

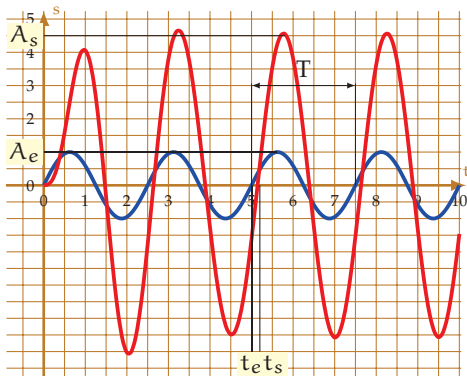
6.11 Corrigés n°6

Cor. 1 : Identification fréquentielle

Sujet page 20

Q1. Pour reconstruire à partir de ces relevés, les diagrammes de Bode il suffit de relever pour chaque essai, lors du régime permanent :

- l'amplitude du signal d'entrée ($A_e(\omega)$) et du signal de sortie ($A_s(\omega)$), le rapport $\frac{A_s}{A_e} = G(\omega)$ nous donne le gain pour la pulsation ω de la fonction de transfert que l'on convertit ensuite en dB $G_{dB} = 20 \log G$
- l'écart temporel entre le signal d'entrée et le signal de sortie (il est judicieux de mesurer cet écart à l'intersection avec l'axe des abscisses). De cet écart, connaissant la période (T) on déduit le déphasage entre les deux signaux. $\Phi = \frac{t_s - t_e}{T} \cdot 2\pi$ en radian ou $\Phi = \frac{t_s - t_e}{T} \cdot 360$ en °.



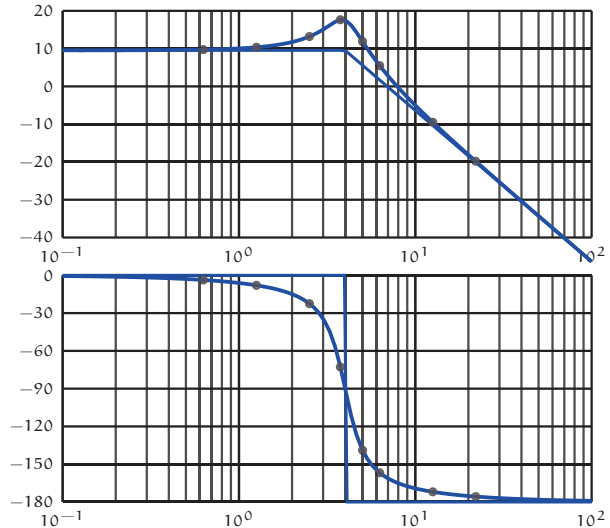
f	ω	A_s	G	G_{dB}	T	t_s	Φ [°]
0,2	1,256	3,3	3,3	10	5	5,1	-7,2
0,4	2,51	4,6	4,6	13	2,5	5,15	-21,6
0,6	3,76	7,8	7,8	17	1,6	5,3	-64,8
0,8	5	3,9	3,9	11	1,25	5,5	-144
1	6,3	1,9	1,9	5	1	5,45	-162
2	12,56	0,35	0,35	-9	0,5	5,25	-180

À l'aide de ce tableau on trace point par point le diagramme de Bode ci-dessous.

Q2. On constate que :

- lorsque la pulsation tend vers 0
 - le gain (en dB) tend vers 9,5 dB,
 - le déphasage tend vers -0° ;
- lorsque la pulsation tend vers $+\infty$;

- le gain présente une asymptote de -20 dB,
- le déphasage tend vers -180° ;
- la courbe d'amplitude présente un maximum.



On peut donc modéliser le système par une fonction de transfert du 2nd ordre avec un coefficient d'amortissement z inférieur à 0,7; $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$.

On détermine les coefficients :

K : à partir de l'asymptote horizontale $20 \log K = 9,5 \Rightarrow K = 3$;

z : à partir du coefficient de surtension $Q = \frac{1}{2 \cdot z \sqrt{1 - z^2}}$

avec ici

$$Q_{dB} = 17 - 19,5 = 7,5 \text{ dB on déduit } z \approx 0,2$$

ω_n : $\omega_n = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit en :

- cherchant l'intersection des deux asymptotes du diagramme d'amplitude,
- cherchant graphiquement la pulsation pour laquelle le déphasage est de -90° ,
- par calcul à partir de la pulsation de résonance $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2z^2}$.

Cor. 2 : Automate d'exploration de l'hémostase

Sujet page 21

Q1. À partir de l'équation, déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)}$.

$$H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)} = \frac{1}{\frac{7}{5} m \cdot (R - r) \cdot p^2 + f_v \cdot (R - r) \cdot p + m \cdot g}$$

$$\frac{7}{5} m(R - r)p^2\Theta(p) + f_v(R - r)p\Theta(p) + mg\Theta(p) = F(p)$$

Q2. Mettre $H(p)$ sous la forme canonique d'un système du second ordre dont on donnera les expressions du gain statique K_S , de la pulsation propre non amortie ω_0 et du coefficient d'amortissement ξ en fonction de f_v , R , r , m et g .

$$H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)} = \frac{1}{m \cdot g} \frac{1}{\frac{7 \cdot (R-r)}{5 \cdot g} \cdot p^2 + \frac{f_v \cdot (R-r)}{m \cdot g} \cdot p + 1}$$

$$\text{d'où } K_s = \frac{1}{m \cdot g}, \omega_0 = \sqrt{\frac{5 \cdot g}{7 \cdot (R-r)}}$$

$$\xi = \frac{f_v \cdot (R-r)}{2 \cdot m \cdot g} \cdot \omega_0 = \frac{f_v \cdot (R-r)}{2 \cdot m \cdot g} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot g}{7 \cdot (R-r)}}$$

$$\xi = \frac{f_v}{2 \cdot m} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot (R-r)}{7 \cdot g}}$$

On prendra pour la suite les valeurs numériques suivantes : $\omega_0 = 21,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $K_s = 25 \text{ N}^{-1}$; $\xi = 4 \cdot f_v$.

Q3. Déterminer le module et l'argument de $H(j \cdot \omega)$ dans un premier temps de manière littérale en fonction de ω_0 , K_s et f_v puis sous forme numérique.

$$H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)} = \frac{K_s}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + 1}$$

$$H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)} = \frac{K_s}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{8 \cdot f_v}{\omega_0} \cdot p + 1}$$

on pose $= j \cdot \omega$

$$|H(j \cdot \omega)| = \frac{K_s}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (8 \cdot f_v)^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\Phi(\omega) = \arg(H(j \cdot \omega)) = -\arctan\left(\frac{8 \cdot f_v}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Q4. Déterminer le module de $H(j \cdot \omega)$ en décibel.

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K_s) - 10 \log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (8f_v)^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

Q5. Pour les valeurs suivantes du coefficient de frottement visqueux : $f_{v1} = 0,005$ et $f_{v2} = 0,2$ que peut-on dire du coefficient d'amortissement ? Déterminer si elle existe la pulsation de résonance ω_r et le coefficient de surtension Q_r . faire l'application numérique.

On sait que la réponse fréquentielle d'un second ordre présente une résonance lorsque le coefficient d'amortissement est $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ on a alors $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$ et

$$Q_r = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$f_{v1} = 0,005 \quad \text{d'où } \xi_1 = 0,02 < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ alors}$$

$$- \omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot 0,02^2} \approx \omega_0$$

$$- Q_r = \frac{1}{2 \cdot 0,02 \cdot \sqrt{1 - 0,02^2}} \approx 25$$

$$- Q_{r_{dB}} \approx 28 \text{ dB}$$

$$f_{v2} = 0,2 \quad \text{d'où } \xi = 0,8 > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ alors}$$

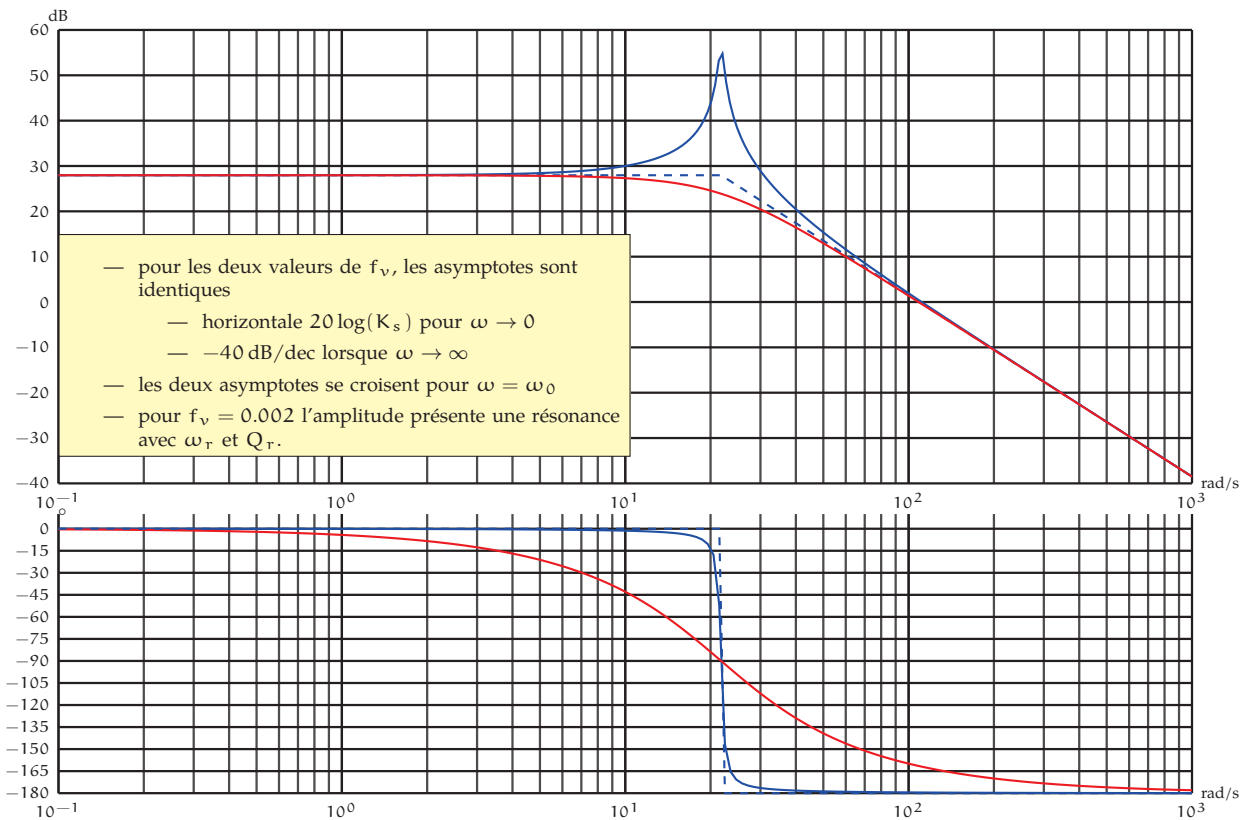
$$- \text{pas de résonance}$$

Q6. Tracer, sur la figure ci-dessous, pour les deux valeurs précédentes :

Q6a. les diagrammes asymptotiques de Bode de $H(j \cdot \omega)$ sur le diagramme d'amplitude et sur le diagramme de phase;

Q6b. l'allure du diagramme réel en amplitude et en phase;

Q6c. préciser les points particuliers sur les diagrammes Voir figure ci-dessous.



Q7. La sollicitation des bobines est sinusoïdale : $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega_{bob} \cdot t)$. Préciser, en justifiant votre réponse, la valeur à laquelle il faut régler la pulsation ω_{bob} pour pouvoir observer, au mieux, l'évolution du coefficient de frottement f_v .

L'effet de f_v est surtout visible autour de la pulsation propre. en mesurant l'amplitude des oscillations autour de cette valeur, on a une relation directe avec ξ donc f_v puis η .

Q8. Exprimer le rapport $\frac{|H(0)|}{|H(j \cdot \omega_0)|}$ en fonction de ξ , en déduire η en fonction de ξ .

On sait que pour un second ordre $\frac{|H(j \cdot \omega_0)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2 \cdot \xi}$.

$$\frac{|H(0)|}{|H(j \cdot \omega_0)|} = 2 \cdot \xi$$

$$= 8 \cdot f_v$$

$$\frac{|H(0)|}{|H(j \cdot \omega_0)|} = 48 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r$$

$$\eta = \frac{\xi}{24 \cdot \pi \cdot r}$$

Nous avons considéré jusqu'à présent que f_v est constant, en fait il augmente avec le temps (suffisamment lentement pour l'étude précédente soit malgré tout valide) et l'objectif du mécanisme est de mesurer cette évolution et d'en déduire le temps de coagulation.

Q9. Comment évolue l'amplitude des oscillations de la bille en fonction du temps ?

Si la viscosité augmente, alors ξ augmente, l'amplitude des oscillations va donc diminuer. En mesurant cette décroissance, on déduit la vitesse de coagulation du sang.

Cor. 3 : Chaudière à bois déchiqueté

Sujet page 23

Q1. En supposant que les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), donner dans le domaine de Laplace, la transformée des équations différentielles précédentes.

$$m_b c_b p T_b(p) + K_{ab} (T_b(p) - T_a(p)) = P(p)$$

$$m_a c_a p T_a(p) + K_{ae} (T_a(p) - T_e(p)) = K_{ab} [T_b(p) - T_a(p)]$$

$$m_e c_e p T_e(p) + K_{ae} (T_e(p) - T_{ext}(p)) = K_{ae} [T_a(p) - T_e(p)]$$

Q2. Exprimer $T_b(p)$ en fonction de $T_a(p)$ et de $P(p)$ en faisant apparaître les variables m_b, c_b et K_{ab} et mettre $T_b(p)$ sous la forme $T_b(p) = H_1(p)T_a(p) + H_2(p)P(p)$.

À partir de l'équation précédente on obtient :

$$T_b(p) = \frac{P(p) + K_{ab} T_a(p)}{m_b c_b p + K_{ab}}$$

$$= \underbrace{\frac{K_{ab}}{K_{ab} + m_b c_b p}}_{H_1(p)} \cdot T_a(p) + \underbrace{\frac{1}{K_{ab} + m_b c_b p}}_{H_2(p)} \cdot P(p)$$

H_1 et H_2 sont des fonctions de transfert du premier ordre.

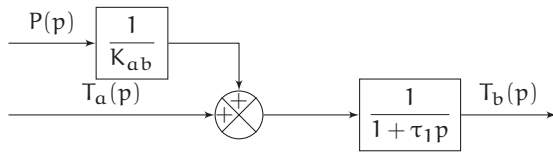
En les mettant sous forme canonique, on a :

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{m_b c_b}{K_{ab}} p} \quad H_2(p) = \frac{\frac{K_{ab}}{m_b c_b}}{1 + \frac{K_{ab}}{K_{ab}} p}$$

Et donc :

- $K_1 = 1$
- $K_2 = \frac{1}{K_{ab}} = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ s} \cdot \text{K} \cdot \text{J}^{-1}$
- $\tau_1 = \tau_2 = \frac{m_b c_b}{K_{ab}} = \frac{200 \cdot 500}{40} = 2500 \text{ s}$

L'équation peut donc se traduire ainsi sous forme de schémas blocs :



Q3. Exprimer $T_a(p)$ en fonction de $T_e(p)$ et de $T_b(p)$ en faisant apparaître les variables m_a, c_a, K_{ae} et K_{ab} puis mettre $T_a(p)$ sous la forme $T_a(p) = H_3(p)T_e(p) + H_4(p)T_b(p)$.

À partir de l'équation, on obtient :

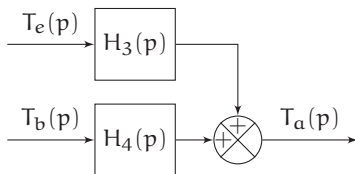
$$T_a(p) = \frac{K_{ab}}{(m_a c_a p + K_{ab} + K_{ae})} T_b(p) + \frac{K_{ae}}{(m_a c_a p + K_{ab} + K_{ae})} T_e(p)$$

$$T_a(p) = \underbrace{\frac{K_{ae}}{\frac{K_{ab} + K_{ae}}{m_a c_a} p + 1}}_{H_3(p)} T_e(p) + \underbrace{\frac{K_{ab} + K_{ae}}{\frac{K_{ab} + K_{ae}}{m_a c_a} p + 1}}_{H_4(p)} T_b(p)$$

H_3 et H_4 sont des fonctions de transfert du premier ordre. On a :

- $K_3 = \frac{K_{ae}}{K_{ab} + K_{ae}}, K_4 = \frac{K_{ab}}{K_{ab} + K_{ae}}$
- $\tau_3 = \tau_4 = \frac{m_a c_a}{K_{ab} + K_{ae}} = \frac{2 \cdot 700}{40 + 400} \simeq 3,5 \text{ s}$

L'équation peut donc se traduire ainsi sous forme de schémas blocs :



Q4. Exprimer $T_e(p)$ en fonction de $T_a(p)$ et de $T_{ext}(p)$.

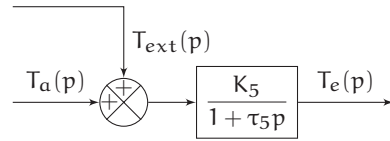
À partir de la troisième équation, on obtient :

$$T_e(p) = \frac{K_{ae}}{m_e c_e p + 2K_{ae}} (T_{ext}(p) + T_a(p)) = \frac{1}{\frac{2}{m_e c_e} p + 1} (T_{ext}(p) + T_a(p))$$

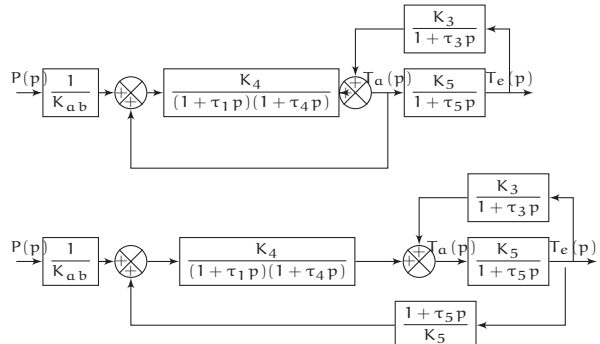
Le système ainsi défini est d'ordre 2 avec :

$$K_5 = \frac{1}{2}, \tau_5 = \frac{m_e c_e}{2K_{ae}}$$

La 3^{ème} équation peut donc se traduire ainsi sous forme de schémas blocs :



Q5. Par manipulations successives du schéma-bloc précédent, exprimer $\frac{T_e(p)}{P(p)}$ en considérant que $T_{ext}(p) = 0$. Ne pas développer



Attention les sommateurs sont de types ++!

La petite boucle peut donc être réduite :

$$G_1(p) = \frac{K_5}{1 - \frac{K_5}{1 + \tau_5 p} \frac{K_3}{1 + \tau_3 p}} = \frac{K_5}{1 + \tau_5 p - \frac{K_3 K_5}{1 + \tau_3 p}} = \frac{K_5 (1 + \tau_3 p)}{(1 + \tau_3 p)(1 + \tau_5 p) - K_3 K_5}$$

Enfin, on a donc :

$$\frac{T_e(p)}{P(p)} = \frac{1}{K_{ab}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \tau_1 p} \cdot \frac{K_4}{1 + \tau_4 p}} \cdot G_1(p) = \frac{1}{K_{ab}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \tau_1 p} \cdot \frac{K_4}{1 + \tau_4 p}} \cdot \frac{1 + \tau_5 p}{K_5}$$

Q6. Exprimer la fonction de transfert sous forme numérique et la mettre sous forme canonique.

Je vous laisse vérifier que la fonction de transfert s'écrit :

$$\frac{T_e(p)}{P(p)} = \frac{0,250 \times 10^{-1}}{10 + 35100 \cdot p + 1,40 \times 10^7 p^2 + 4,81 \times 10^7 p^3}$$

soit sous forme canonique :

$$\frac{T_e(p)}{P(p)} = \frac{0,250 \times 10^{-2}}{1 + 3510 \cdot p + 1,40 \times 10^6 p^2 + 4,81 \times 10^6 p^3}$$

Il faudrait ensuite développer toute l'expression puis diviser le numérateur et le dénominateur par la constante du dénominateur.

Q7. Déterminer la fonction de transfert complexe $H_s(j \cdot \omega)$ puis le module en décibel $H_{db}(\omega) = 20 \cdot \log(|H_s(j \cdot \omega)|)$ et l'argument $\Phi(\omega) = \arg(H_s(j \cdot \omega))$.

6.11 Corrigés n°6

$$H_s(p) = \frac{1}{400(1 + 450 \cdot p)(1 + 3050 \cdot p)}$$

$$H_s(j \cdot \omega) = \frac{1}{400(1 + 450 \cdot j \cdot \omega)(1 + 3050 \cdot j \cdot \omega)}$$

$$|H_s(j \cdot \omega)| = \frac{1}{400} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 450^2 \cdot \omega^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 3050^2 \cdot \omega^2}}$$

soit en décibels

$$H_{db}(\omega) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{400}\right) - 10 \log(1 + 450^2 \cdot \omega^2) - 10 \log(1 + 3050^2 \cdot \omega^2)$$

et l'argument

$$\Phi(\omega) = -\arctan(450 \cdot \omega) - \arctan(3050 \cdot \omega)$$

Remarque : il ne faut pas développer la fonction de transfert complexe avant d'écrire le module et l'argument, il est toujours préférable de conserver une écriture sous la forme de produits.

Q8. Tracer sur les diagramme de Bode de $H(p)$, les diagrammes asymptotiques de Bode du modèle simplifié.

La fonction de transfert est un produit de deux premiers ordres, il suffit donc de tracer les diagrammes des deux premiers ordres et de les sommer.

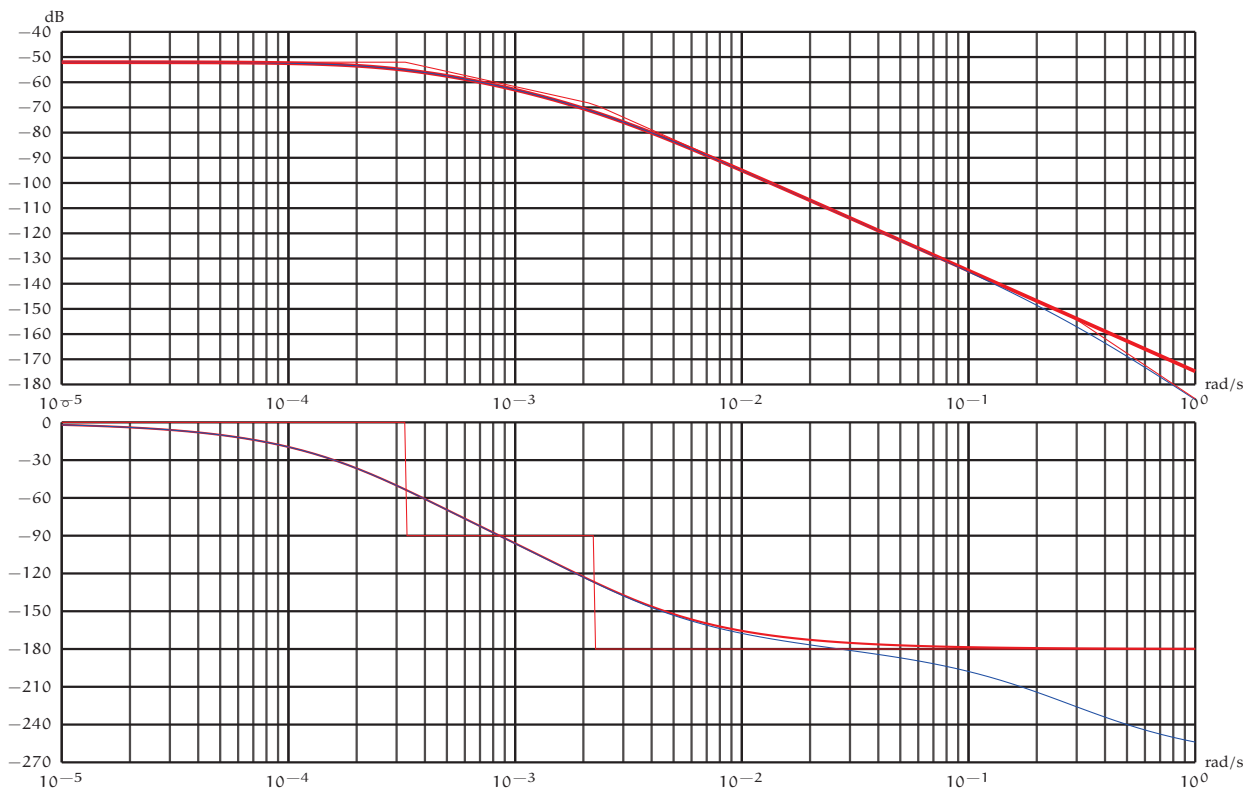
Voir la figure ci-dessous.

Q9. Compléter le tracé avec le tracé du module et de l'argument.

Q10. Justifier que le modèle simplifié est valide.

Les diagrammes de la fonction simplifiée et de la fonction de transfert de $H(p)$ se superposent jusqu'à une pulsation d'environ $\omega_{lim} = 1 \times 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le modèle simplifié est donc valide jusqu'à ces fréquences.



Cor. 4 : Filtre réjecteur

Sujet page 25

Q1. Relever sur les diagrammes de Bode, la pulsation de résonance ω_r .

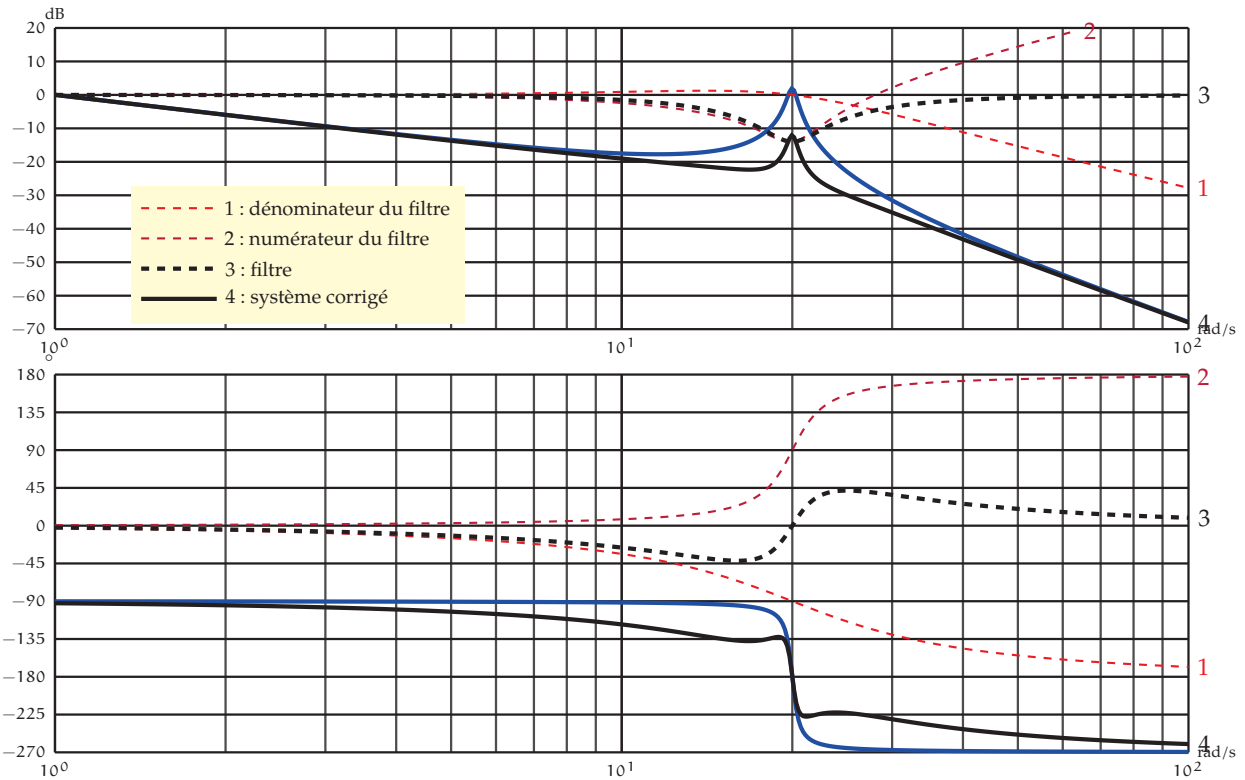
On relève sur le diagramme de Bode la pulsation de résonance $\omega_r \approx 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q2. Tracer les diagrammes de Bode du filtre, préciser les asymptotes et les points particuliers.

Le numérateur et le dénominateur sont des seconds ordres, ils présentent tous les deux une pulsation de résonance ($z < \sqrt{\frac{2}{2}}$).

Q3. Tracer le diagramme de Bode du système corrigé, conclure.

Globalement le filtre réjecteur n'a pas d'effet aux pulsations différentes de la pulsation ω_r par contre, il atténue fortement la résonance du système.



Cor. 5 : Second ordre généralisé

Sujet page 27

La fonction $H(p)$ se construit comme le produit de trois premiers ordres dont un au numérateur. la fonction globale s'obtient en sommant sur les diagrammes de Bode chacun de ces 1^{er} ordres.

On retrouve le détail du tracé du premier cas ($T < T_1 < T_2$) sur le graphe suivant (figure 6.19), on remarque :

- une pente de $+20$ dB/dec pour $1 + T \cdot p$ à partir de la pulsation $\frac{1}{T}$ ainsi qu'un déphasage de $+90^\circ$;
- une pente de -20 dB/dec pour chacune des deux autres fonctions.

On retrouve sur le deuxième graphe (figure 6.20), le lieu de Bode de chacune des trois fonctions. on remarque l'influence de la constante de temps du numérateur sur la forme du diagramme d'amplitude et de phase. Le numérateur apporte une avance de phase qui sera utile pour stabiliser les systèmes.

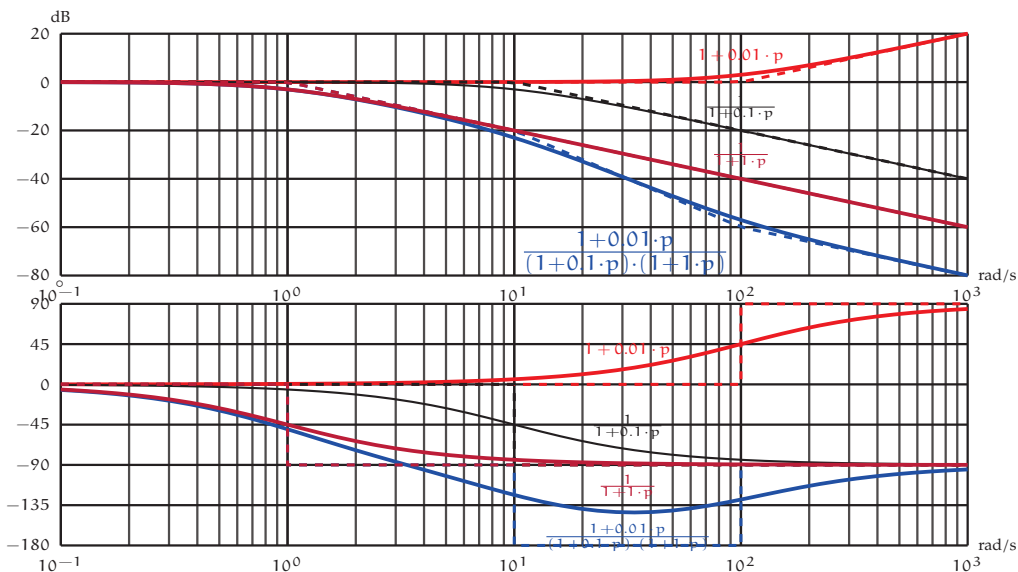


FIGURE 6.19 – Diagrammes de Bode de $\frac{1+0.01 \cdot p}{(1+0.1 \cdot p) \cdot (1+1 \cdot p)}$

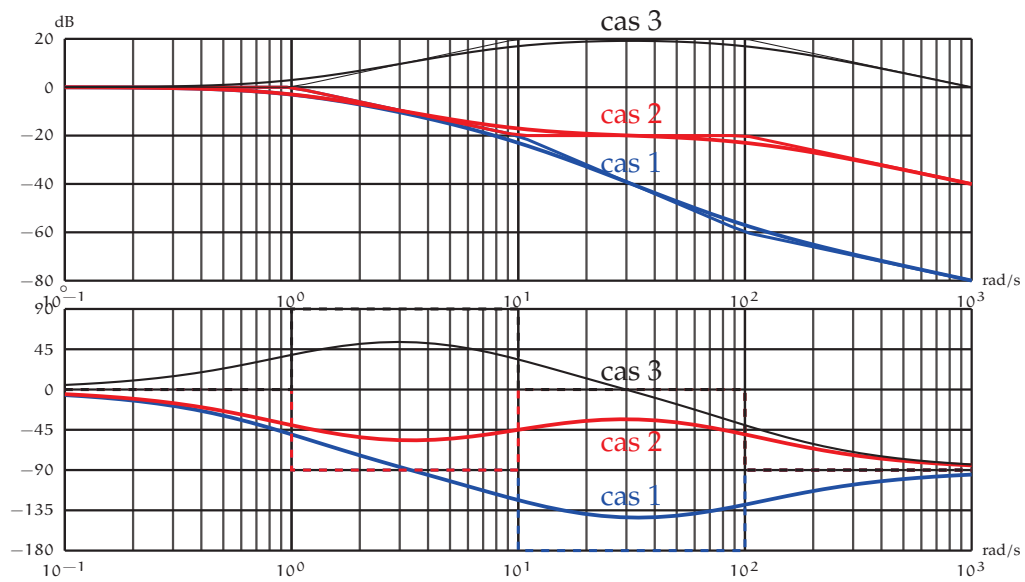


FIGURE 6.20 – Diagrammes de Bode des 3 cas

Cor. 6 : Second ordre généralisé-2

Sujet page 27

Le tracé s’obtient comme précédemment en additionnant graphiquement les deux fonctions de transfert, on constate de plus que la pulsation propre du dénominateur est $\omega_n = \frac{1}{T}$, d’où le tracé de la figure 6.21 sur lequel sont représenté le numérateur, le dénominateur et $G(p)$.

Le dénominateur présente une résonance ($z = 0,3 < \frac{\sqrt{2}}{2}$), pour la pulsation $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2 \cdot z^2} = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2 \cdot z^2}$. Le maximum se déduit du coefficient de résonance $Q = \frac{1}{2z\sqrt{1 - z^2}}$.

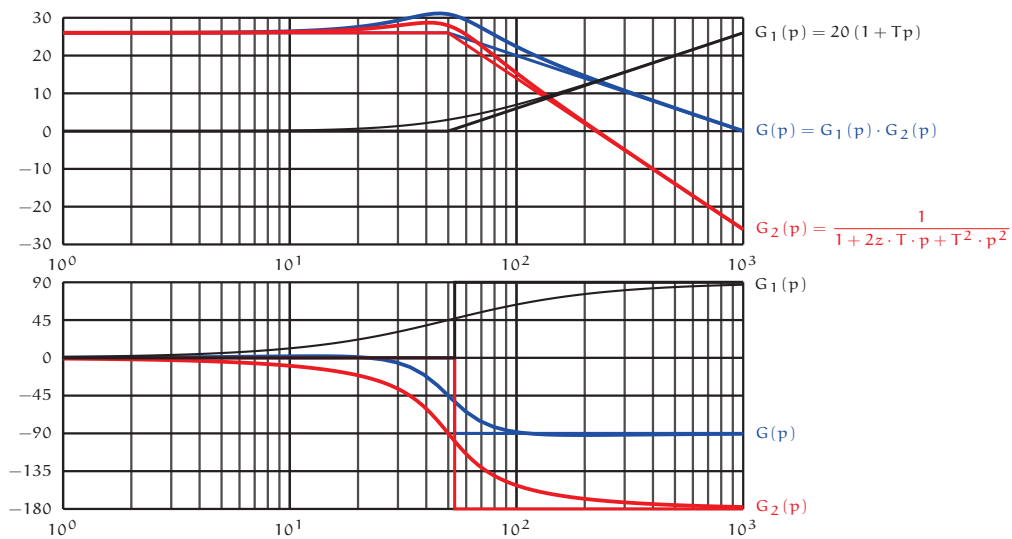


FIGURE 6.21 – Second ordre généralisé

Cor. 7 : Étude d'un système bouclé

Sujet page 27

Q1. Les diagrammes de Bode sont construits point par points à partir du tableau de valeurs (figure 6.22).

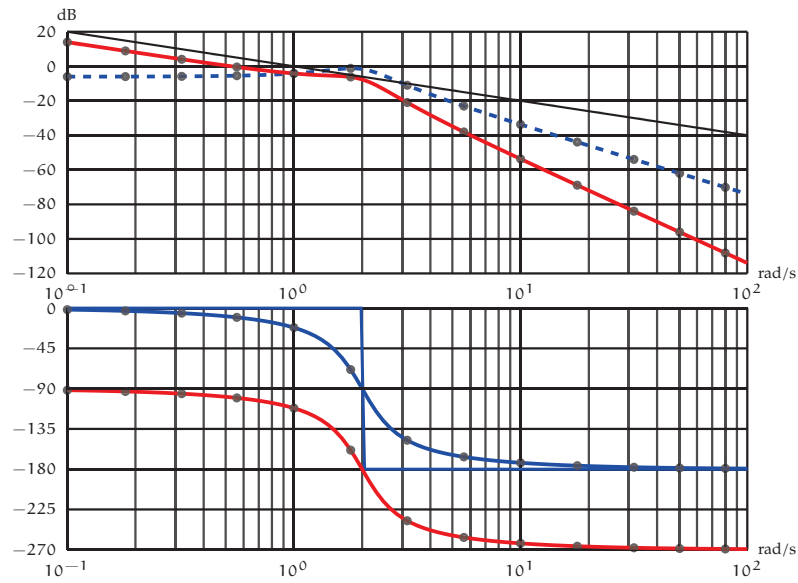


FIGURE 6.22 – Diagramme de Bode de la FTBO

Q2. Le lieu de Bode de la FTBO est obtenu en sommant pour chaque pulsation, le lieu de $G(p)$ et de $\frac{1}{p}$.