

## 5.3 Feuille de travaux dirigés n°5b

### Exercice 1 - Régulation d'une turbine

Adapté de Centrale 2011 PSI

Corrigé page 17

Le fonctionnement d'une turbine de centrale électrique peut être modélisé autour de son point de fonctionnement par le schéma-bloc de la figure 5.5.

On retrouve sur ce schéma, deux boucles imbriquées :

- la boucle intérieure est la boucle de régulation de puissance,
- la boucle extérieure, la boucle de régulation de la fréquence du réseau.

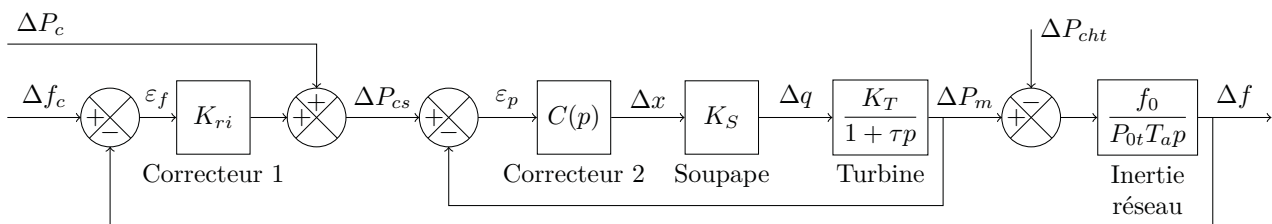


FIGURE 5.5 – Schéma bloc de la régulation en puissance et fréquence d'une turbine à vapeur

Les variables  $\Delta f_c$ ,  $\Delta P_c$ ,  $\Delta P_{cht}$  et  $\Delta f$  représentent les variations autour du point de linéarisation du fonctionnement,  $f_c$  est la consigne de fréquence  $f_0 = 50 \text{ Hz}$ ,  $f$  la fréquence effective sur le réseau,  $P_c$  la consigne de puissance en  $W$  et  $P_{cht}$  la puissance effective consommée par les utilisateurs.

Cahier des charges pour la régulation de chaque machine, dont un extrait est donné tableau 5.2.

Exigence	Critère	Niveau
Réguler la puissance produite	Stabilité	Stable
	Précision	Erreur nulle en réponse à un échelon de puissance
Participer à la régulation de fréquence	Stabilité	$M_G > 10 \text{ dB}$ et $M_\phi > 20^\circ$
	Précision	Erreur nulle en réponse à un échelon de fréquence
	Rapidité	Temps de réponse à un échelon : $t_{r5\%} = 40 \text{ s}$
	Sensibilité aux perturbations de charge	Sensible aux perturbations constantes, de façon à respecter un statisme de 4%

Tableau 5.2 – Cahier des charges partiel pour un site de production

#### A. Régulation en puissance de la turbine

On s'intéresse dans un premier temps à la régulation en puissance de la turbine (boucle intérieure).

On donne :  $K_S = 2,5 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $K_T = 1,34 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $P_{0t} = 260 \text{ MW}$  et  $\tau = 6 \text{ s}$ .

On adopte dans un premier temps un correcteur intégral pur, dont la fonction de transfert s'écrit :

$$C(p) = \frac{K_I}{p}$$

**Q1.** Déterminer la fonction de transfert  $H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)}$  sous forme canonique et déterminer, en justifiant votre réponse, si cette boucle de régulation est stable et précise. Déterminer l'expression littérale et numérique de  $K_I$  minimisant le temps de réponse à 5% de la boucle interne de régulation

de puissance. En déduire ce temps de réponse à 5%. En comparant à la rapidité de la turbine seule, la boucle interne de régulation améliore-t-elle la rapidité?

On choisit désormais un correcteur proportionnel-intégral dont la fonction de transfert s'écrit sous la forme  $C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$ .

**Q2.** Déterminer la fonction de transfert

$$H_P(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)}$$

sous forme canonique et déterminer, en justifiant votre réponse, si cette boucle de régulation est stable et précise. Que peut-on dire du temps de réponse?

**Q3.** Conclure par une synthèse, des avantages et inconvénients d'un fonctionnement en boucle ouverte, en boucle fermée avec correction proportionnelle, en boucle fermée avec correction intégrale et en boucle fermée avec correction proportionnelle intégrale, sur les critères de précision, rapidité et stabilité de la régulation en puissance.

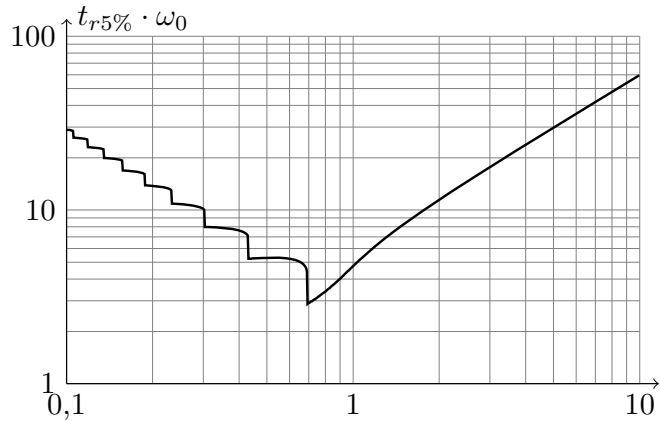


FIGURE 5.6 – Abaque de  $T_{5\%} \cdot \omega_n$  en fonction du coefficient d'amortissement

Le coefficient de correction proportionnelle  $K_p$  doit satisfaire la condition  $K_p \cdot K_s \cdot K_T = 1$  pour ne pas dégrader la durée de vie des turbines. De même, nous verrons par la suite que  $T_i$  doit rester voisin de  $\tau$ .

**Q4.** Montrer que dans ces conditions, la fonction de transfert  $H_P(p)$  peut être approchée par une fonction de transfert simplifiée dont on précisera les paramètres.

### B. Régulation complète de la turbine

On s'intéresse dans cette partie à la régulation complète (figure 5.5).

On admet que la fonction de transfert  $H_P(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)}$  s'écrit sous la forme :

$$H_P(p) = \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot \tau \cdot p^2 + 2 \cdot T_i \cdot p + 1}$$

On donne les constantes  $T_a = 10$  s et  $K_{ri} = 10^8$  W · s.

**Q5.** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{fo}(p) = \frac{\Delta f(p)}{\varepsilon_f(p)}$  pour  $\Delta P_c(p)$  et  $\Delta P_{cht}$  nuls.

Sur la figure 5.7 sont tracés les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $T_i = 10 \cdot \tau$  et  $T_i = 0,1 \cdot \tau$ .

**Q6.** Pour ces deux fonctions de transfert, placer sur les diagrammes :

**Q6a.** Préciser la légende.

**Q6b.** Placer les pulsations  $\frac{1}{\tau}$ ,  $\frac{1}{T_i}$  et  $\frac{1}{\sqrt{T_i \cdot \tau}}$ .

**Q6c.** Est-il préférable de régler  $T_i > \tau$  ou  $T_i < \tau$ ?

On considère que  $T_i = 20$  s.

**Q7.** Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de  $H_{fo}(p) = \frac{\Delta f(p)}{\varepsilon_f(p)}$ .

**Q8.** En assimilant le tracé de Bode réel du gain à son asymptote, calculer la marge de phase. Conclure sur les critères de stabilité et de précision du cahier des charges.

En utilisant l'expression approchée  $H_P(p) = \frac{1}{1 + 6 \cdot p}$  vue plus haut

**Q9.** Déterminer la FTBO approchée.

**Q10.** Superposer aux diagrammes asymptotiques précédents les diagrammes réels et asymptotiques. Le modèle approché est-il valide?

**Q11.** Vérifier alors le critère de rapidité du cahier des charges.

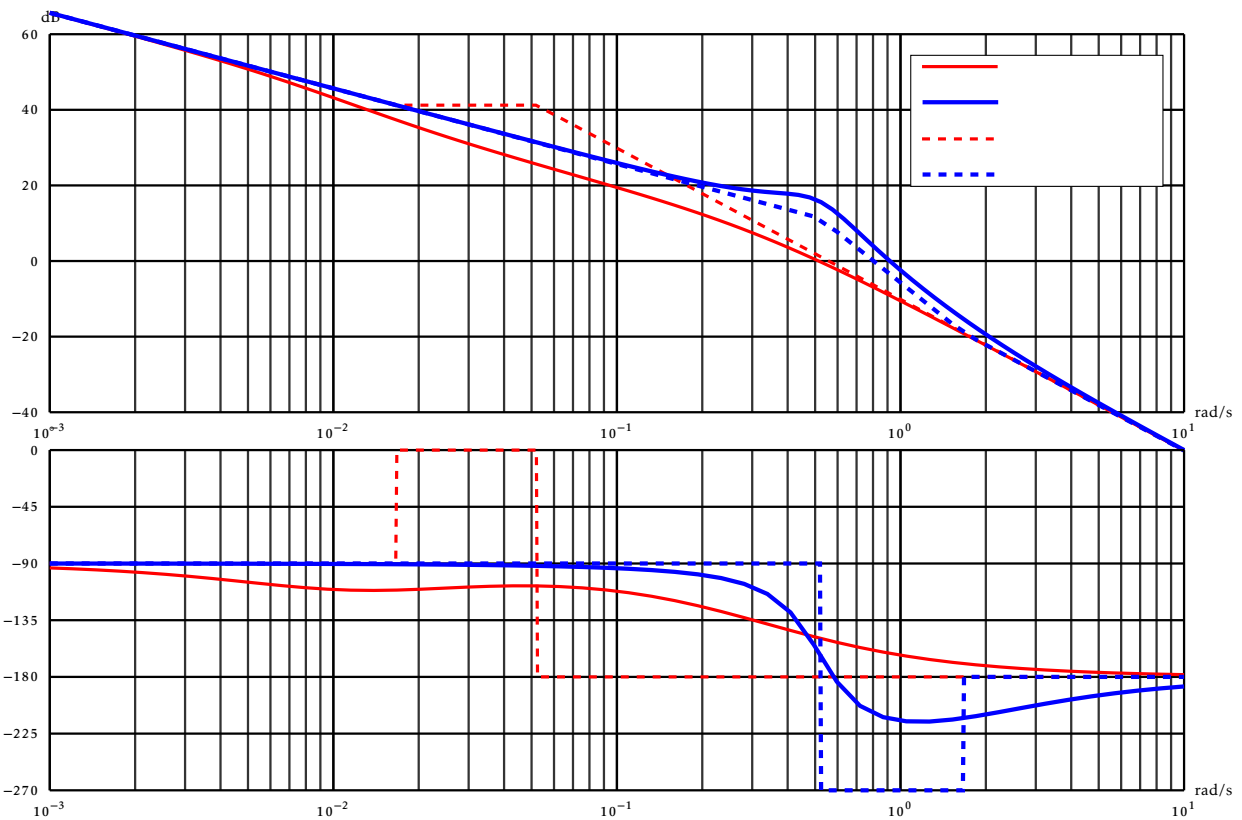
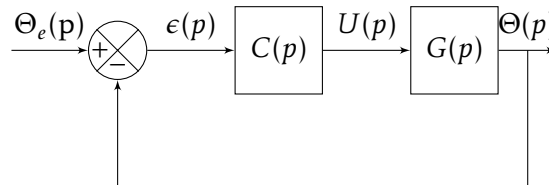


FIGURE 5.7 – Diagrammes de bode de la FTBO pour  $T_i = 10 \cdot \tau$  et  $T_i = 0,1 \cdot \tau$

## Exercice 2 - Précision et paramètres

Corrigé page 20

Le système étudié est un réacteur, dont on se propose de réguler la température.



L'équation différentielle reliant la température  $\theta(t)$  à la tension de commande  $u(t)$  s'écrit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + (4 + \alpha) \cdot \frac{d\theta}{dt} + 4 \cdot \alpha \cdot \theta(t) = 4 \cdot u(t)$$

Le paramètre  $\alpha$  a été identifié par plusieurs essais mais sa valeur, dépendante aux produits introduits dans le réacteur, n'est connue que par un encadrement :  $16 \leq \alpha \leq 20$ .

La régulation complète est représentée par le schéma bloc ci-dessus.

- $\Theta_e(p)$  : la transformée de Laplace de la température de consigne  $\theta_e(t)$ ;
- $\Theta(p)$  et  $U(p)$  les transformées de Laplace de  $\theta(t)$  et  $u(t)$ ;
- $C(p)$  : le régulateur.

Dans un premier temps, on choisit un régulateur proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Q1.** Déterminer la fonction de transfert  $G(p)$ .

**Q2.** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $G_F(p) = \frac{\Theta(p)}{\Theta_e(p)}$ . Mettre sous forme canonique.

**Q3.** Le système est-il stable ?

Q4. Déterminer  $K_p$  pour obtenir un coefficient d'amortissement  $z_f > 0,5$ .

Q5. Déterminer l'erreur indicielle pour un échelon de température de  $\Theta_0 = 20^\circ\text{C}$  en fonction du paramètre  $\alpha$ . Conclure sur la précision.

On choisit maintenant un régulateur proportionnel intégral :  $C(p) = K_p \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$ .

Q6. Déterminer la FTBO pour les valeurs suivantes de  $T_i$  et  $\alpha$  ;

—  $T_i = 1/20, T_i = 1/16$

—  $\alpha = 20, \alpha = 16$

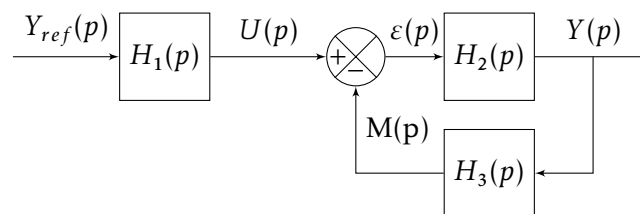
Q7. À partir du tracé des diagrammes de Bode de la FTBO pour chacun des cas (on prend  $K_p = 1$ ), déterminer le couple  $(T_i, K_p)$  tel que la marge de phase ( $M_p$ ) soit supérieure à  $45^\circ$  pour toutes les valeurs de  $\alpha$ .

Q8. Déterminer l'erreur indicielle pour un échelon de température de  $\Theta_0 = 20^\circ\text{C}$ .

### Exercice 3 - Précision et stabilité

Corrigé page 21

Soit le système décrit par le schéma bloc :



$$H_1(p) = \frac{5}{(1 + 16 \cdot p) \cdot (1 + 33 \cdot p)} \quad H_2(p) = \frac{15 \cdot k}{p(1 + p)} \quad H_3(p) = \frac{1}{1 + 0.1 \cdot p}$$

$y_{ref}(t) = Y_o$  est une consigne constante (échelon).

Q1. Déterminer la fonction de transfert  $O(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$  puis  $F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$ .

Q2. Déterminer la fonction de transfert  $G(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$ .

Q3. Déterminer la valeur finale de  $Y(t)$  pour  $k = 0,1, k = 0,5, k = 1$  et  $k = 5$ .

### Exercice 4 - Exosquelette pour le maniement de charges

Extrait de CCS TSI 2017

Corrigé page 22

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue (figure 5.8).

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée figure 5.9 montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.

Afin de s'assurer de minimiser l'erreur par rapport à cette consigne, on montre que cela revient à respecter une précision à la fois pour un échelon, une rampe et une accélération.

Le cahier des charges est décrit ci-dessous :

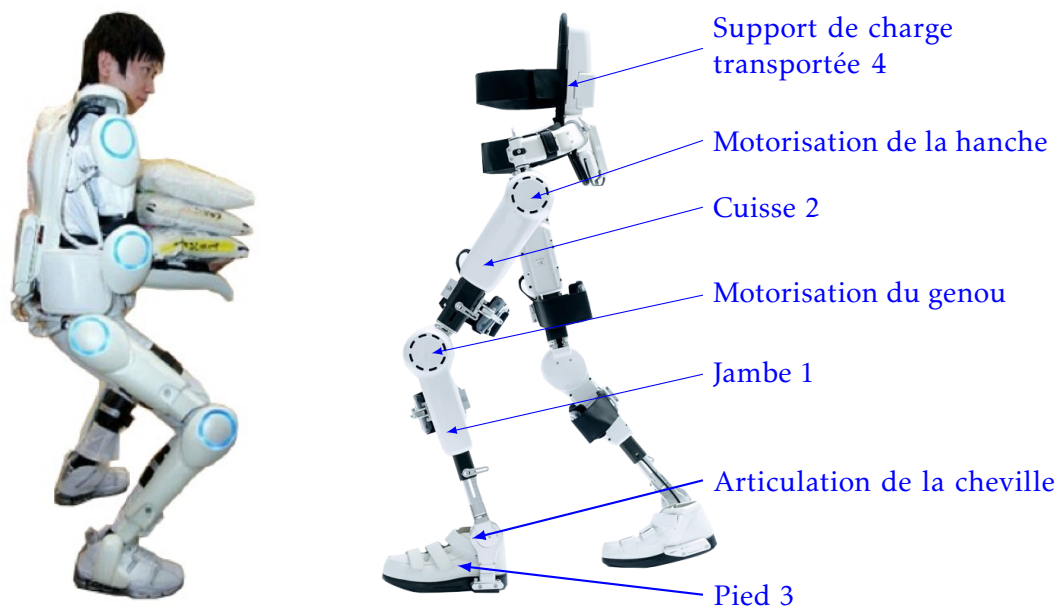


FIGURE 5.8 – Exosquelette

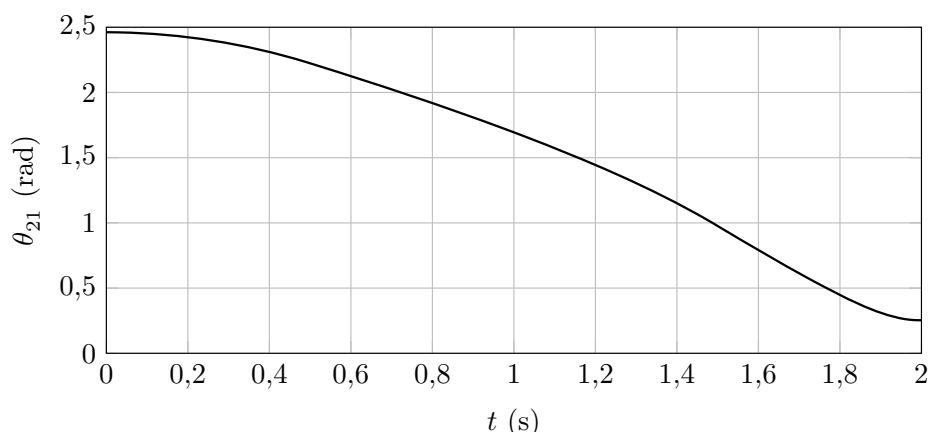


FIGURE 5.9 – Évolution de la consigne moteur

Exigences	Critères d'appréciation	Niveau
Gérer le mouvement	Précision statique de la boucle d'asservissement de position vertical	
	erreur de position	< 1%
	erreur de traînage	< 1%
	erreur d'accélération	< 1%

Selon le cahier des charges, pour assurer une bonne synchronisation des axes, l'exigence de précision statique suite à une entrée de type échelon, de type rampe ou de type accélération doit être inférieure à 1%.

Le premier modèle défini figure 5.10 est adopté pour chaque axe. Les notations utilisées sont précisées dans le tableau 5.3.

Le correcteur de l'asservissement de vitesse est de la forme  $C_{\Omega}(p) = K_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$  avec  $T_i$  réglé afin de compenser le pôle dominant pour la situation correspondant à l'inertie moyenne,  $T_i = \frac{J}{f}$ .

L'écart est défini par la variable  $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ .

La précision statique du système est définie par les paramètres suivants :

— Erreur de position :  $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$  suite à une entrée de type échelon unitaire  $\theta_{mC}(t) = \mathcal{H}(t)$ .

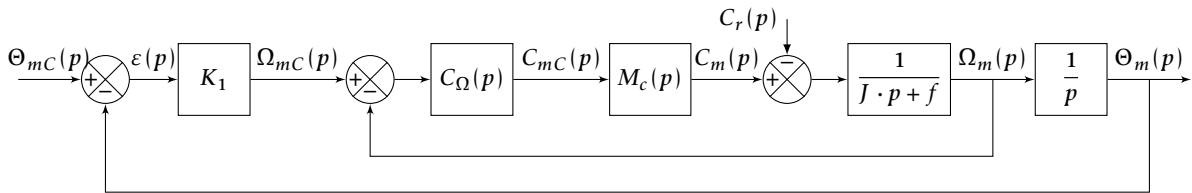


FIGURE 5.10 – Premier modèle

- Erreur de traînage :  $\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$  suite à une entrée de type échelon unitaire  $\theta_{mC}(t) = t \cdot \mathcal{H}(t)$ .
- Erreur en accélération :  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$  suite à une entrée de type échelon unitaire  $\theta_{mC}(t) = t^2 \cdot \mathcal{H}(t)$ .

avec  $\mathcal{H}(t)$  la fonction de Heaviside.

On rappelle la transformée de Laplace de  $t^n \cdot \mathcal{H}(t)$  :  $\frac{n!}{p^{n+1}}$  pour  $n > 1$ .

$\Theta_{mC}(p)$	consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_{mC}(t)$ en rad)
$\Theta_m(p)$	position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_m(t)$ en rad)
$C_{mC}(p)$	consigne de couple moteur (variable temporelle : $C_{mC}(t)$ en $N \cdot m$ )
$C_m(p)$	couple moteur (variable temporelle : $c_m(t)$ en $N \cdot m$ )
$C_r(p)$	couple résistant perturbateur (variable temporelle : $c_r(t)$ en $N \cdot m$ )
$K_1$	gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en $s^{-1}$ )
$\Omega_{mC}(p)$	consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_{mC}(t)$ en $rad \cdot s^{-1}$ )
$\Omega_m(p)$	vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_m(t)$ en $rad \cdot s^{-1}$ )
$C_\Omega(p)$	correcteur de l'asservissement de vitesse
$M_c(p)$	modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles : $M_c(p) = 1$
$J$	moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur
$f$	coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement

Tableau 5.3 – Notations

On considère dans un premier temps que le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude  $c_r(t) = 0$ .

**Q1.** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Q2.** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\Theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Q3.** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Q4.** Déterminer l'erreur en accélération  $\varepsilon_a$  et conclure quant au respect du cahier des charges.

Afin de satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, on choisit d'installer une correction par anticipation de la vitesse (figure 5.11) est adopté.

Pour cette partie, on prend :  $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + T \cdot p}$  avec  $T = 33 \text{ ms}$ .

**Q5.** Déterminer  $H_{2\Theta}(p) = \frac{\Theta_m(p)}{\Theta_{mC}(p)}$ . La fonction de transfert est-elle stable ?

**Q6.** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction  $\Theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

**Q7.** Le modèle par anticipation a-t-il une influence sur l'erreur de position  $\varepsilon_p$  ?

**Q8.** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant d'annuler cette erreur.

**Q9.** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération  $\varepsilon_a$  en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

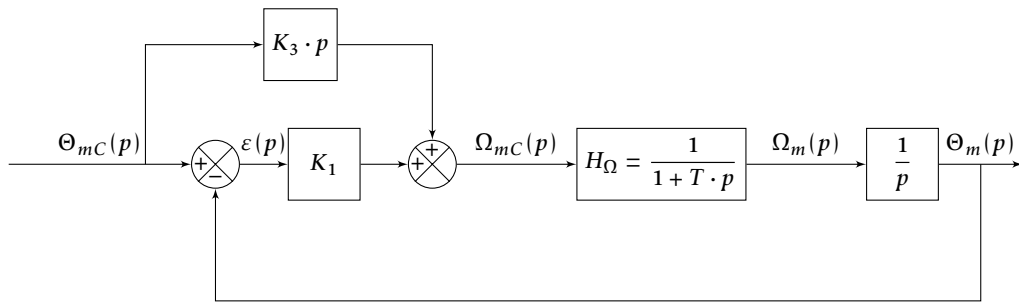


FIGURE 5.11 – Second modèle

Nous avons considéré au-dessus que le couple résistant est négligeable, on considère maintenant que  $c_r(t) = C_{r0} \cdot \mathcal{H}(t)$  avec  $C_{r0}$  un couple résistant constant.

**Q10.** Déterminer  $\Theta_m(p)$  sous la forme  $\Theta_m(p) = H_\Theta \cdot \Theta_{mC}(p) + H_{Cr}(p) \cdot C_r(p)$ .

**Q11.** Déterminer  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_m(t))$  pour  $\theta_{mC}(t) = \Theta_0 \mathcal{H}(t)$  et  $c_r(t) = C_{r0} \cdot \mathcal{H}(t)$ .