Chapitre 1 Cinétique

1.1 Masse et inertie

1.1.1 Notions d'inertie

Nous savons, par expérience, qu'il est plus « difficile » d'accélérer un camion qu'une moto comme il est plus « difficile » de le freiner. L'inertie caractérise la résistance qu'oppose un corps par sa nature propre à une variation de mouvement.
Pour un mouvement de translation, la masse suffit pour définir cette quantité, par contre pour un mouvement de rotation, il est nécessaire de préciser la répartition de cette masse.
La cinétique est l'étude des caractéristiques d'inertie d'un solide.

1.1.2 Masse - Rappels

La masse caractérise la quantité de matière, c'est une grandeur complètement additive.
Soit, Σ_1 ,Σ_2 deux systèmes matériels disjoints alors :

$$m\left(\Sigma_1 \cup \Sigma_2\right) = m\left(\Sigma_1\right) + m\left(\Sigma_2\right)$$

avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \phi$.
La masse m_Σ de l'ensemble Σ est définie par :

$$m_\Sigma = \int_\Sigma dm = \int_\Sigma \rho(P)\, dv$$

avec $\rho(P)$ masse volumique au point P et dv un élément de volume.

Remarque :

- Si le système matériel est assimilable à un volume, on parle de masse volumique $\rho(P)$ au point P : $dm = \rho(P)dv$.
- Si le système matériel est assimilable à une surface on parle de masse surfacique $\sigma(P)$ au point P : $dm = \sigma(P)ds$.
- Si le système matériel est assimilable à une ligne, on parle de masse linéique $\lambda(P)$ au point P : $dm = \lambda(P)dl$.

Conservation de la masse

On admet en mécanique classique que la masse est une grandeur indépendante du temps, ainsi pour deux instants t_1 et t_2 quelconques :

$$m\left(\Sigma, t_1\right) = m\left(\Sigma, t_2\right).$$

On en déduit une relation importante :

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{f(P,t)}\, dm\right]_R = \int_{P\in\Sigma} \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{f(P,t)}\right]_R dm.$$

qui permet d'inverser la dérivation par rapport au temps et l'intégration par rapport à la masse.

1.1.3 Centre d'inertie

a) Définition

On appelle centre d'inertie du système matériel Σ , le point G défini par :

$$\int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{GP}\, dm = \vec{0}.$$

En faisant intervenir le point O, la relation devient

$$\int_\Sigma \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}\right) dm = \int_\Sigma \overrightarrow{GO}\, dm + \int_\Sigma \overrightarrow{OP}\, dm = \vec{0}$$

avec $m_\Sigma \cdot \overrightarrow{OG} = \int_\Sigma \overrightarrow{OP}\, dm$ et finalement

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_\Sigma} \int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{OP}\, dm$$

Dans un repère cartésien, on note (x_G, y_G, z_G) les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ et (x, y, z) les coordonnées de $\overrightarrow{OP}$, on peut donc écrire :

$$x_G = \frac{1}{m_\Sigma} \int_\Sigma x \cdot dm, \quad y_G = \frac{1}{m_\Sigma} \int_\Sigma y \cdot dm, \quad z_G = \frac{1}{m_\Sigma} \int_\Sigma z \cdot dm.$$

Remarques :

- Si le système matériel est un solide indéformable, le centre d'inertie est un point fixe du solide.
- Si le système matériel possède un élément de symétrie matérielle, plan ou axe de symétrie, aussi bien du point de vue géométrique que du point de vue de la répartition des masses, le centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie.
- Le centre d'inertie est confondu avec centre de gravité dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme.

b) Centre d'inertie d'un ensemble de corps

Un ensemble matériel Σ est composé de n sous-ensembles matériels Σ_i. À chaque sous-ensemble Σ_i est associé sa masse m_i et son centre d'inertie G_i, alors

$$\overrightarrow{OG_\Sigma} = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}.$$

Le centre d'inertie d'un ensemble de corps est le barycentre des centres d'inertie.

Si les corps sont des solides indéformables immobiles les uns par rapport aux autres, le centre d'inertie de l'ensemble est fixe dans un repère lié à cet ensemble.

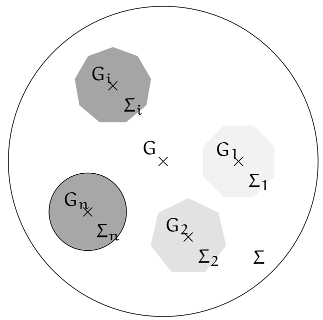


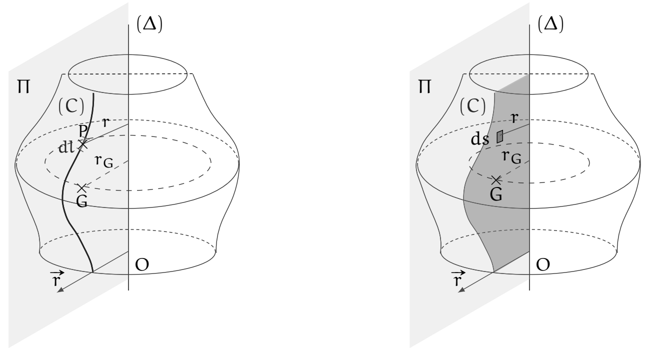
Figure 1.1 – Centre d'inertie d'un ensemble de corps

c) Théorèmes de Guldin

Énoncé (Centre d'inertie d'une courbe plane) *Soient* (C) *une courbe du plan* (Π) *et* (Δ) *une droite du plan ne coupant pas* (C). *L'aire de la surface engendrée par la rotation de la courbe* (C) *autour de la droite* (Δ) *est égale au produit de la longueur de la courbe* L *par le périmètre décrit par son centre d'inertie* $2\pi \cdot r_G$.

$$S = 2\pi \cdot r_G \cdot L$$

On associe à la courbe (C) une masse linéique λ constante, $dm = \lambda \cdot dl$ d'où la masse totale de la courbe $m_c = \lambda \cdot L$.



(a) Centre d'inertie d'une courbe plane

(b) Centre d'inertie d'une surface plane

FIGURE 1.2 – Théorèmes de Guldin

La position du centre d'inertie de la courbe est calculée par la relation générale :

$$m_c \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} \cdot \ dm$$

Ici cette relation devient :

$$\lambda \cdot L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} \cdot \lambda \cdot \ dl.$$

Après simplification puis en ne prenant que la projection suivant $\vec{r}$:

$$L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP}\, dl \Rightarrow \quad L \cdot r_G = \int_C r\, dl$$

Calculons maintenant la surface engendrée par la rotation de la courbe

$$S = \int_S r \cdot d\theta \cdot \ dl = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_C r \cdot \ dl = 2\pi \int_C r \cdot \ dl$$

En substituant $\int_C r \cdot \ dl = L \cdot r_G$ dans cette égalité on retrouve bien le résultat cherché.

Énoncé (Centre d'inertie d'une surface plane homogène) *Soient* (S) *une surface du plan* (Π) *et* (Δ) *une droite du plan ne coupant pas* (S).

Le volume engendré par la rotation de la surface plane tournant autour de l'axe (Δ) *est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre décrit par son centre d'inertie.*

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S$$

On démontre cette égalité comme la précédente. On associe à (S) une masse surfacique $dm = \sigma \cdot ds$ constante et $m_S = \sigma \cdot S$.

Par définition :

$$m_S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} \cdot \ dm \Rightarrow S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} \cdot ds$$

soit en projection suivant $\vec{r}$

$$S \cdot r_G = \int_S r \cdot ds$$

Le volume engendré par la rotation de la surface (S) s'écrit :

$$V = \int_v r \cdot d\theta \cdot ds = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_S r \cdot ds = 2\pi \int_S r \cdot ds$$

d'où la relation cherchée :

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S.$$

Remarque : L'utilisation des théorèmes de Guldin permet de simplifier le calcul de position du centre d'inertie dans la mesure où l'on connaît les caractéristiques du volume et de la surface balayée.

1.2 Moments d'inertie

La masse ne suffit pour caractériser l'inertie que dans le cas d'un mouvement de translation. Pour un mouvement de rotation ou un mouvement plus complexe, il faut prendre en compte la répartition de cette masse sur le solide. Les moments et produits d'inertie caractérisent cette répartition.

1.2.1 Moment d'inertie par rapport à un point

On appelle moment d'inertie du solide S par rapport à un point A la quantité positive :

$$I_A(S) = \int_S \overrightarrow{AP}^2\, dm \qquad [kg \cdot m^2]$$

1.2.2 Moment d'inertie par rapport à une droite

On appelle moment d'inertie du solide S par rapport à une droite (Δ) la quantité positive

$$I_\Delta(S) = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \ dm \qquad [kg \cdot m^2]$$

En faisant intervenir le point H, projection de P sur la droite (Δ) on déduit :

$$I_\Delta(S) = \int_S \overrightarrow{HP}^2\, dm = \int_S d_P^2 \cdot \ dm$$

avec d_P distance du point P à la droite(Δ).

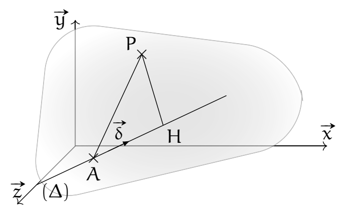


FIGURE 1.3 – Moment d'inertie par rapport à une droite

Le moment d'inertie par rapport à une droite est le même en tout point de la droite.

1.2.3 Rayon de giration

Le moment d'inertie étant homogène au produit d'une masse par une distance au carré, il est toujours possible d'écrire le moment d'inertie autour d'un axe d'un solide quelconque sous la forme :

$$I = M \cdot R_g^2$$

avec M la masse du solide et R_g le rayon de giration.

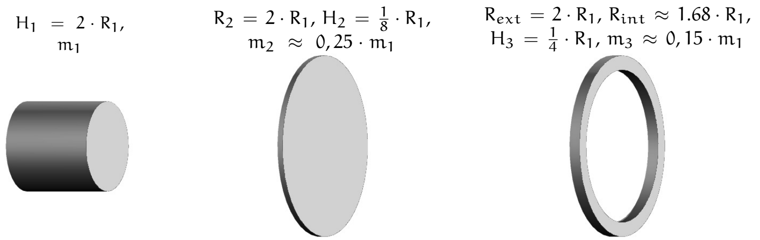


Figure 1.4 – Rayon de giration

Le rayon de giration précise la répartition des masses autour de l'axe considéré, ainsi les trois solides de la figure 1.4 ont le même moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation alors que les masses sont dans un rapport dans un rapport de 1 à 7.

1.2.4 Moments d'inertie dans un repère cartésien

Soit un repère R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, un point P de coordonnées x, y, z dans R. Déterminons les différents moments d'inertie dans ce repère.

Moment d'inertie du solide S par rapport au point O dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$\begin{aligned} I_O(S) &= \int_S \overrightarrow{OP}^2 \, dm \text{ soit} \\ &= \int_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \, dm \end{aligned}$$

Moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$

$$I_{(O,\vec{x})}(S) = \int_S \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 \, dm = \int_S (\vec{x} \wedge (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}))^2 \cdot dm$$

$$I_{(O,\vec{x})}(S) = \int_S \left(y^2 + z^2\right) \cdot dm$$

Par analogie, on peut écrire :

$I_{(O,\vec{x})} = \int_S \left(y^2 + z^2\right) \cdot dm$, moment d'inertie du solide par rapport à $(O, \vec{x})$;

$I_{(O,\vec{y})} = \int_S \left(z^2 + x^2\right) \cdot dm$, moment d'inertie du solide par rapport à $(O, \vec{y})$;

$I_{(O,\vec{z})} = \int_S \left(x^2 + y^2\right) \cdot dm$, moment d'inertie du solide par rapport à $(O, \vec{z})$.

Par extension on définit aussi :

$I_{(O\vec{x}\vec{y})} = \int_S z^2 \cdot dm$, moment d'inertie du solide par rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$;

$I_{(O\vec{y}\vec{z})} = \int_S x^2 \cdot dm$, moment d'inertie du solide par rapport au plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$;

$I_{(O\vec{z}\vec{x})} = \int_S y^2 \cdot dm$, moment d'inertie du solide par rapport au plan $(O, \vec{z}, \vec{z})$.

1.2.5 Relations entre les moments d'inertie

- $I_O = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})} + I_{(O\vec{z}\vec{x})} = \frac{1}{2}\left(I_{(O,\vec{x})} + I_{(O,\vec{y})} + I_{(O,\vec{z})}\right)$
- $I_{(O,\vec{x})} = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{z}\vec{x})}$
- $I_{(O,\vec{y})} = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})}$
- $I_{(O,\vec{z})} = I_{(O\vec{z}\vec{x})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})}$

1.2.6 Théorème de Huygens

Soit un solide S de centre d'inertie G et de masse m (figure 1.5).

- (Δ_1), une droite passant par A de vecteur unitaire $\vec{\delta}$;
- (Δ_2), une droite parallèle passant par G ;
- d, la distance entre les deux droites.

On note :

- $I_{(A,\vec{\delta})} = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \, dm$, le moment d'inertie par rapport à (Δ_1)
- $I_{(G,\vec{\delta})} = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{GP}\right)^2 \, dm$, le moment d'inertie par rapport à (Δ_2)
- H la projection du point P du solide S sur (Δ_1)
- K la projection sur (Δ_2).

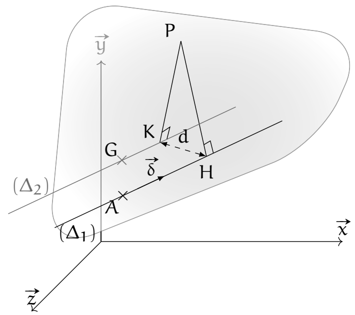


Figure 1.5 – Théorème de Huygens

Nous savons que

$$I_{(A,\vec{\delta})} = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \, dm = \int_S \overrightarrow{HP}^2 \, dm = \int_S \left(\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KP}\right)^2 \, dm$$

$$I_{(A,\vec{\delta})} = \int_S \overrightarrow{HK}^2 \, dm + \int_S 2\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KP} \, dm + \int_S \overrightarrow{KP}^2 \, dm$$

Le premier terme s'écrit : $\int_S \overrightarrow{HK}^2 \, dm = m \cdot d^2$ et on reconnaît le troisième : $\int_S \overrightarrow{KP}^2 \, dm = I_{(G,\vec{\delta})}$

Il ne reste plus qu'à déterminer le dernier : $\int_S 2\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KP} \, dm = 2\overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{KP} \, dm$ en faisant intervenir le centre d'inertie G

$$\begin{aligned} \int_S 2\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KP} \, dm &= 2 \cdot \overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GP} \, dm \\ &= 2 \cdot \overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{KG} \, dm + 2 \cdot \overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{GP} \, dm \end{aligned}$$

Par construction :
$\overrightarrow{HK} \perp \overrightarrow{KG} \Rightarrow 2 \cdot \overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{KG}\, dm = 0$ et par définition du centre d'inertie : $\int_S \overrightarrow{GP}\, dm = 0$.
Finalement, on déduit la relation : $I_{(A,\vec{\delta})} = I_{(G,\vec{\delta})} + m \cdot d^2$.

Énoncé (Théorème de Huygens) *Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $\left(A, \vec{\delta}\right)$ est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe $\left(G, \vec{\delta}\right)$, parallèle et passant par le centre d'inertie du solide, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance séparant les deux axes.*

$$I_{(A,\vec{\delta})} = I_{(G,\vec{\delta})} + m \cdot d^2$$

Énoncé (Corollaire) *De tous les axes parallèles à une direction donnée, celui par rapport auquel le moment d'inertie est minimum est l'axe passant par G.*

Relation entre les moments d'inertie par rapport à deux droites parallèles

On se propose de déterminer une relation entre les moments d'inertie par rapport à deux droites parallèles quelconques $I_{(A,\vec{\delta})}(S)$ et $I_{(B,\vec{\delta})}(S)$ d'un solide S (figure 1.6).

$$I_{(A,\vec{\delta})}(S) = I_{(G,\vec{\delta})}(S) + m \cdot d_A^2$$
$$I_{(B,\vec{\delta})}(S) = I_{(G,\vec{\delta})}(S) + m \cdot d_B^2$$

D'où la relation entre les moments d'inertie

$$I_{(A,\vec{\delta})}(S) - I_{(B,\vec{\delta})}(S) = m \cdot d_A^2 - m \cdot d_B^2$$

avec d_A et d_B respectivement distance entre les droites Δ_A, Δ_B et Δ_G.

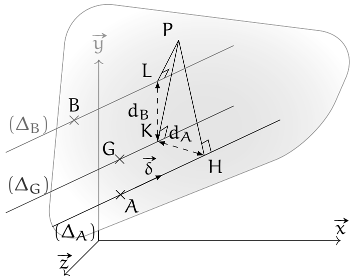


Figure 1.6 – Relation entre les moments d'inertie

1.2.7 Produits d'inertie

Les produits d'inertie caractérisent l'absence de symétrie dans la répartition des masses.
La détermination des produits d'inertie sera déduite du calcul de l'opérateur d'inertie dans le chapitre suivant.

1.3 Opérateur d'inertie

1.3.1 Opérateur d'inertie en un point

L'opérateur d'inertie synthétise l'ensemble des caractéristiques d'inertie du solide. Cet opérateur est une fonction linéaire et peut être représenté par une matrice.

a) Définition

On appelle opérateur d'inertie $\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}}$ au point O d'un solide S l'opérateur qui à tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace associe le vecteur

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right) dm.$$

b) Matrice d'inertie

Soit
— $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, un repère, et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base ;
— P, un point du solide S, avec $\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$;
— $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} + \gamma \cdot \vec{z}$, un vecteur.

Déterminons $\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) = \\
&(x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}) \wedge ((\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} + \gamma \cdot \vec{z}) \wedge (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z})) = \\
&\left(+\alpha \cdot (y^2+z^2) \quad -\beta \cdot x \cdot y \quad -\gamma \cdot x \cdot z\right)\vec{x} \\
&+\left(-\alpha \cdot x \cdot y \quad +\beta \cdot (z^2+x^2) \quad -\gamma \cdot y \cdot z\right)\vec{y} \\
&+\left(-\alpha \cdot x \cdot z \quad -\beta \cdot y \cdot z \quad +\gamma \cdot (x^2+y^2)\right)\vec{z}
\end{aligned}$$

En intégrant sur le solide S :

$$\begin{aligned}
&\int_{P\in S} \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \cdot dm = \\
&\left(+\alpha \cdot \int_{P\in S} \left(y^2+z^2\right) \cdot dm \quad -\beta \cdot \int_{P\in S} x \cdot y \cdot dm \quad -\gamma \cdot \int_{P\in S} x \cdot z \cdot dm\right)\vec{x} \\
&+\left(-\alpha \cdot \int_{P\in S} x \cdot y \cdot dm \quad +\beta \cdot \int_{P\in S} \left(z^2+x^2\right) \cdot dm \quad -\gamma \cdot \int_{P\in S} y \cdot z \cdot dm\right)\vec{y} \\
&+\left(-\alpha \cdot \int_{P\in S} x \cdot z \cdot dm \quad -\beta \cdot \int_{P\in S} y \cdot z \cdot dm \quad +\gamma \cdot \int_{P\in S} \left(x^2+y^2\right) \cdot dm\right)\vec{z}
\end{aligned}$$

On peut mettre ce résultat sous la forme du produit d'une matrice et du vecteur $\vec{u}$

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} +\int_{P\in S} \left(y^2+z^2\right) \cdot dm & -\int_{P\in S} x \cdot y \cdot dm & -\int_{P\in S} x \cdot z \cdot dm \\ -\int_{P\in S} x \cdot y \cdot dm & +\int_{P\in S} \left(z^2+x^2\right) \cdot dm & -\int_{P\in S} y \cdot z \cdot dm \\ -\int_{P\in S} x \cdot z \cdot dm & -\int_{P\in S} y \cdot z \cdot dm & +\int_{P\in S} \left(x^2+y^2\right) dm \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Cette matrice est caractéristique de la répartition de la matière d'un solide autour d'un point (ici O) et dans une base donnée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Par convention, on pose

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}} \quad \text{ou} \quad \overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} I_{(O,\vec{x})} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{(O,\vec{y})} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{(O,\vec{z})} \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

On reconnaît sur la diagonale de la matrice

$A = I_{(O,\vec{x})} = \int_{P\in S} \left(y^2+z^2\right) \cdot dm$, le moment d'inertie du solide S autour de l'axe $(O, \vec{x})$;

$B = I_{(O,\vec{y})} = \int\limits_{P\in S} (z^2 + x^2) \cdot \ dm$, le moment d'inertie du solide S autour de l'axe $(O, \vec{y})$;

$C = I_{(O,\vec{z})} = \int\limits_{P\in S} (x^2 + y^2) \cdot \ dm$, le moment d'inertie du solide S autour de l'axe $(O, \vec{z})$.

Par convention on pose

$F = P_{xy} = \int\limits_{P\in S} x \cdot y \cdot \ dm$, le produit d'inertie par rapport plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$;

$E = P_{xz} = \int\limits_{P\in S} x \cdot z \cdot \ dm$, le produit d'inertie par rapport plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$;

$D = P_{yz} = \int\limits_{P\in S} y \cdot z \cdot \ dm$, le produit d'inertie par rapport plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$.

Remarques :

— Une matrice d'inertie dépend de la base et du point de calcul, il est donc important de préciser ces données.

— La matrice d'inertie est une matrice symétrique.

— On nomme aussi cette matrice tenseur d'inertie.

c) Détermination du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

Par définition le moment d'inertie autour de l'axe $\Delta = \left(O, \vec{\delta}\right)$ s'écrit

$$I_\Delta(S) = \int_{P\in S} \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 \ dm.$$

Décomposons le calcul du moment d'inertie

$$I_\Delta(S) = \int_{P\in S} \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 \ dm = \int_{P\in S} \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \cdot \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \ dm.$$

Le terme sous l'intégrale peut être considéré comme le produit mixte des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

avec $\vec{u} = \vec{\delta}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ et $\vec{w} = \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right)$.

En permutant les termes du produit mixte on ne change pas le résultat :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$

soit ici

$$\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP} \cdot \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \cdot \vec{\delta}$$

Le moment d'inertie s'écrit donc :

$$I_\Delta(S) = \vec{\delta} \cdot \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right) \ dm$$

On reconnaît, sous l'intégrale, l'opérateur d'inertie au point O du solide S.

Pour déterminer le moment d'inertie du solide S autour de l'axe Δ , il suffit d'effectuer le produit scalaire du vecteur unitaire $\vec{\delta}$ avec $\overline{\overline{\mathcal{I}_O(\delta)}} \cdot \vec{\delta}$.

$$I_\Delta(S) = \vec{\delta} \cdot \left(\overline{\overline{\mathcal{I}_O(\delta)}} \cdot \vec{\delta}\right)$$

Si on pose $\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\substack{O\\ \mathcal{B}}}$ et $\vec{\delta} = (\alpha, \beta, \gamma)$ dans la base $\mathcal{B}$ alors

$$I_\Delta(S) = (\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\substack{O\\ \mathcal{B}}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

d) Changement de point, théorème de Huygens généralisé

Soit B la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On recherche la relation entre la matrice d'inertie en A du solide S et la matrice d'inertie en G le centre d'inertie du solide.

Par définition, l'opérateur d'inertie du solide S au point A dans la base B s'écrit :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right)\right) dm$$

De même l'opérateur d'inertie du solide S au point G dans la base B s'écrit :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right)\right) dm$$

En décomposant le premier :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} \left(\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}\right) \wedge \left(\vec{u} \wedge \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}\right)\right)\right) dm$$

puis en développant

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right)\right) dm + \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right)\right) dm$$
$$+ \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right)\right) dm + \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right)\right) dm$$

Les deuxièmes et troisièmes termes de cette somme sont nuls (par définition du centre d'inertie $\int_{P\in S} \overrightarrow{GP} \, dm = \vec{0}$) :

$$\int_{P\in S} \left(\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right)\right) dm = \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \int_{P\in S} \overrightarrow{GP} \, dm\right) = \vec{0}$$
$$\int_{P\in S} \left(\overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right)\right) dm = \left(\int_{P\in S} \overrightarrow{GP} \, dm\right) \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right) = \vec{0}.$$

L'égalité devient :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right)\right) dm + \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right)\right) dm$$

On reconnaît dans le second terme l'opérateur d'inertie en G :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}\right)\right) dm.$$

Il reste à déterminer le premier terme :
Les termes sous l'intégrale ne dépendent pas de la masse (variable d'intégration)

$$\int_{P\in S}\left(\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)\right)\,dm = m\left(\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)\right)$$

D'où le théorème de Huygens généralisé

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}\cdot\vec{u} = \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}}\cdot\vec{u} + m\left(\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)\right)$$

Déterminons $\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)$ en fonction des coordonnées des deux vecteurs

$$\vec{u} = (\alpha,\beta,\gamma) \quad \text{et}\ \overrightarrow{AG} = (a,b,c)\,.$$

Un calcul analogue a déjà été réalisé lors de la détermination de la matrice d'inertie page 8, d'où dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right) = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a\cdot b & -a\cdot c \\ -a\cdot b & a^2+c^2 & -b\cdot c \\ -a\cdot c & -b\cdot c & a^2+b^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}\cdot\vec{u} = \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}}\cdot\vec{u} + m\cdot\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a\cdot b & -a\cdot c \\ -a\cdot b & a^2+c^2 & -b\cdot c \\ -a\cdot c & -b\cdot c & a^2+b^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

On pose pour les matrices d'inertie en A et G :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} = \begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{G,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On déduit, dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, la relation entre ces matrices :

$$\begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_G + m\cdot\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a\cdot b & -a\cdot c \\ -a\cdot b & a^2+c^2 & -b\cdot c \\ -a\cdot c & -b\cdot c & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} A_A = A_G + m\cdot(b^2+c^2) \\ B_A = B_G + m\cdot(a^2+c^2) \\ C_A = C_G + m\cdot(a^2+b^2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D_A = D_G + m\cdot b\cdot c \\ E_A = E_G + m\cdot a\cdot c \\ F_A = F_G + m\cdot a\cdot b \end{cases}$$

On retrouve sur la diagonale le théorème de Huygens pour chacun des axes du repère.

e) Changement de base

Connaissant la matrice d'inertie du solide S en un point A dans la base B_1, on se propose de déterminer cette matrice en ce même point dans la base B_2.

Remarque : Nous rappelons ici uniquement les principes, pour le reste reportez-vous à un cours de mathématiques.

Matrice de passage : On appelle P_{B_1,B_2}, la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2 cette matrice est constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B_2 écrits dans la base d'origine B_1. On l'appelle aussi matrice de changement de base, cette matrice est une matrice inversible.

Changements de base : Soit $\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_1}$ et $\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_2}$ les matrices d'inertie d'un solide S respectivement dans la base B_1 et la base B_2, et P_{B_1,B_2} la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2, on a alors :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_2} = P^{-1}_{B_1,B_2}\cdot\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_1}\cdot P_{B_1,B_2}$$

Avec $P^{-1}_{B_1,B_2}$ la matrice inverse de P_{B_1,B_2}.

1.3.2 Propriétés et directions principales de la matrice d'inertie

La matrice d'inertie est une matrice symétrique, une simple étude mathématique de la matrice d'inertie nous permet de dire que :

- les valeurs propres de la matrice sont réelles ;
- il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice est diagonale.

a) Axes principaux d'inertie, base principale d'inertie

Il existe pour tout point A une base orthogonale de vecteurs propres $\mathcal{B}' = \left(\vec{x}',\vec{y}',\vec{z}'\right)$. Dans cette base la matrice d'inertie du solide S au point A est une matrice diagonale :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix}_{A,\mathcal{B}'}.$$

Cette base est appelée base principale d'inertie au point A. Les axes $\left(A,\vec{x}'\right)$, $\left(A,\vec{y}'\right)$ et $\left(A,\vec{z}'\right)$ sont les axes principaux d'inertie et A', B' et C' les moments principaux d'inertie.

Remarques :

- Pour tous les solides présentant des symétries dans la répartition des masses, il est facile de déterminer les axes principaux en s'appuyant sur ces symétries.
- Si le point d'écriture est le centre d'inertie, on parle alors de **base centrale** et de **moments centraux d'inertie**.
- Les moments centraux d'inertie sont minima.

Nous allons vérifier que les particularités géométriques dans la répartition des masses (symétrie, axe de révolution) se retrouvent dans la forme de la matrice d'inertie.

b) Solide avec un plan de symétrie

Lorsque le solide possède un plan de symétrie, les produits d'inertie comportant la normale au plan de symétrie sont nuls.

Le solide S de la figure 1.7 possède un plan de symétrie $(O,\vec{x},\vec{y})$, l'axe $(O,\vec{z})$ est normal à ce plan. Il semble judicieux ici de déterminer la matrice d'inertie de ce solide en un point du plan de symétrie.

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} I_{Ox} & P_{xy} & 0 \\ P_{xy} & I_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

Vérifions que les produits d'inertie, P_{xz} et P_{yz} dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont nuls.

$$E = P_{xz} = \int_{P \in S} x \cdot z \cdot \, dm$$

$$D = P_{yz} = \int_{P \in S} y \cdot z \cdot \, dm$$

En décomposant l'intégration sur les deux demi-solides symétriques S_1 et S_2 :

$$E = P_{xz} = \int_{P \in S_1} x \cdot z \cdot \, dm + \int_{P \in S_2} x \cdot z \cdot \, dm$$

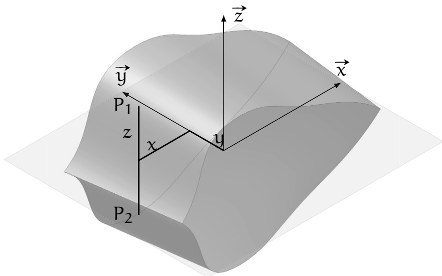


Figure 1.7 – Solide avec 1 plan de symétrie

Le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ est plan de symétrie. On effectue le changement de variable $z \to -z$ pour calculer la deuxième intégrale. Compte tenu du plan de symétrie, les bornes d'intégration changent $P \in S_2 \to P \in S_1$ d'où :

$$\int_{P \in S_2} x \cdot z \cdot \, dm = -\int_{P \in S_1} x \cdot z \cdot \, dm \Rightarrow E = P_{xz} = 0$$

On constate donc que $E = 0$ et on démontre de même $D = 0$.

La matrice d'inertie du solide S au point O dans la base $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec $\vec{z}$ la normale au plan de symétrie devient :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} I_{Ox} & P_{xy} & 0 \\ P_{xy} & I_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

Si le solide possède un plan de symétrie, alors la matrice d'inertie, écrite en un point de ce plan et dans une base dont un vecteur est la normale au plan, comporte deux produits d'inertie nuls. Les deux produits d'inertie nuls sont ceux contenant la normale au plan.

c) Solide avec deux plans de symétrie

Si un solide possède deux plans de symétrie, en choisissant d'écrire la matrice d'inertie en un point O de la droite d'intersection des deux plans et dans une base $\mathcal{B}$ respectant cette symétrie, alors les trois produits d'inerties sont nuls.

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} I_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

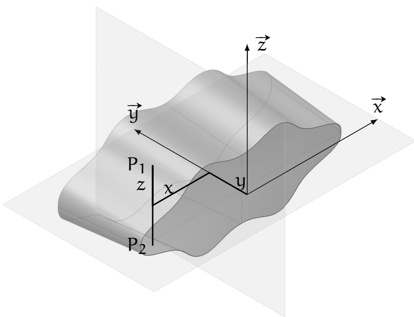


Figure 1.8 – Solide avec 2 plans de symétrie

d) Solide avec une symétrie de révolution

Si l'axe $(O, \vec{z})$ est un axe de révolution matérielle, le solide possède alors une infinité de plans de symétrie orthogonaux. Les produits d'inertie sont donc tous nuls et la matrice est diagonale dans toute base contenant l'axe de révolution et en tout point de cet axe. La matrice d'un solide de révolution exprimée en un point O de son axe de révolution et dans une base respectant cette symétrie s'écrit :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

Compte tenu de la symétrie de révolution les moments d'inertie par rapport aux $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$ sont égaux.

$$A = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) \cdot \, dm = B = \int_{P \in S} (x^2 + z^2) \cdot \, dm$$

$$C = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) \cdot \, dm = 2 \cdot A - 2 \cdot \int_{P \in S} z^2 \cdot \, dm$$

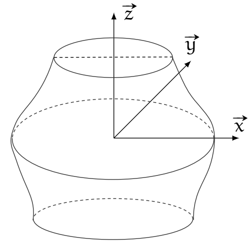


Figure 1.9 – Solide de révolution

e) Solide plan d'épaisseur négligeable

On se place sur un point O du plan avec $(O, \vec{z})$ la normale au plan. L'intégration suivant la direction de la normale au plan est nulle (les bornes d'intégration sont nulles).

Finalement la matrice s'écrit en un point O du plan et dans une base $\mathcal{B}$ contenant la normale à celui-ci :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

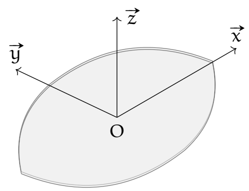


Figure 1.10 – Solide d'épaisseur négligeable

$$A = \int_{P \in S} y^2 + z^2 \, dm = \int_{P \in S} y^2 \, dm$$

$$B = \int_{P \in S} x^2 + z^2 \, dm = \int_{P \in S} x^2 \, dm \qquad D = \int_{P \in S} y \cdot z \cdot \, dm = 0$$

$$C = \int_{P \in S} x^2 + y^2 \, dm = A + B \qquad E = \int_{P \in S} x \cdot z \cdot \, dm = 0$$

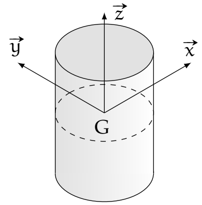
f) Disque plan d'épaisseur négligeable

Pour un disque plan, en O centre du disque et dans une base $\mathcal{B}$ telle que $\vec{z}$ est la normale au plan :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot A \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

1.3.3 Matrices d'inertie de quelques solides élémentaires

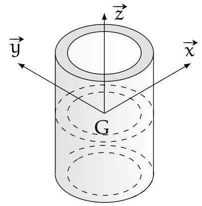
— **Cylindre** d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} m\cdot\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\dfrac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$

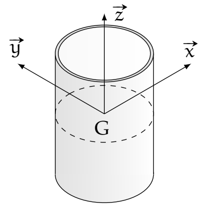
— **Tube** d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon extérieur R_e, de rayon intérieur R_i et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} m\left(\dfrac{R_e^2+R_i^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\dfrac{R_e^2+R_i^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\dfrac{R_e^2+R_i^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

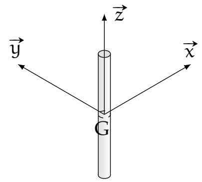
— **Tube** d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H et d'épaisseur négligeable



$$\begin{pmatrix} m\cdot\left(\dfrac{R^2}{2}+\dfrac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\left(\dfrac{R^2}{2}+\dfrac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

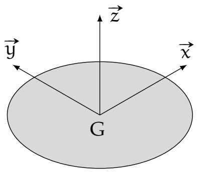
— **Tige** cylindrique $(G, \vec{z})$ de rayon négligeable



$$\begin{pmatrix} m\cdot\dfrac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\dfrac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

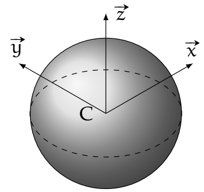
— **Disque** d'axe $(G, \vec{z})$ d'épaisseur négligeable



$$\begin{pmatrix} m\cdot\dfrac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\dfrac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\dfrac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

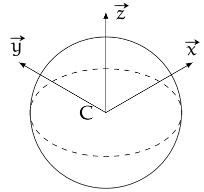
— **Sphère pleine** de centre C



$$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{5}m\cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{5}m\cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{5}m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{\forall\mathcal{B}}^{C}$$

en C dans toute base

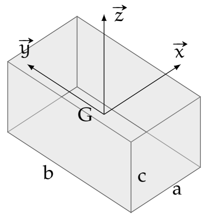
— **Sphère creuse** de centre C



$$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}m\cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{3}m\cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{3}m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{\forall\mathcal{B}}^{C}$$

en C dans toute base

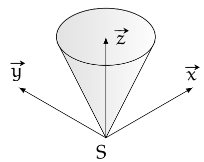
— **Parallélépipède** de côtés a, b et c



$$\begin{pmatrix} m\cdot\dfrac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\dfrac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\dfrac{a^2+b^2}{12} \end{pmatrix}_{\forall\mathcal{B}}^{C}$$

en G dans la base parallèle aux arêtes du parallélépipède

— **Cône** $(S, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} \dfrac{3\cdot m}{5}\cdot\left(\dfrac{R^2}{4}+H^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3\cdot m}{5}\cdot\left(\dfrac{R^2}{4}+H^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{3\cdot m}{5}\dfrac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{S}$$

en S dans toute base contenant $\vec{z}$.