DM - Automne

Exercice 1 - 1r ordre généralisé

Corrigé page 6

Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$3 \cdot \frac{d\,e(t)}{dt} + 2 \cdot e(t) = \frac{d\,s(t)}{dt} + 2 \cdot s(t) \quad (1)$$

On pose $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$ et $S(p) = \mathcal{L}(s(t))$. On se place dans les conditions de Heaviside.

Q1. Écrire l'équation (1) dans le domaine de Laplace.

Q2. Déterminer la fonction de transfert $G(p) = \frac{S(p}{E(p)}$.

Q3. Mettre le numérateur et le dénominateur sous forme canonique. Préciser le gain de la fonction de transfert.

Q4. Donner la transformée de Laplace de $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$.

Q5. Montrer que $S(p)$ pour une entrée en échelon $e(t) = 0.5 \cdot \mathcal{H}(t)$ (avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside) s'écrit :

$$S(p) = \frac{1}{1 + 0{,}5 \cdot p} + \frac{0.5}{p}$$

$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau \cdot p}$
$a \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p}$
$a \cdot u(t-\tau)$	$\frac{a}{p} \cdot e^{-\tau \cdot p}$
$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p^2}$
$t^n \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-a \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p+a}$

TABLE 0 – Transformées de Laplace

Q6. Déterminer $\lim\limits_{t \to \infty} s(t)$, préciser le théorème utilisé.

Q7. Déterminer, à partir du tableau des transformée inverses, la réponse temporelle pour cette entrée en échelon.

Q8. Tracer la réponse temporelle de $s(t)$. Déterminer graphiquement le temps de réponse à 5% et la tangente à l'origine.

Q9. On considère maintenant $e(t) = 2 \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$. Déterminer $S(p)$.

Q10. Montrer que $S(p)$ s'écrit

$$S(p) = \frac{A}{1 + 0{,}5 \cdot p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p}$$

Déterminer A, B et C.

Q11. Déterminer $s(t)$.

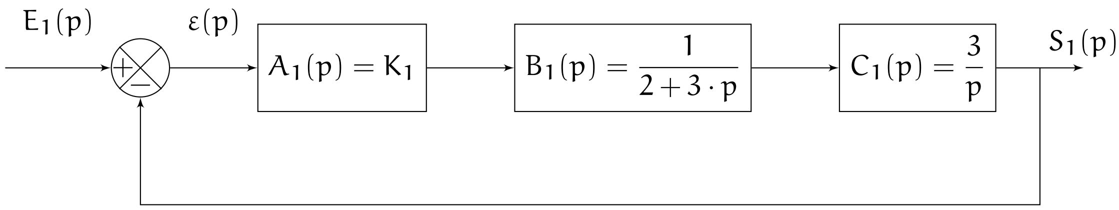
Exercice 2 - Manipulation de schéma-blocs - fonction de transfert

Corrigé page 6

Pour cette partie, vous devez avoir lu et compris le cours sur les schéma-blocs : https ://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/2020-2021-mpsi-modelisation_par_les_schema-blocs.pdf

A.

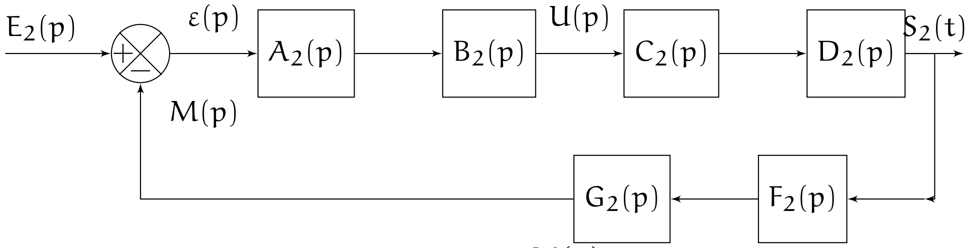
Soit le schéma bloc ci-dessous :



Q1. Déterminer $S_1(p)$ en fonction de $A_1(p)$, $B_1(p)$, $C_1(p)$ et $\varepsilon(p)$ sans développer puis en développant.
Q2. Déterminer $S_1(p)$ en fonction de $A_1(p)$, $B_1(p)$, $C_1(p)$ et $E_1(p)$ sans développer puis en développant.
Q3. En déduire $\dfrac{S_1(p)}{E_1(p)}$ en fonction de $A_1(p)$, $B_1(p)$, $C_1(p)$ et $E_1(p)$ sans développer puis en développant. Mettre sous la forme $\dfrac{S_1(p)}{E_1(p)} = \dfrac{K}{1+a\cdot p+b\cdot p^2}$
Q4. Rappeler la formule de Black pour un schéma blocs à retour unitaire.

B.

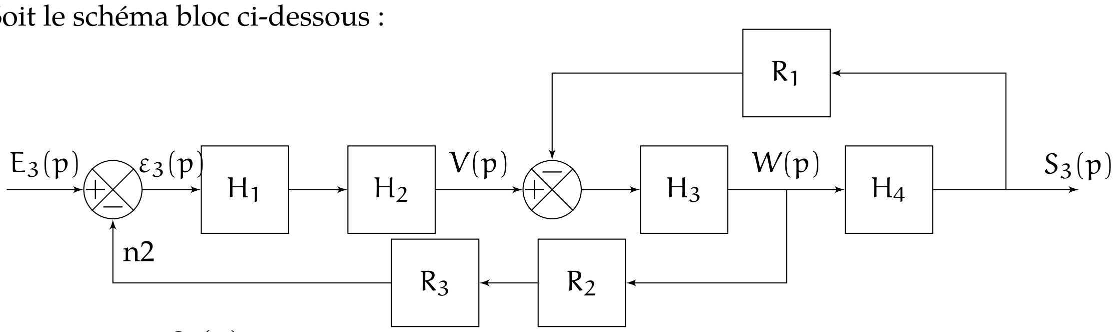
Soit le schéma bloc ci-dessous :



Q5. Déterminer la boucle ouverte $BO_2(p) = \dfrac{M(p)}{\varepsilon(p)}$
Q6. Déterminer la chaîne de retour.
Q7. Déterminer $H_2(p) = \dfrac{S_2(p)}{E_2(p)}$.
Q8. Rappeler la formule de Black.

C.

Soit le schéma bloc ci-dessous :



Q9. Déterminer $\dfrac{S_3(p)}{V(p)}$
Q10. Déterminer $V(p)$ en fonction de $\varepsilon_3(p)$ puis en fonction de $Z_3(p)$ et $W(p)$ et des différentes fonctions.
Q11. Déterminer $\dfrac{S_3(p)}{E_3(p)}$.

Exercice 3 - Mise en équation d'un réacteur chimique

Corrigé page 6

Le schéma de la figure 1 décrit un réacteur chimique de volume V alimenté en continu par un produit A de concentration c_{in} à un débit Q.

Afin de garder le niveau constant dans le réacteur, on soutire le milieu de réaction au même débit Q. De plus, un agitateur mélange parfaitement les produits à l'intérieur du réacteur (par exemple le produit A venant de l'alimentation, est instantanément et parfaitement réparti dans le réacteur).

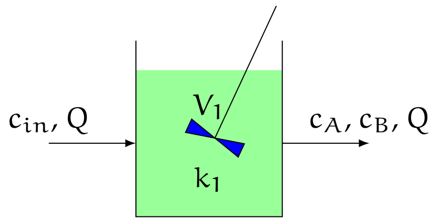


FIGURE 1 – Réacteur chimique

À l'intérieur du réacteur a lieu une réaction chimique qui transforme le produit A (concentration c_A) en un nouveau produit B (concentration c_B), selon la réaction suivante :

$$A \xrightarrow{k} B$$

La réaction chimique est du premier ordre, c'est à dire que la cinétique est proportionnelle à la concentration c_A, et la constante de proportionnalité (aussi appelée vitesse spécifique) est noté k.

À partir d'un bilan de concentration, on peut écrire les deux équations différentielles :

— pour le produit A

$$\frac{d\,c_A(t)}{dt} = \frac{Q}{V}\cdot c_{in}(t) - \frac{Q}{V}\cdot c_A(t) - k\cdot c_A(t)$$

— pour le produit B

$$\frac{d\,c_B(t)}{dt} = +k\cdot c_A(t) - \frac{Q}{V}\cdot c_B(t)$$

Pour les applications numériques : $V = 100\,m^3$.

On se place dans les conditions de Heaviside autour du point de fonctionnement nominal. On suppose que le débit d'alimentation du réactif reste constant ($Q = Q_0 = 100\,m^3/min$).

On note $C_{in}(p)$, $C_A(p)$ et $C_B(p)$ les transformées de Laplace de $c_{in}(t)$, $c_A(t)$ et $c_B(t)$.

Q1. Écrire les équations dans le domaine de Laplace

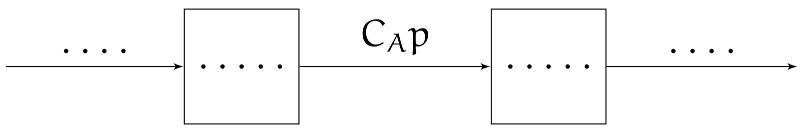
On rappelle que la forme canonique d'un premier ordre est $H_1(p) = \dfrac{K_1}{1+\tau_1\cdot p}$.

Q2. Déterminer les deux fonctions de transfert
$H_A(p) = \dfrac{C_A(p)}{C_{in}(p)}$ et $H_B(p) = \dfrac{C_B(p)}{C_A(p)}$, les mettre sous forme canonique.

On note τ_A, K_A et τ_B , K_b respectivement la contante de temps et le gain des fonctions de transfert $H_A(p)$ et $H_B(p)$

Q3. Préciser le gain et la constante de temps pour chacune des fonctions de transfert en fonction de Q, V et k.

Q4. Compléter le schéma bloc



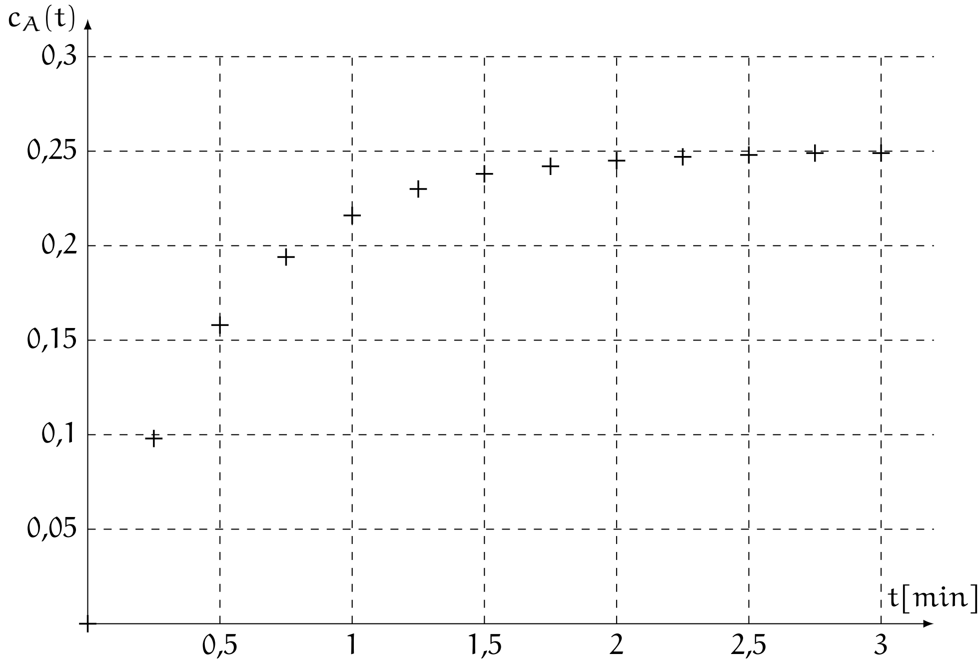
Q5. En déduire $H(p) = \dfrac{C_B(p)}{C_{in}(p)}$.

Un essai a permis de relever l'évolution de la concentration en produit A à la sortie du récteur pour une évolution en échelon de la concentration du produit A à l'entrée du réacteur. Cette évolution est modélisée par un échelon : $c_{in}(t) = C_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $C_0 = 0{,}5\,\mathrm{mol} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ et $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

Le tableau et la caractéristique de la figure 3 montre l'évolution de cette concentration.

t min	$c_A(t)$ $\mathrm{mol} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
0	0.
0.25	0.98e-1
0.50	0 .158
0.75	0.194
1.00	0.216
1.25	0.230
1.50	0.238
1.75	0.242
2.00	0.245
2.25	0.247
2.50	0.248
2.75	0.249
3.00	0.249

(a) relevé



(b)

FIGURE 2 – relevé expérimental de l'évolution de la concentration en produit A pour une évolution de la concentration à l'entrée en échelon $C_0 = 0{,}5\,\mathrm{mol} \cdot \mathrm{m}^{-3}$

On se propose de modéliser cette réponse par une fonction de transfert du premier ordre : $H_1(p) = \dfrac{S(p)}{E(p} = \dfrac{K_1}{1 + \tau_1 \cdot p}$.

On sait que la réponse d'un système du premier ordre à un échelon de consigne $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ s'écrit :

$$s(t) = K_1 \cdot E_0 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)\right) \mathcal{H}(t)$$

Q6. Justifier cette forme.
Q7. Déterminer $s(\tau)$ et $s(3 \cdot \tau)$ et la tangente pour $t = 0$.
Q8. À partir du relevé de la figure 3, justifier que l'on peut modéliser ce système comme un premier ordre, déterminer alors, le temps de réponse à 5% ($T_{5\%}$) et le gainK_2 et la constante de temps τ_2. En déduire la valeur de la vitesse spécifique k.

Pour la suite, quelle que soit la valeur trouvée précédemment, on prendra pour $H(p)$

$$H(p) = \frac{1}{2 + 3 \cdot p + p^2}$$

Q9. Mettre $H(p)$ sous forme canonique. préciser le gain le coefficient d'amortissement et la pulsation propre.
Q10. Déterminer la transformée de Laplace de l'échelon de concentration $c_{in}(t) = C_0 \cdot \mathcal{H}(t)$. En déduire $C_B(p)$
Q11. Déterminer la valeur finale $\lim\limits_{t \to \infty} (c_B(t))$, la valeur initiale, et la tangente initiale.

Q12. Montrer que $C_B(p)$ peut s'écrire sous la forme $C_B(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p}$, déterminer A, B, C.

Q13. Déterminer $c_B(t)$, à partir du tableau des transformées.

$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau \cdot p}$
$a \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p}$
$a \cdot u(t-\tau)$	$\frac{a}{p} \cdot e^{-\tau \cdot p}$
$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p^2}$
$t^n \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-a \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p+a}$

Q14. Tracer $c_2(t)$, préciser le temps de réponse à 5%. Conclure,