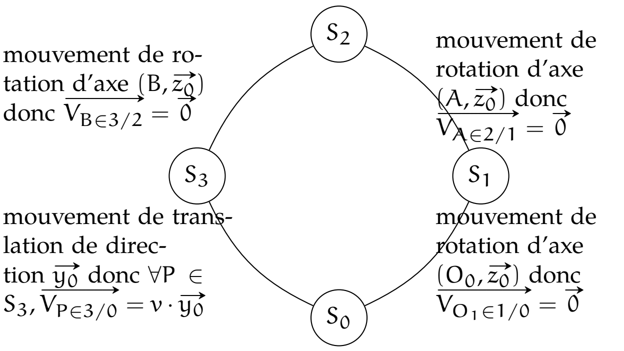
8.13 Corrigés n°8

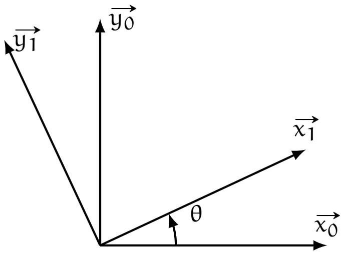
Cor. 1 : Moteur 2 temps *Sujet page 15*

Q1. Identifier les mouvements entre chaque solide (S_1/S_0, S_2/S_1, S_3/S_2, S_3/S_0), préciser les axes et points caractéristiques.

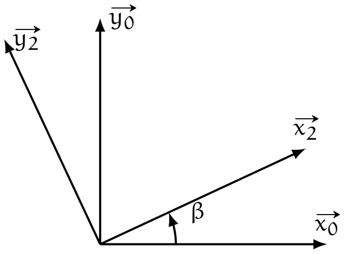


Q2. Tracer les différentes figures de calculs. Précisez les vecteurs rotations.

Le sujet donne :



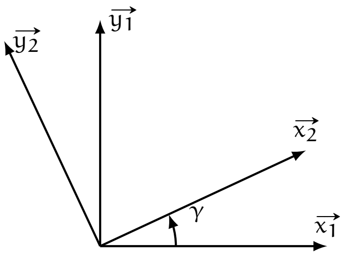
$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}\cdot\overrightarrow{z_0}$$



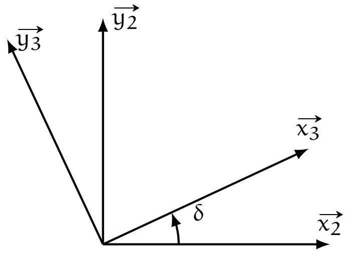
$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{\beta}\cdot\overrightarrow{z_0}$$

Nous avons vus au-dessus que le mouvement du piston est une translation donc $\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{0}$.

Si on souhaite complètement définir les mouvements, on peut rajouter :



$$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\gamma}\cdot\overrightarrow{z_0}$$



$$\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \dot{\delta}\cdot\overrightarrow{z_0}$$

Nous avons aussi :$\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \overrightarrow{\Omega_{3/0}} + \overrightarrow{\Omega_{0/2}} = \overrightarrow{\Omega_{0/2}}$, donc $\overrightarrow{\Omega_{2/3}} = \dot{\beta}\cdot\overrightarrow{z_0}$.

Q3. Déterminer la loi d'entrée/sortie du mécanisme, c'est-à-dire relation entre θ et λ.

Pour déterminer cette relation, nous allons écrire la fermeture géométrique :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_0A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO_0} &= \overrightarrow{0}\\ a\cdot\overrightarrow{x_1} + L\cdot\overrightarrow{y_2} - \lambda\cdot\overrightarrow{y_0} &= \overrightarrow{0}\\ a\cdot\cos\theta + a\cdot\sin\theta\cdot\overrightarrow{y_0} + L\cdot\cos\beta\overrightarrow{y_0} - L\cdot\sin\beta\cdot\overrightarrow{x_0} - \lambda\cdot\overrightarrow{y_0} &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

d'où les équations en projection dans $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$

$$\begin{cases} a\cdot\cos\theta - L\cdot\sin\beta = 0\\ a\cdot\sin\theta + L\cdot\cos\beta - \lambda = 0\end{cases}$$

Soit deux équations à 3 inconnues, pour résoudre il faut choisir un paramètre "pilote". Nous recherchons une relation entre λ et θ, il faut donc faire disparaître β.

Une solution pratique consiste à isoler $\cos\beta$ et $\sin\beta$ puis à sommer les deux équations mise au carré

$$\begin{cases} (a\cdot\cos\theta)^2 = L^2\cdot\sin^2\beta\\ (a\cdot\sin\theta - \lambda)^2 = L^2\cdot\cos^2\beta\end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}(a\cdot\cos\theta)^2 + (a\cdot\sin\theta - \lambda)^2 &= L^2\\ a^2\cdot\cos^2\theta + a^2\cdot\sin^2\theta - 2\cdot a\cdot\lambda\cdot\sin\theta + \lambda^2 &= L^2\\ a^2 - L^2 - 2\cdot a\cdot\lambda\cdot\sin\theta + \lambda^2 &= 0\end{aligned}$$

On résout l'équation du second degré en lambda ce qui donne :

$$\lambda_1 = a\cdot\sin\theta + \sqrt{a^2(\sin^2(\theta) - 1) + L^2}$$
$$\lambda_2 = a\cdot\sin\theta - \sqrt{a^2(\sin^2(\theta) - 1) + L^2}$$

Compte tenu du mécanisme, seule la première solution est valable $\lambda > 0$.

Q4. En déduire $\overrightarrow{V_{B\in 3/0}}$ la vitesse de B de S_3 par rapport à R_0.

$$\overrightarrow{V_{B\in 3/0}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OB}\right]_0 = \left[\frac{d}{dt}\lambda\cdot\overrightarrow{y_0}\right]_0 = \dot{\lambda}\cdot\overrightarrow{y_0}$$

À partir de la fermeture géométrique, on détermine $\dot{\lambda}$.

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[a \cdot \sin\theta + \sqrt{a^2(\sin^2(\theta) - 1) + L^2}\right]$$

$$\dot{\lambda} = \left(a \cdot \cos\theta + \frac{a^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta}{\sqrt{a^2(\sin^2(\theta) - 1) + L^2}}\right)\dot{\theta}$$

Q5. Écrire les torseurs cinématiques entre les solides S_1 et S_0, S_2 et S_1, S_3 et S_2 , S_3 et S_0.

$\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{O_1}$, $\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\gamma} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{A}$, $\left\{\mathcal{V}_{3/2}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{B}$

$\left\{\mathcal{V}_{3/0}\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{y_0}\end{matrix}\right\}_{B}$,

Q6. En déduire le torseur cinématique de S_2 par rapport à S_0, proposez deux formes différentes pour ce torseur.

On peut écrire ce torseur soit en A soit en B

en A :

$$\left\{\mathcal{V}_{2/0}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{A\in 2/0}}\end{matrix}\right\}_{A} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ a \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_1}\end{matrix}\right\}_{A}$$

car

$\vec{V}_{A\in 2/0} = \vec{V}_{A\in 2/1} + \vec{V}_{A\in 1/0} = \vec{0} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{O_0A}$ soit $\overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = a \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_1}$,

en B :

$$\left\{\mathcal{V}_{2/0}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \vec{V}_{B\in 2/0}\end{matrix}\right\}_{B}$$

de même $\vec{V}_{B\in 2/0} = \vec{V}_{B\in 2/3} + \overrightarrow{V_{B\in 3/0}} = \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{y_0}$

En déplaçant le premier en B, on obtient une relation entre $\dot{\lambda}$ et $\dot{\theta}$. Déterminons $\vec{V}_{B\in 2/0}$ pour le second torseur :

$$\vec{V}_{B\in 2/0} = \vec{V}_{A\in 2/0} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$
$$\dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{y_0} = a \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_1} + \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{z_0} \wedge L \cdot \overrightarrow{y_2}$$
$$\dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{y_0} = a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta \cdot \overrightarrow{y_0} - a \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta \cdot \overrightarrow{x_0} - \dot{\beta} \cdot L \cdot \overrightarrow{x_2}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{y_0} = {} & a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta \cdot \overrightarrow{y_0} - a \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta \cdot \overrightarrow{x_0} \\ & - \dot{\beta} \cdot L \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x_0} - \dot{\beta} \cdot L \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{y_0}\end{aligned}$$

d'où les deux équations de la fermeture géométrique :

$$\begin{cases} 0 = -a \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta - L \cdot \dot{\beta} \cdot \cos\beta \\ \dot{\lambda} = a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta - L \cdot \dot{\beta} \cdot \sin\beta \end{cases}$$

On retrouve les dérivées des deux équations de l'étude géométrique.