGURE 7.33 – Schéma bloc de l'accéléromètre corrigé

Q21. Justifier la place du correcteur dans ce schéma.

Afin de mettre en place le correcteur de manière simple, on pose  $\tau_i = 4 \cdot \tau_d$ .

Q22. Montrer alors que l'on peut exprimer  $C(p)$  sous la forme :

$$C(p) = C_0 \cdot \frac{(1 + T_1 \cdot p)^2}{T_1 \cdot p}$$

Exprimer  $T_1$  et  $C_0$ .

On souhaite trouver les paramètres  $C_0$  et  $T_1$  pour que la fonction de transfert ainsi corrigée présente une marge de phase de  $45^\circ$  en boucle ouverte pour la pulsation  $\omega_{45} = 2\,120 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pour cette pulsation, on considérera que la fonction  $G(p)$  présente un gain de 1 et un déphasage de  $-165^\circ$ .

Q23. Déterminer le module et l'argument de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé en fonction de  $C_0$  et  $T_1$ .

Q24. Déterminer l'expression de  $C_0$  et  $T_1$  et faire l'application numérique.

Q25. Tracer les diagrammes de Bode associés à  $C(p)$  sur le même diagramme que précédemment. Quelles que soient les valeurs trouvées à la question précédente, on prendra  $T_1 = 0,90 \text{ ms}$  et  $C_0 = 0,43$ .

Q26. Tracer l'allure du diagramme de Bode de la fonction de transfert ainsi corrigée en boucle ouverte. Faire ce tracé sur le même document (d'une couleur différente).

Q27. Calculer l'erreur statique du système ainsi corrigé.

Q28. Calculer l'erreur dynamique (erreur de traînage) du système ainsi corrigé.

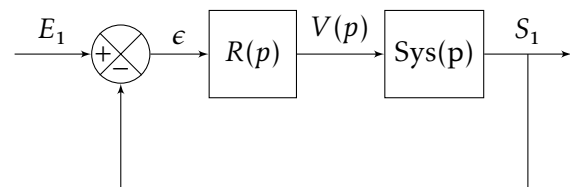
Q29. Que peut-on espérer sur les performances dynamiques en boucle fermée ?

### Exercice 3 - Identification et correction PID

Corrigé page ??

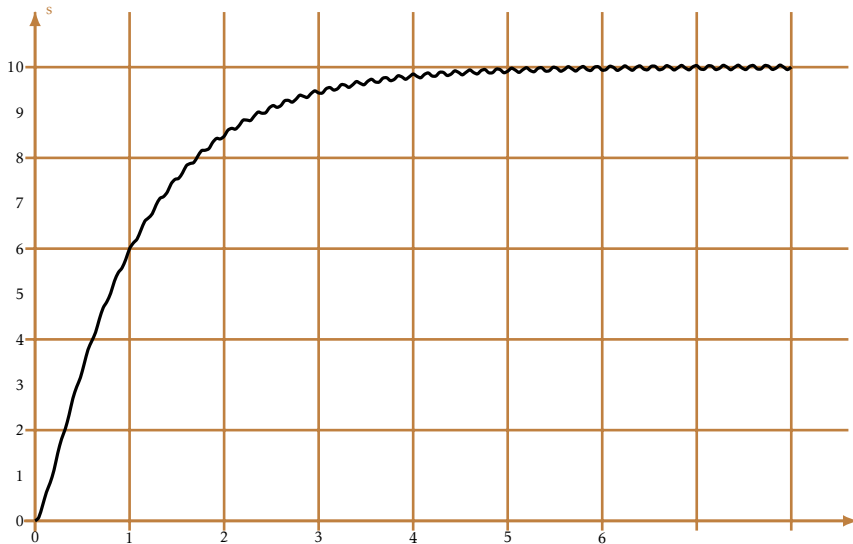
On désire asservir un système d'entrée  $e_1(t)$  et de sortie  $s_1(t)$ .

Le système à réguler  $Sys(p)$  n'est connu qu'à partir d'un essai temporel, on l'a soumis à un échelon unitaire de tension  $v(t) = 1$  et on a relevé l'évolution de la sortie  $s_1(t)$  (Figure 7.34).



On souhaite obtenir le comportement suivant :

- suppression de l'erreur statique,
- pas de dépassement en réponse à un échelon,
- le temps de réponse à 5% doit être inférieur à 0,2 s.

FIGURE 7.34 – Réponse temporelle de  $Sys(p)$  pour une entrée indicielle

**Q1.** Dans une première étape, on modélise le système par une fonction de transfert  $Sys(p)$  du premier ordre.

**Q1a.** Que pensez-vous de cette modélisation ?

**Q1b.** Déterminer  $Sys(p)$ , on note  $T_s$  le temps de réponse et  $K_s$  le gain (on arrondira la valeur de la constante de temps  $T_s$  au nombre entier de secondes le plus proche).

**Q2.** On décide de boucler le système avec un correcteur intégrateur  $R(p) = \frac{G_r}{p}$ .

**Q2a.** Montrer que l'erreur statique est nulle.

**Q2b.** Montrer que si l'on s'impose le dépassement alors on ne peut plus choisir le temps de réponse.

**Q3.** On utilise alors un régulateur PI :  $R(p) = G_r \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{p}$ .

**Q3a.** Montrer qu'il est possible de choisir  $T_i$  de façon que le système bouclé soit un premier ordre.

**Q3b.** Choisir  $G_r$  de façon à avoir un temps de réponse de 0,2 secondes.

**Q3c.** Tracer l'allure de la réponse attendue.

On installe le correcteur ainsi déterminé sur le système et on réalise un essai de l'asservissement pour une entrée en échelon unitaire. On relève la courbe de réponse de la figure 7.35 et on constate que la réponse présente un dépassement.

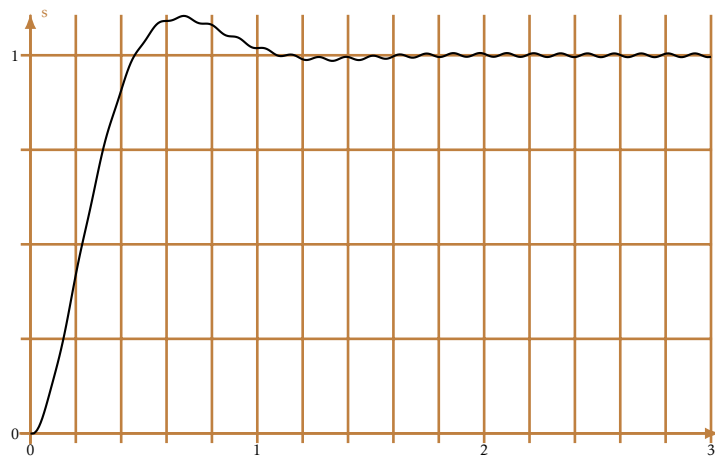


FIGURE 7.35 – Réponse temporelle du système asservi pour une entrée indicielle

**Q4.**

**Q4a.** Le cahier des charges est-il respecté ?

**Q4b.** Montrer qu'un modèle d'ordre 2 pour le système  $Sys(p)$  permet d'expliquer le phénomène.

#### 7.4 Feuille de travaux dirigés n°7

**Q4c.** Justifier alors que  $Sys(p)$  peut être modélisé par  $Sys(p) = \frac{K_s}{(1 + T_s \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$  avec  $T_2 \ll T_s$ . Afin de déterminer la deuxième constante de temps, on utilise le protocole expérimental suivant :

- on installe dans la boucle le correcteur intégral pur  $R(p) = \frac{G_r}{p}$
- on augmente progressivement la constante proportionnelle  $G_r$
- on relève la valeur de  $G_r = 0,9$  lorsque le système est juste instable.

On note  $BO(p) = \frac{S_1(p)}{\varepsilon(p)}$  la fonction de transfert en boucle ouverte.

On rappelle qu'un système est juste instable si la pulsation  $\omega_{180}$  pour laquelle l'argument de fonction de transfert en boucle ouverte  $BO(j \cdot \omega) = -180^\circ$  et la pulsation  $\omega_{0dB}$  pour laquelle le module de  $BO(j\omega) = 1$  sont égales.

**Q5.** Déterminer  $BO(p)$  puis  $BO(j \cdot \omega)$ , son module en dB et l'argument.

**Q5a.** Déterminer  $\omega_{180}$  en fonction de  $T_s$  et  $T_2$ .

**Q5b.** Déterminer le module de  $|BO(\omega_{180})|$  en fonction des différents paramètres de la FTBO.

**Q5c.** En déduire  $T_2$ .

**Q6.** Tracer les diagrammes de Bode (asymptotiques et réels) de  $Sys(p)$ .

**Q7.** On asservit le système avec un correcteur PID :  $R(p) = G_r \cdot \frac{(1 + T_i \cdot p)(1 + T_d \cdot p)}{p}$  avec  $T_i = T_s$  et  $T_d = T_2$ .

**Q7a.** Tracer les diagrammes de Bode du correcteur.

**Q7b.** Déterminer la FTBO et la FTBF du système asservi.

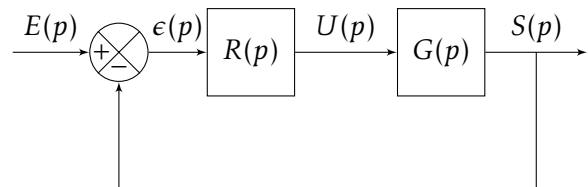
**Q7c.** Déterminer le temps de réponse du système asservi en fonction de  $G_r$ , puis déterminer  $G_r$  pour respecter le cahier des charges.

#### Exercice 4 - Correction à avance de phase

Corrigé page ??

Soit le système décrit par le schéma bloc ci-contre.

La fonction de transfert du système à réguler est  $G(p) = \frac{40}{(1 + p)^2}$ . On souhaite que l'erreur indicielle soit inférieure à 5 % et que la réponse temporelle ne présente pas trop d'oscillations, pour cela on impose une marge de phase de  $M_p = 50^\circ$ .



**Q1.** Dans un premier temps, le correcteur  $R(p)$  est un correcteur proportionnel  $R(p) = K_r$ .

**Q1a.** Tracer les diagrammes de Bode de la FTBO pour  $K_r = 1$ . Quelle est la marge de phase ?

**Q1b.** Déterminer graphiquement  $K_r$  pour avoir une marge de phase de  $50^\circ$ , vérifier par le calcul.

**Q1c.** Déterminer l'erreur indicielle correspondante.

**Q1d.** Quelle est la valeur minimale de  $K_r$  qui permettrait de respecter le cahier des charges ?

Conclure.

**Q2.** On choisit maintenant le correcteur  $R(p) = K_r \frac{1 + 0,2 \cdot p}{1 + 0,05 \cdot p}$ .

**Q2a.** Préciser la nature du correcteur.

**Q2b.** Tracer les diagrammes de Bode de la FTBO corrigée pour  $K_r = 1$ .

**Q2c.** Déterminer  $K_r$  pour obtenir une marge de phase de  $50^\circ$ .

**Q2d.** Quelle est l'erreur indicielle du système corrigé ?

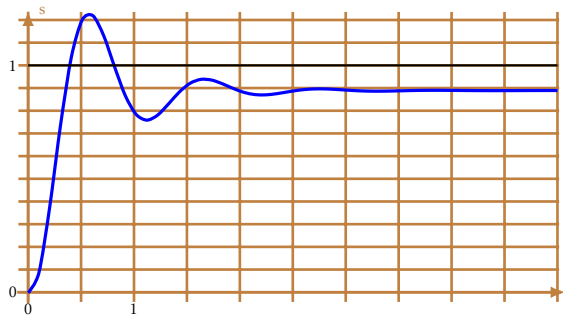
**Q2e.** Quel est l'intérêt de ce correcteur ?

**Q3.** Tracer les réponses temporelles.

#### Exercice 5 - Réglage d'un correcteur PID par la méthode de Ziegler-Nichols

Corrigé page ??

Actuellement le système à corriger est caractérisé par une erreur indicielle relativement importante (Cf. graphe 7.36a). On souhaite améliorer la réponse temporelle du système en imposant une erreur nulle.



(a) Réponse temporelle du système non corrigé  $C(p) = 1$

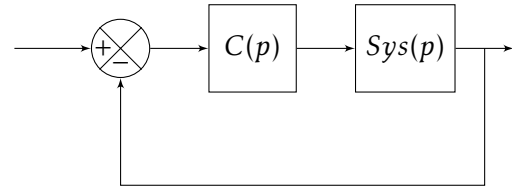
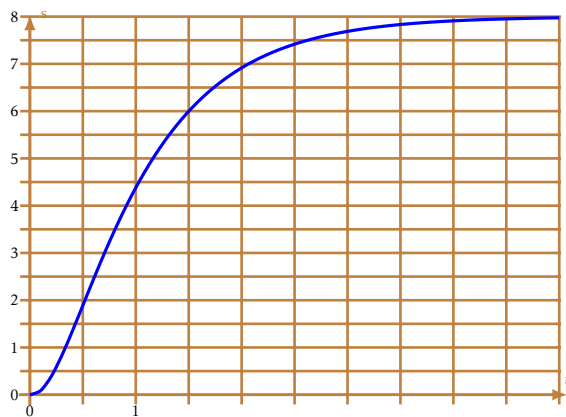


FIGURE 7.36 – Système à corriger

On se propose d'utiliser un correcteur P.I.D mixte pour améliorer le comportement. Afin de déterminer expérimentalement les caractéristiques de ce correcteur on a réalisé une étude temporelle du système ( $Sys(p)$ ) en le soumettant à une entrée échelon unitaire (figure 7.36). On a aussi réalisé une étude fréquentielle qui a permis de relever un tableau fréquentiel (tableau 7.37b).



(a) Réponse temporelle du système en boucle ouverte

$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	dB	$^{\circ}$
0,1	18,0	-6,5
0,5	17,	-31
1	15,5	-57
2	11	-93
4	3,5	-130
10	-10,4	-171
12,5	-14,4	-180
20	-23,4	-198
50	-42,6	-231
100	-59,5	-249

(b) Relevé fréquentiel

FIGURE 7.37 – Caractérisation du système en boucle ouverte

On se propose de déterminer le correcteur PID mixte à partir de la méthode temporelle de Ziegler-Nichols.

**Q1.** Déterminer à partir de la réponse temporelle en boucle ouverte les temps  $T$ ,  $T_r$  et le gain  $K_{BO}$ .

**Q2.** En déduire les coefficients du correcteur PID mixte  $C(p) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right)$ .

**Q3.** À partir du relevé fréquentiel, tracer les diagrammes de Bode de  $Sys(p)$  et ceux du correcteur  $C(p)$ .

**Q4.** En déduire les diagrammes de Bode de la boucle ouverte du système corrigé  $C(p) \cdot Sys(p)$ .

**Q5.** Mesurer les marges de phases et de gain. Conclure.



## Exercice 6 - Correcteur d'assiette pour véhicule

Corrigé page ??

Le problème porte sur l'analyse d'un système ressort – amortisseur, équipant chaque roue d'un véhicule expérimental et assurant sa suspension.

La liaison élastique entre une roue et la caisse (fonction ressort) est obtenue par compression d'air dans un module de volume variable. C'est une électro-vanne, commandée par un système électronique analogique, qui injecte plus ou moins d'air dans ce module et en fait varier le volume. Cette variation de volume entraîne une variation de la hauteur de caisse au niveau de la roue. Cette hauteur peut être asservie à une consigne.

Ce module ressort est associé à un amortisseur classique.

On se limite à l'étude de la suspension d'une seule roue, supportant une masse fictive égale à une fraction de la masse totale du véhicule.

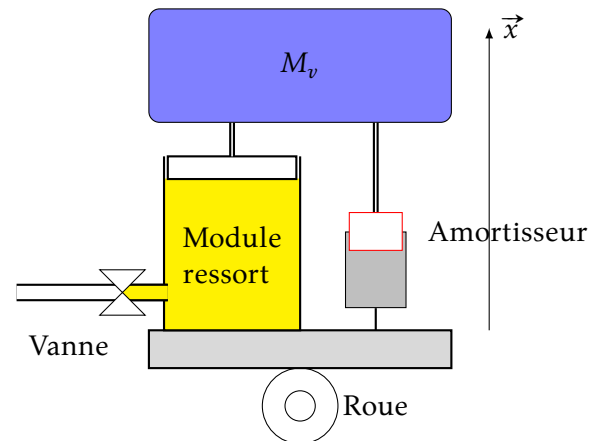


FIGURE 7.38 – Modèle de suspension

## A. Modélisation du ressort

Un piston de section  $S$  comprime de l'air dans un cylindre. On note  $H$  la hauteur variable du volume d'air. Cet air est assimilé à un gaz parfait. Sa pression  $P$ , son volume  $V$  et sa masse  $M_g$  satisfont, pour une température  $T$  que l'on supposera constante, à l'équation :

$$P \cdot V = b_0 \cdot M_g.$$

Dans cette expression  $b_0$  est un coefficient numérique de valeur  $b_0 = 84$ , lorsque  $M_g$  est exprimé en grammes et les autres grandeurs en unités du Système international.

**Q1.** Exprimer en fonction de  $H$  et  $M_g$  l'intensité de la force  $F$  exercée par l'air comprimé sur la face inférieure du piston.

Afin de rendre les équations linéaires, on ne considérera dans tout le problème que de petites variations des variables  $H$  et  $M_g$  autour de leurs valeurs moyennes respectives  $H_0$  et  $M_{g0}$ .

On pose  $H = H_0 + x$  et  $M_g = M_{g0} + m$ .

Sachant que la fonction  $F(H, M_g)$  admet comme développement limité au premier ordre :

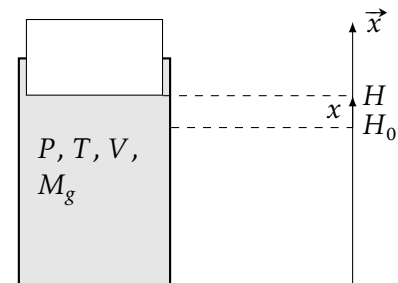


FIGURE 7.39 – Modèle du ressort

$$F(H, M_g) = F(H_0, M_{g0}) + \left[ \frac{\partial F}{\partial H} \right]_{\substack{M_g = M_{g0} \\ H = H_0}} \cdot (H - H_0) + \left[ \frac{\partial F}{\partial M_g} \right]_{\substack{M_g = M_{g0} \\ H = H_0}} \cdot (M_g - M_{g0})$$

**Q2.** Montrez que l'on peut écrire  $F$  sous la forme

$$F = F_0 + b_1 \cdot m - b_2 \cdot x.$$

**Q3.** Application numérique :  $M_0 = 14,3$  g et  $H_0 = 25$  cm.

## B. Étude dynamique du système : masse, ressort, amortisseur

$M_v$  représente la fraction de la masse du véhicule rapportée à une roue. La masse du piston et celle de l'amortisseur sont négligeables devant  $M_v$ .

L'amortisseur introduit une force de frottement visqueux dont la projection sur  $\vec{x}$  a pour mesure algébrique :

$$f = \lambda \cdot \frac{dx}{dt}.$$

On note  $P_a$  la pression atmosphérique qui exerce une force  $F_1$  sur la partie supérieure du piston. On admettra que l'aire de la surface utile de la partie supérieure du piston est égale à la surface intérieure  $S$ .

$$P_a = 10 \times 10^5 \text{ Pa}, g = 10 \text{ m/s}^2, S = 2,8 \times 10^{-2} \text{ m}^2, \lambda = 7 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

**Q4.** En appliquant le théorème de la résultante dynamique à la partie mobile en projection sur  $\vec{x}$  écrire l'équation différentielle du mouvement de cette partie mobile.

**Q5.** Écrire l'équation à l'équilibre, en déduire que  $M_v = 200 \text{ kg}$ .

**Q6.** En déduire que l'équation reliant  $x(t)$  et  $m(t)$  s'écrit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 35 \cdot \frac{dx}{dt} + 96 \cdot x = 1,68 \cdot m.$$

### C. Étude de l'asservissement analogique de la position de la caisse

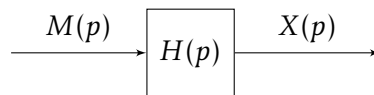
La masse  $M_g$  de gaz enfermé dans le cylindre peut varier autour de  $M_{g0}$  grâce à une électrovanne qui peut soit introduire de l'air soit en retirer.

Un capteur fournissant à chaque instant la valeur de la position  $x(t)$ , celle-ci est comparée à une consigne  $c(t)$ . L'électrovanne ajuste alors la masse  $m$  de façon à ce que même en présence de perturbations,  $x$  diffère le moins possible de  $c$ .

#### C.1. Modélisation du système masse-ressort-amortisseur

Le système masse-ressort-amortisseur étudié au-dessus est un système dont la grandeur d'entrée est  $m = M_g - M_{g0}$ , la grandeur de sortie est  $x = H - H_0$ .

On note  $M(p)$  la transformée de Laplace de  $m(t)$  et  $X(p)$  la transformée de  $x(t)$ .



**Q7.** Établir la fonction de transfert  $T_1(p) = \frac{X(p)}{M(p)}$  du système masse-ressort-amortisseur.

**Q8.** Montrer que cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$T_1(p) = \frac{k_1}{\left(1 + \frac{p}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)}.$$

Déterminer les différents coefficients.

**Q9.** Donner l'allure du diagramme de Bode pour le module de  $T_1(j \cdot \omega)$ .

Le domaine de fréquence que l'asservissement doit traiter ( $f < 5 \text{ Hz}$ ) ainsi que l'étude de la stabilité du montage montrent que l'on peut prendre pour  $T_1(p)$  une expression approchée qui est celle d'un premier ordre

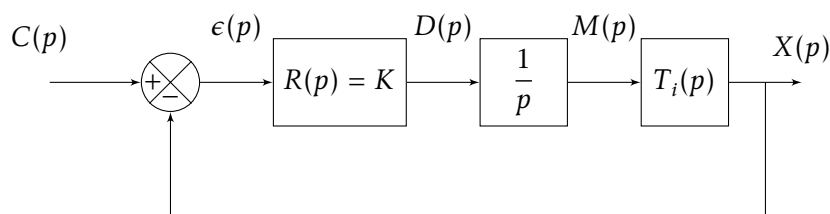
$$T_i(p) = \frac{5,25 \cdot 10^{-2}}{p + 3}.$$

**Q10.** Tracer cette fonction sur le diagramme précédent, que pensez-vous de cette modélisation.

Cette expression sera utilisée dans toute la suite du problème.

#### C.2. Étude du système asservi

Le système asservi de correction d'assiette comportant dans sa chaîne directe l'électrovanne et le système précédent peut être décrit par le schéma fonctionnel ci-dessous.



#### 7.4 Feuille de travaux dirigés n°7

Le débit massique d'air de l'électrovanne,  $d(t)$ , est proportionnel au signal d'erreur  $\epsilon(t)$  :  $d(t) = K \cdot \epsilon(t)$ .

La masse d'air  $m(t)$  et le débit  $d(t)$  sont reliés par la relation :  $d(t) = \frac{dm(t)}{dt}$ .

**Q11.** Écrire la fonction de transfert en boucle ouverte  $T_2(p) = \frac{X(p)}{\epsilon(p)}$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $F_2(p) = \frac{X(p)}{C(p)}$  sous la forme :

$$F_2(p) = \frac{K_f}{1 + 2 \cdot z \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

**Q12.** Calculer  $\omega_0$  et  $K$  pour que le coefficient d'amortissement  $z$  soit égal à 0,5.

Pour la suite du problème on prendra :

$$T_2(p) = \frac{9}{p \cdot (p + 3)}$$

**Q13.** Préciser par la méthode de votre choix si le système est stable.

On suppose pour la suite que le système est stable.

On soumet le système à une entrée échelon  $c(t) = c_0 \cdot u(t)$  avec  $u(t)$  fonction de Heaviside.

**Q14.** Montrer que l'erreur de position  $\epsilon_s$  est nulle.

On soumet maintenant le système à une entrée de type rampe  $c(t) = c_0 \cdot t \cdot u(t)$ .

**Q15.** Déterminer l'erreur de traînage  $\epsilon_t$ .

**Q16.** Que proposez-vous pour réduire cette erreur ?

On souhaite diviser par dix l'erreur de traînage, pour cela on choisit un correcteur à retard de phase

$$R(p) = K_r \frac{1 + T_r \cdot p}{1 + 10 \cdot T_r \cdot p}$$

avec  $T_r = \frac{10}{3}$ .

**Q17.** Déterminer  $K_r$  pour obtenir l'erreur de traînage souhaitée.

**Q18.** Tracer les diagrammes de Bode de la FTBO corrigée et de la FTBO non corrigée.

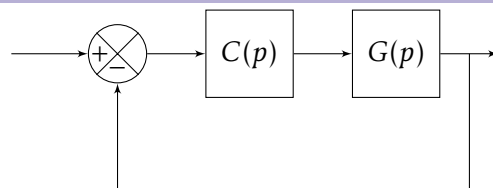
**Q19.** Conclure sur l'intérêt de ce correcteur.

#### Exercice 7 - Correction PID d'un système instable

Corrigé page ??

La mise en équation du système à étudier a permis de déterminer sa fonction de transfert.

$$G(p) = \frac{5}{p^2 + 9 \cdot p - 10}$$



#### A. Étude préliminaire

**Q1.** Justifier que ce système est instable ( $C(p) = 1$ ).

**Q2.** Justifier que l'on ne peut pas utiliser les diagramme de Bode pour régler le système.

**Q3.** Mettre  $G(p)$  sous la forme d'un produit de fonctions.

#### B. Régulation proportionnelle

On choisit dans un premier temps  $C(p) = K$ .

**Q4.** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

**Q5.** Déterminer pour quelles valeur de  $K$  le système peut être rendu stable ?

**Q6.** Déterminer  $K$  pour que la réponse à un échelon de la fonction de transfert en boucle fermée soit apériodique. Pour la suite, on choisira la valeur entière la plus proche.

**Q7.** Déterminer la valeur finale, pour un échelon unitaire. Calculer l'erreur indicielle  $\varepsilon_i$  et le temps de réponse à partir de l'abaque en annexe. Calculer l'erreur de traînage  $\varepsilon_t$  (rampe unitaire).

### C. Régulation PD

On choisit maintenant un correcteur PD  $C(p) = K \cdot (1 + T_d \cdot p)$ .

**Q8.** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte en fonction de  $K$  et  $T_d$ .

On choisit  $T_d$  afin d'annuler le pôle dominant stable de la FTBO.

**Q9.** Déterminer la FTBF puis, pour la valeur de  $K$  précédemment déterminée, calculer l'erreur indicielle  $\varepsilon_i$  et l'erreur de traînage  $\varepsilon_t$ . Quel est l'intérêt principal de ce correcteur ?

**Q10.** Déterminer  $K$  tel que  $|\varepsilon_i| < 5 \% \cdot E_0$ .

**Q11.** Comment doit-on modifier le correcteur pour annuler l'erreur indicielle ?

### D. Correction PID

On choisit maintenant un correcteur PID  $C(p) = K \cdot (1 + T_d \cdot p) \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$  avec  $K = 20$  et

$T_d = 0,1$ .

**Q12.** Déterminer la FTBO puis la FTBF, mettre la FTBF sous forme canonique.

**Q13.** Déterminer  $T_i$  afin que le dénominateur possède deux racines réelles doubles.

**Q14.** Déterminer la réponse temporelle à un échelon unitaire.

**Q15.** Conclure.