

Correction des systèmes asservis

7.1 Nécessité de la correction

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les systèmes asservis pouvaient présenter des défauts, une précision insuffisante, une stabilité trop relative (voire une instabilité), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservi un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans détériorer les autres. Les correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité du système étudié.

On distingue deux modes principaux de correction :

La correction série : le correcteur est placé dans la boucle du système asservi en aval du système à corriger (figure 7.1). Il génère, à partir de l'erreur $\varepsilon(t)$, le signal de commande $u(t)$;

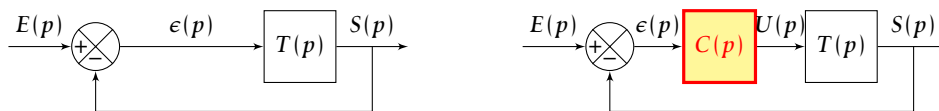


FIGURE 7.1 – Correction en série

La correction en réaction : dans ce principe, on améliore le fonctionnement en ajoutant une boucle interne permettant d'améliorer le comportement dynamique d'une partie du système (figure 7.3).

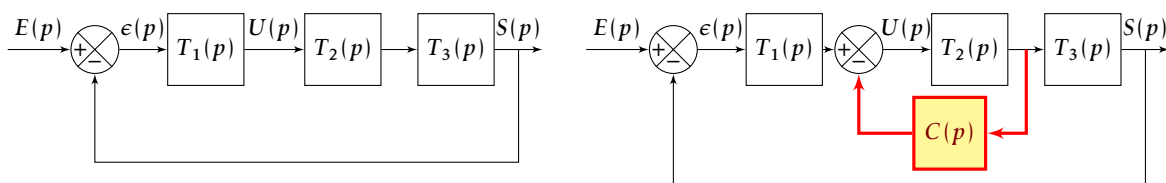


FIGURE 7.2 – Correction en réaction

Il est bien sûr possible de combiner les deux structures.

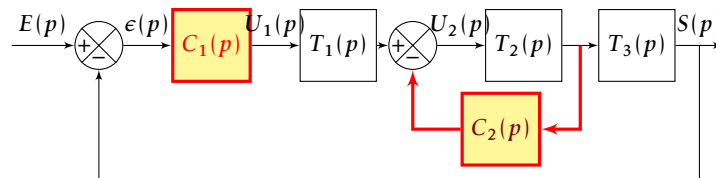


FIGURE 7.3 – Correction en réaction

Il existe d'autres modes de correction qui ne seront pas abordés dans le cadre de ce manuel.

7.2 Principaux réseaux correcteurs

7.2.1 Correcteur proportionnel (P)

a) Principe

Ce correcteur élémentaire est le correcteur de base. Il permet de régler le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte. La fonction de transfert du correcteur est :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p.$$

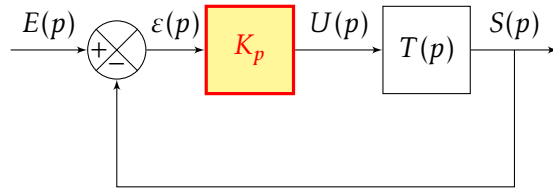


FIGURE 7.4 – Correction proportionnelle

b) Effet

Si la fonction de transfert en boucle ouverte du système non corrigé $T(p)$ ne possède pas d'intégration.

$$T(p) = \frac{K_s \cdot N(p)}{p^\alpha D(p)} \quad \text{avec } \alpha = 0$$

$$T(p) = \frac{K_s \cdot N(p)}{D(p)}$$

avec $N(0) = D(0) = 1$ et K_s le gain statique.

La fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé s'écrit :

$$BO_c(p) = K_p \cdot T(p) = \frac{K_p \cdot K_s \cdot N(p)}{D(p)}$$

Nous avons vu lors de l'étude de la précision que l'erreur indicielle ε_i d'un système ne possédant pas d'intégration est de la forme :

$$\varepsilon_i = \frac{E_O}{1 + K}$$

avec dans ce cas, $K = K_p \cdot K_s$.

Le correcteur proportionnel permet donc, en augmentant le gain de la FTBO, d'améliorer la précision du système à condition de rester dans la limite de la stabilité du système.

La figure 7.5 montre l'effet du correcteur proportionnel sur un système du second ordre. On remarque, lorsque le gain augmente que :

— pour la réponse temporelle :

- l'erreur indicielle ε_i diminue,
- la sortie est de plus en plus oscillante,
- le dépassement d augmente,
- le temps de montée diminue,
- la pseudo-période T_p diminue (ω_p augmente).

— pour la réponse fréquentielle :

- le diagramme d'amplitude est décalé vers le haut (la phase reste inchangée),
- la bande passante de la FTBO augmente, le temps de montée est donc réduit d'autant (Cf. chapitre ?? page ??).

Si la fonction de transfert du système non corrigé comporte une intégration.

$$T(p) = \frac{K_s \cdot N(p)}{p \cdot D(p)} \quad \text{avec } \alpha = 1$$

avec $N(0) = D(0) = 1$ et K_s le gain statique.

7.2 Principaux réseaux correcteurs

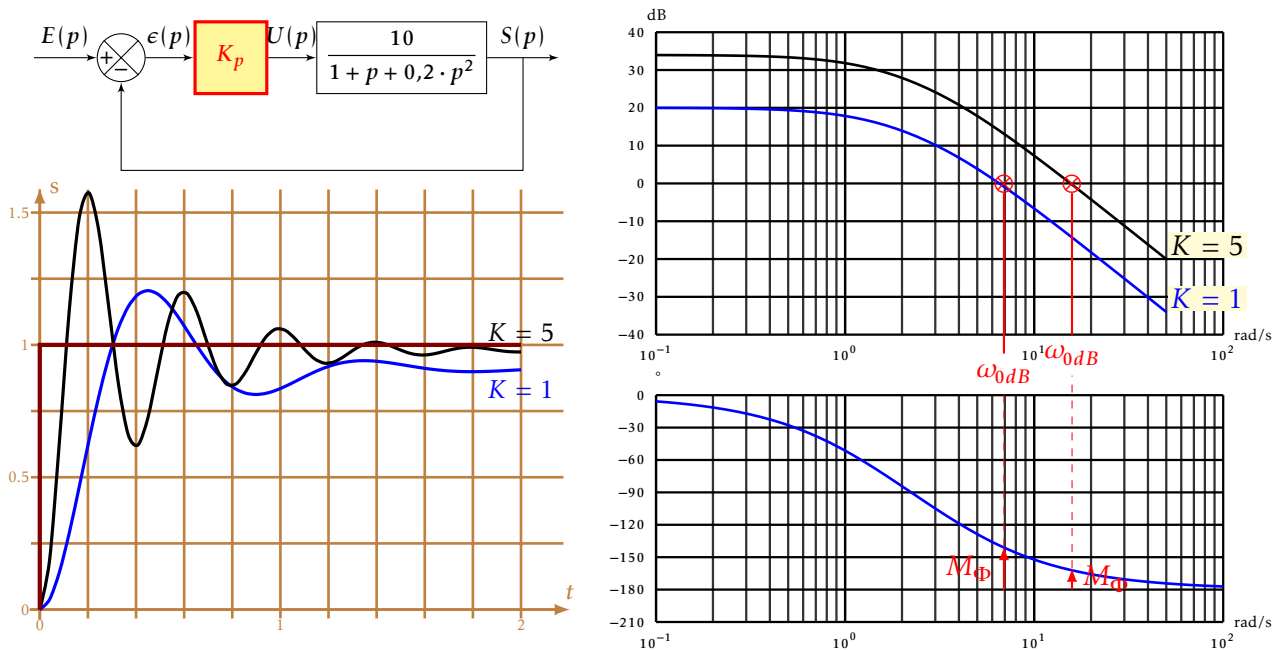


FIGURE 7.5 – Influence d'un correcteur proportionnel

La fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé s'écrit :

$$BO_c(p) = K_p \cdot T(p) = \frac{K_p \cdot K_s \cdot N(p)}{p \cdot D(p)}$$

Le système est déjà naturellement précis pour une entrée en échelon $\varepsilon_i = 0$. Le correcteur proportionnel n'a donc pas d'effet direct sur l'erreur indicielle, par contre en décalant la courbe de gain vers le haut, le système peut devenir oscillant voire instable.

On sait aussi que l'erreur de traînage est de la forme :

$$\varepsilon_t = \frac{A}{K}$$

avec $K = K_p \cdot K_s$.

La correction proportionnelle permet donc pour un système classe $\alpha = 1$ de diminuer l'erreur de traînage.

7.2.2 Correcteur intégral (I)

Pour un intégrateur pur ou idéal, la loi de commande $u(t)$ est de la forme :

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(u) \cdot du$$

d'où la fonction de transfert

$$C_i(p) = \frac{1}{T_i \cdot p}$$

Ce type de correcteur peut être réalisé avec une bonne approximation par un montage intégrateur à base d'amplificateurs opérationnels.

Effets du correcteur intégral

Le correcteur apporte une intégration dans la chaîne de commande.

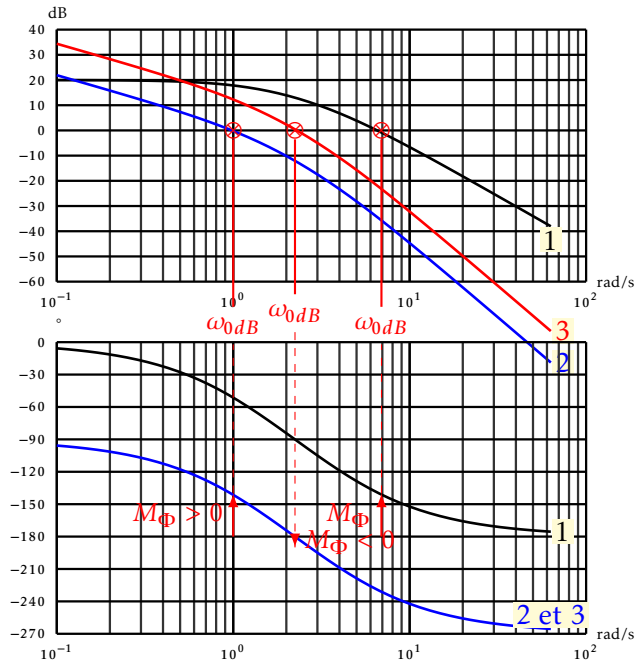
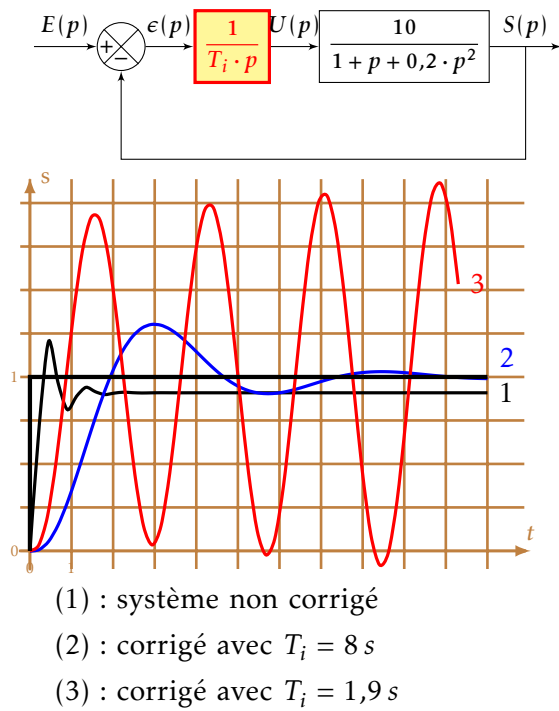


FIGURE 7.6 – Effets d’un correcteur intégral

Cette intégration dans la FTBO permet d’annuler l’erreur statique pour une entrée en échelon, l’intérêt principal de ce type de correcteur est donc d’améliorer la précision.

Il introduit malheureusement un déphasage de -90° et risque donc de rendre le système instable par diminution de la marge de phase. On retrouve ces effets, sur l’exemple de la figure 7.6, le système non corrigé, n’est pas précis, l’intégration rend le système précis mais peut aussi le rendre instable.

On constate aussi sur la réponse temporelle que l’intégrateur diminue le temps de réponse du système (diminution de la bande passante de la FTBO \Rightarrow diminution de la bande passante de la FTBF \Rightarrow augmentation du temps de montée \Rightarrow augmentation du temps de réponse).

Compte tenu de tous ces défauts, ce correcteur est rarement utilisé seul.

7.2.3 Correcteur proportionnel intégral (P.I.)

Le correcteur intégrateur idéal est en général associé au correcteur proportionnel. La loi de commande de ce correcteur est alors de la forme :

$$u(t) = K_p \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(u) du \right)$$

d’où la fonction de transfert :

$$C_{pi}(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) = K_p \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$$

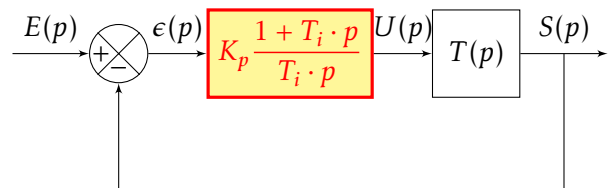


FIGURE 7.7 – Correction proportionnelle intégrale

a) Diagrammes de Bode

Ce correcteur possède deux paramètres de réglage :

- K_p n’agit que sur le gain (fig. 7.8a), la courbe de gain est translatée en fonction de K_p ;
- T_i , la constante d’intégration agit principalement sur la phase pour les pulsations inférieures $\frac{1}{T_i}$ (fig. 7.8b), les courbes sont translatées le long de l’axe des pulsations.

7.2 Principaux réseaux correcteurs

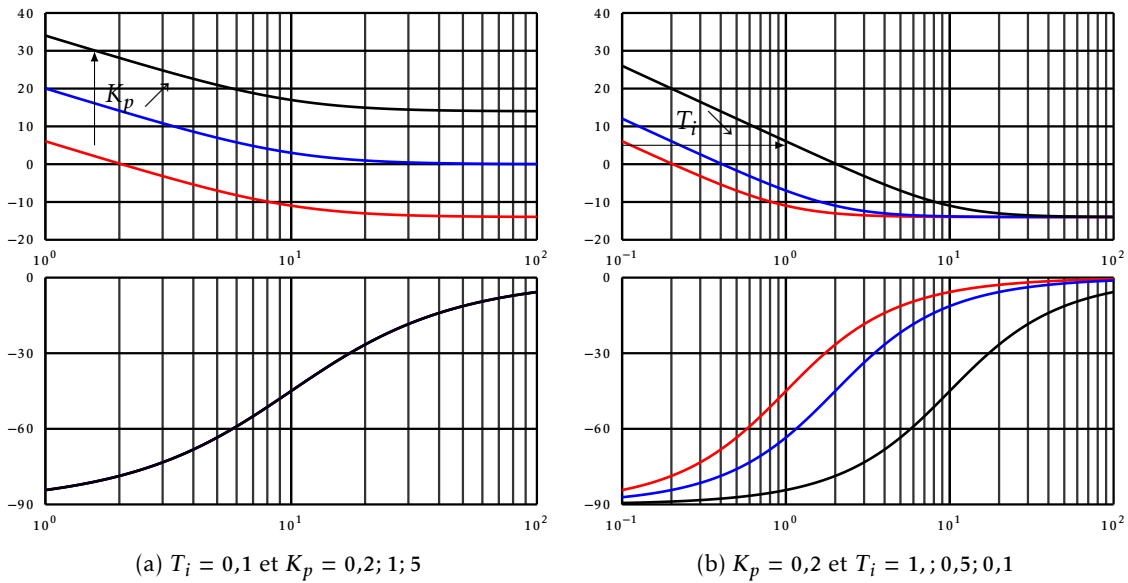


FIGURE 7.8 – Correcteur P.I., influence de K_p et T_i

b) Effets

Le correcteur P.I. permet d'améliorer aussi bien :

Le comportement statique : par la présence de l'intégration dans la FTBO, l'erreur indicielle est nulle.

Le comportement dynamique : le numérateur $(1 + T_i \cdot p)$ apporte une phase positive dans la zone critique, celle-ci permet d'améliorer la marge de phase en pondérant l'effet négatif de l'intégration.

Un choix judicieux du gain K_p et de la constante d'intégration T_i permet ainsi d'améliorer le comportement du système sans trop dégrader la stabilité et la rapidité comme le montre l'exemple de la figure 7.9.

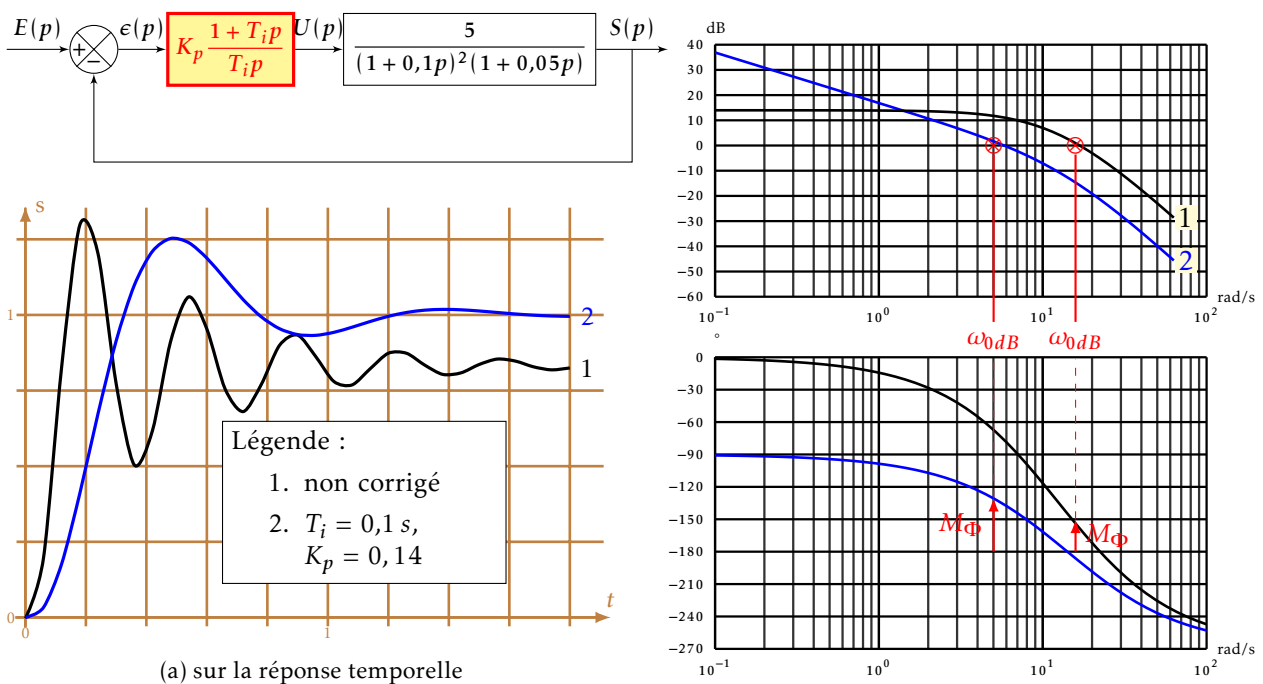


FIGURE 7.9 – Influence d'un correcteur P.I.

c) Détermination du correcteur

Cette partie n'est qu'une approche de la détermination du correcteur, elle présente, de manière succincte, deux méthodes, l'une algébrique, l'autre expérimentale.

Exemple guidé : Détermination du correcteur P.I. par la méthode du pôle dominant

Le principe de cette méthode est d'éliminer de la FTBO le pôle dominant, c'est-à-dire le pôle avec la plus grande constante de temps.

Soit un système (fig. 7.9) dont la fonction de transfert est

$$\frac{5}{(1 + 0,1 \cdot p)^2(1 + 0,05 \cdot p)}$$

On se propose d'améliorer le comportement temporel en rendant ce système précis pour une entrée de type échelon en insérant un correcteur de type P.I..

La procédure est la suivante :

1. Identifier la constante de temps la plus grande - ici $T_{max} = 0,1 \text{ s}$.
2. Choisir $T_i = T_{max} = 0,1 \text{ s}$ le correcteur devient $C_i(p) = K_p \frac{1 + 0,1 \cdot p}{0,1 \cdot p}$.
3. Tracer les diagrammes de Bode (figure 7.10) pour $K_p = 1$.
4. Déterminer K_p afin d'obtenir les marges de gain et de phase souhaitées, on lit sur le diagramme de Bode de la figure 7.10 $K'_{dB} = -17 \text{ dB}$, d'où $K_p = 10^{\frac{-17}{20}} \approx 0,14$ pour obtenir une marge de phase de 45° . La réponse temporelle et les diagrammes de Bode corrigés sont représentés sur la figure 7.9.

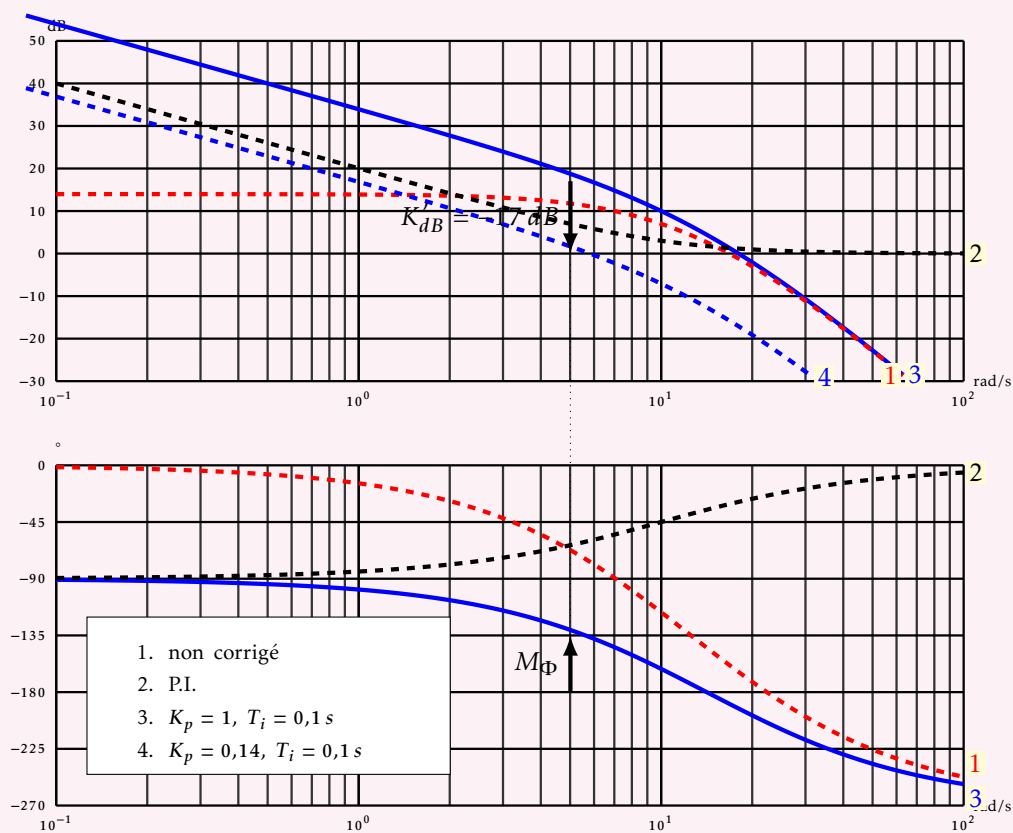


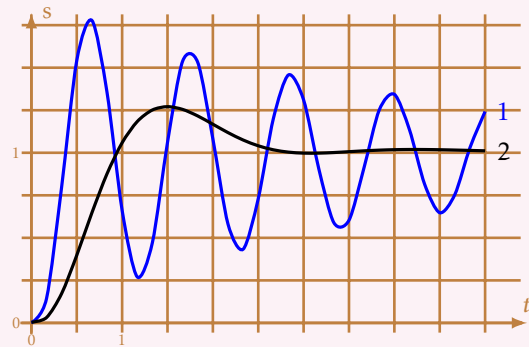
FIGURE 7.10 – Régulation du correcteur P.I., méthode du pôle dominant

Exemple guidé : Méthode expérimentale

La fonction de transfert du système n'est pas connue algébriquement mais uniquement par sa réponse fréquentielle (fig. 7.12) déterminée expérimentalement et sa réponse temporelle. On constate que le système est fortement oscillant (marge de phase trop petite !) et qu'il n'est pas précis. On se propose d'installer un correcteur de type P.I. pour améliorer la précision.

La procédure de réglage est la suivante :

- Déterminer la pulsation ω_{0dB} pour laquelle le module en dB est nul, ici $\omega_{0dB} = 5,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Régler $T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}} \approx 1,9 \text{ s}$ puis tracer le correcteur pour $K_p = 1$.
- Tracer le diagramme de Bode de la fonction corrigée en sommant le graphe expérimental du système et celui du correcteur ($K_p = 1$).
- Déterminer graphiquement K_p pour avoir la marge de phase désirée, ici pour avoir une marge de phase de 45° il faut « descendre » la courbe de gain de 14 dB d'où $K_p = 10^{\frac{-14}{20}} \approx 0,19$.



1. Non corrigé
2. Corrigé : $K_p = 0,19, T_i = 1,9 \text{ s}$

FIGURE 7.11 – Réponse temporelle

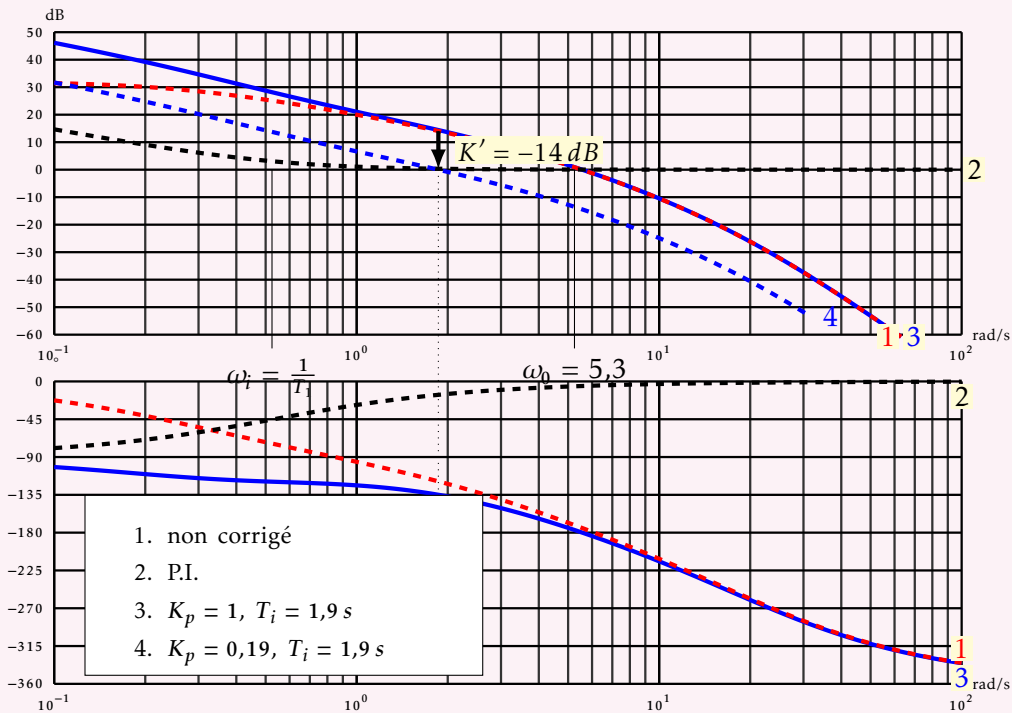


FIGURE 7.12 – Réglage du correcteur P.I., méthode expérimentale

Après réglage du correcteur, on obtient la courbe de réponse temporelle figure 7.11, on constate que la réponse est beaucoup moins oscillante.

Remarque : La FTBO tracée est $T(p) = \frac{50}{(1+4p+p^2) \cdot (1+0,05p)^2}$

7.2.4 Correcteur proportionnel dérivateur (P.D.)

a) Dérivateur idéal

On appelle dérivateur idéal un correcteur dont la loi de commande du correcteur est de la forme :

$$u(t) = T_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad \text{soit} \quad C_{di}(p) = T_d \cdot p$$

avec T_d la constante de temps de dérivation.

Le correcteur dérivateur idéal est un correcteur purement théorique qui ne peut exister, en effet le gain de ce correcteur est infini lorsque la pulsation tend vers l'infini. Il ne respecte pas le principe de causalité en effet le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur.

b) Dérivateur réel

Les circuits électroniques (à base d'amplificateurs opérationnels) permettent de réaliser une forme approchée du dérivateur :

$$C_{dr}(p) = \frac{T_d \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{avec } \tau \ll T_d$$

Le circuit se comporte comme un dérivateur pur pour des pulsations inférieures à $\omega_{lim} \ll \frac{1}{\tau}$.

Effet Le correcteur dérivé apporte une avance de phase de $+90^\circ$ pour les basses fréquences. Il a un effet stabilisant en augmentant la marge de phase. Le correcteur dérivé ne s'utilise jamais seul, car il dégrade la précision en diminuant la classe du système.

c) Proportionnel dérivateur

La loi de commande du correcteur proportionnel dérivateur est de la forme :

$$u(t) = K_p \left(\varepsilon(t) + T_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$$

Comme le dérivateur idéal, il ne peut exister de correcteur P.D. idéal dont la fonction de transfert serait :

$$C_{P.D.i}(p) = K_p (1 + T_d \cdot p)$$

Il est par contre possible de réaliser un correcteur P.D. approché de forme :

$$C_{P.D.}(p) = K_p \frac{1 + T_d \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{avec } \tau \ll T_d$$

Malgré tout, dans nos calculs, nous considérerons que le correcteur est idéal.

Effet Le correcteur P.D. (réel ou idéal) permet d'apporter une phase positive de $+90^\circ$ pour les hautes fréquences. Le correcteur P.D. améliore ainsi très sensiblement la marge de phase. Il a un fort effet stabilisant sans détériorer la précision.

Remarque : Pour la suite, lorsque nous aurons à étudier un correcteur P.D., en l'absence d'information contraire, il s'agira (malgré la remarque précédente) d'un correcteur P.D. idéal.

Remarque 2 : Ce correcteur n'est pas explicitement au programme mais permet de comprendre l'effet du correcteur à avance de phase.

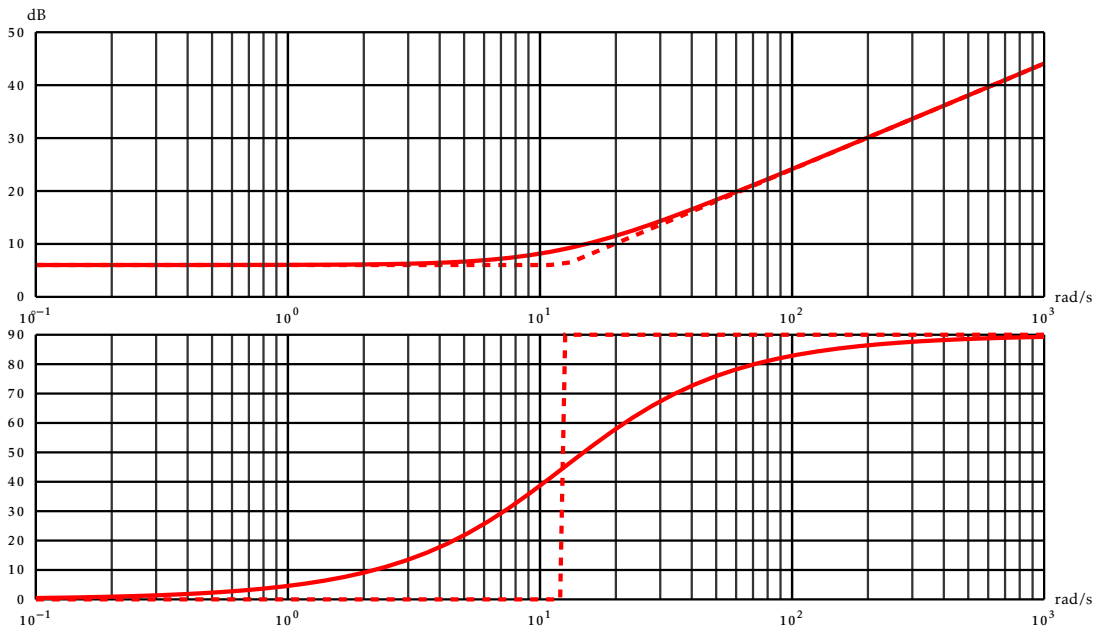


FIGURE 7.13 – Diagrammes de Bode du correcteur P.D. idéal

d) Détermination

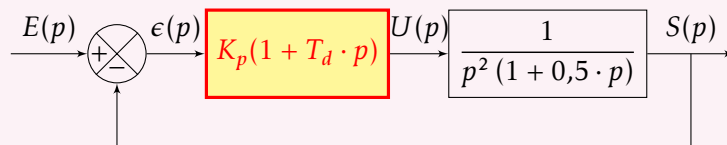
La méthode du pôle dominant peut comme pour le correcteur P.I. être utilisée, sinon de manière générale on détermine la constante de temps du correcteur de telle sorte que le correcteur apporte une phase positive avant le point critique.

Exemple guidé : Détermination du correcteur P.D. (méthode pratique)

Soit un système dont on souhaite qu'il soit précis, aussi bien pour une entrée en échelon que pour une rampe. Ce système est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{1}{p^2 (1 + 0,5 \cdot p)}$$

Ce système est instable (deux intégrateurs dans la boucle ouverte + un premier ordre). On souhaite le stabiliser en restant précis pour les deux signaux.



On installe un correcteur P.D. (idéal pour faciliter les calculs) dans la chaîne directe.

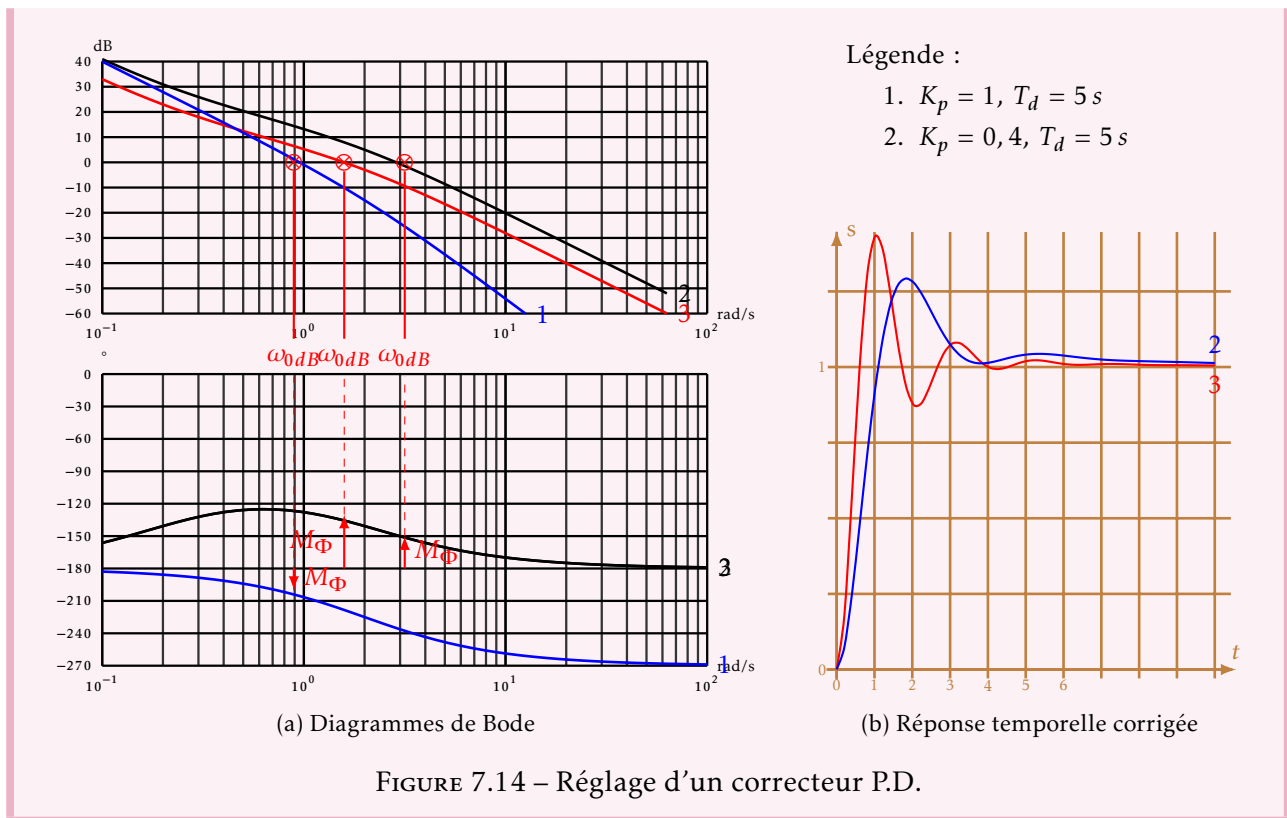
La FTBO s'écrit $BO(p) = K_p \frac{1 + T_d \cdot p}{p^2 (1 + 0,5 \cdot p)}$

1. Choisir la constante de dérivation $T_d = 10 \cdot T_{max} = 5 \text{ s}$ avec $T_{max} = 0,5 \text{ s}$ la plus grande des constantes de temps et dans un premier temps $K_p = 1$. La FTBO devient

$$BO(p) = \frac{1 + 5 \cdot p}{p^2 (1 + 0,5 \cdot p)}$$

2. Tracer les diagrammes de Bode du système corrigé (fig. 7.14a).
3. Déterminer K_p pour améliorer la marge de phase, ici pour une marge de phase de -45° il faut « descendre » la courbe de 8 dB soit $K_p = 10^{\frac{-8}{20}} \approx 0,4$.

On constate, sur la réponse temporelle (fig. 7.14b), que les objectifs sont atteints.



7.2.5 Correcteur à avance de phase

Le correcteur à avance de phase est défini par la fonction de transfert :

$$C_{ap} = K_p \frac{1 + a \cdot T_a \cdot p}{1 + T_a \cdot p} \quad \text{avec } a > 1$$

Remarque : Si a est très grand on retrouve un correcteur proportionnel dérivateur réel.

a) Diagrammes de Bode

On remarque, sur le diagramme de phase (fig. 7.15), la principale caractéristique du correcteur à avance de phase, le correcteur ne modifie la phase que localement, sans influence sur les basses et hautes fréquences. Le module lui aussi est peu modifié, le gain des hautes fréquences est augmenté de $20 \log a$, les basses fréquences étant inchangées.

Le maximum de l'argument est atteint pour

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot T_a}$$

c'est-à-dire la moyenne géométrique des pulsations $\omega_{T_a} = \frac{1}{T_a}$ et $\omega_{aT_a} = \frac{1}{a \cdot T_a}$.

Pour la pulsation ω_{max} , on a :

$$\text{Argument } \Phi(\omega_{max}) = \arctan\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right) = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right);$$

$$\text{Module (dB)} \quad A_{dB}(\omega_{max}) = 10 \log a.$$

b) Effets

Le correcteur à avance de phase permet de modifier localement l'argument en ajoutant une phase positive en modifiant peu le gain de la FTBO.

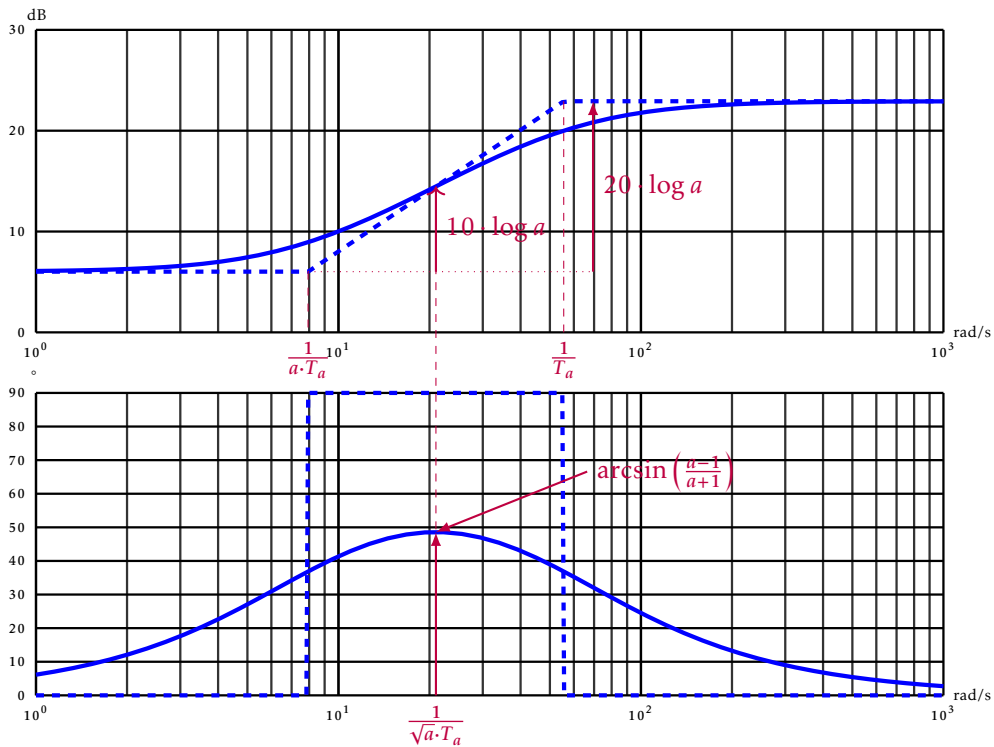


FIGURE 7.15 – Correcteur à avance de phase

Il permet :

- de modifier localement la courbe de phase avec un effet réduit sur la courbe de gain;
- d’améliorer les marges de stabilité (effet stabilisant);
- d’améliorer la bande passante du système et d’augmenter la rapidité.

Il est en général associé à un correcteur P.I. qui assure la précision, le correcteur à avance de phase va permettre de diminuer les effets négatifs du correcteur P.I. (oscillations) en augmentant la marge de phase.

c) Réglage du correcteur

Exemple guidé : Réglage du correcteur à avance de phase - Pôle dominant

Si la FTBO est algébriquement connue, on cherche à annuler la constante de temps T_{max} du pôle dominant avec le numérateur du correcteur, on en déduit la constante de temps du numérateur $a \cdot T_a = T_{max}$. On détermine ensuite a en fonction de l’avance de phase souhaitée, on termine le gain expérimentalement.

Exemple guidé : Réglage du correcteur à avance de phase - Méthode expérimentale itérative

Si la FTBO n’est connue que par ses diagrammes de Bode (figure 7.16).

1. On recherche la pulsation ω_{0dB} pour laquelle le module en dB de la FTBO est nul, ici $\omega_{0dB} = 2,25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. On mesure la marge de phase pour cette pulsation, ici $M_{p1} \approx 7^\circ$.
3. On détermine a pour obtenir la marge de phase désirée

$$M_{p1} + \arctan\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right) = 45^\circ \text{ soit } a \approx 4,2.$$

4. On centre ensuite sur ω_{0dB} le correcteur, on a donc : $\frac{1}{\sqrt{a} \cdot T_a} = \omega_{0dB}$ soit ici $T_a \approx 0,216 \text{ s}$.
5. À partir des valeurs calculées de a et T_a on trace le diagramme corrigé pour $K_p = 1$.
6. On détermine ensuite K_p de telle sorte que pour la pulsation ω_{0dB} le gain de la FTBO corrigé soit nul, soit $K_p = 10^{\frac{-10 \cdot \log(a)}{20}} \approx 0,48$.
7. On trace ensuite le diagramme corrigé, la réponse temporelle montre que le réglage est correct (fig. 7.16a).

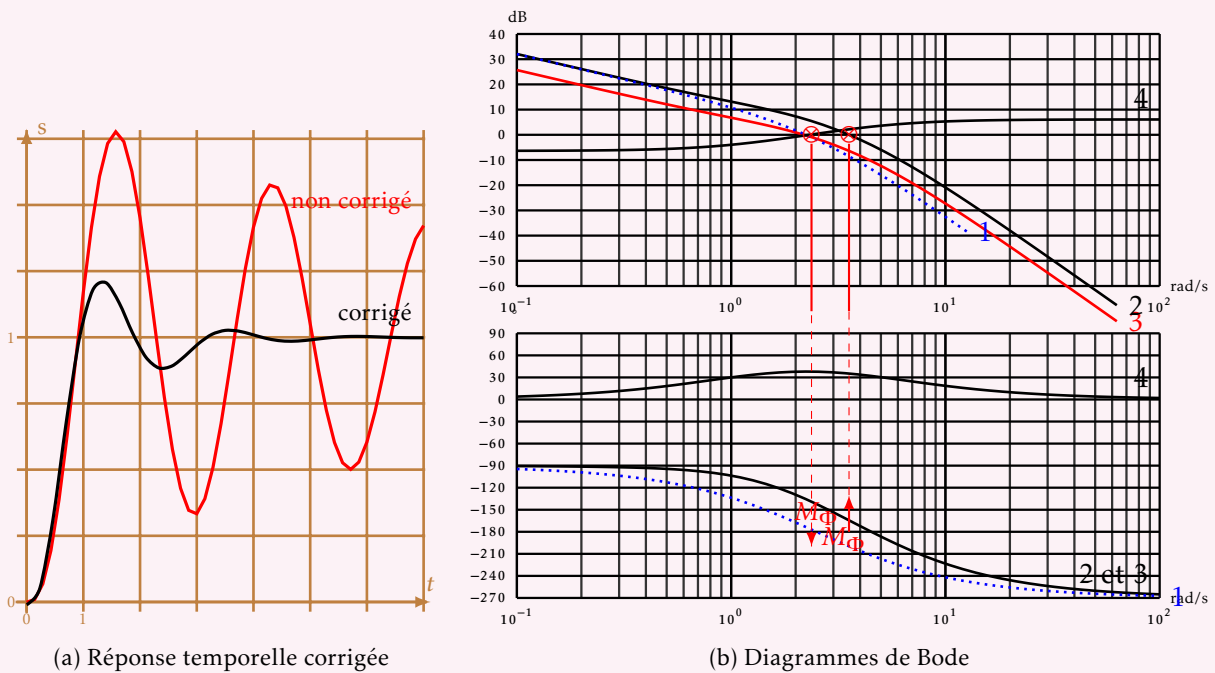


FIGURE 7.16 – Régulation d'un correcteur à avance de phase

Remarque : La FTBO non corrigée tracée ci-dessus est $T(p) = \frac{4}{p \left(1 + \frac{2}{2,5}p + \frac{p^2}{2,5^2} \right)}$.

7.2.6 Correcteur à retard de phase

Le correcteur à retard de phase est le correcteur complémentaire du correcteur à avance de phase :

$$C_{rp}(p) = K_p \frac{1 + T_r \cdot p}{1 + b \cdot T_r \cdot p} \text{ avec } b > 1.$$

Pour $b \gg 1$ ce correcteur est une forme approchée du correcteur P.I.

On l'utilise surtout pour sa capacité à diminuer le module de la FTBO pour les hautes fréquences.

Il doit être manipulé avec précaution, car il peut rendre le système instable. Il est souvent associé à un correcteur à avance de phase.

7.2.7 Correcteur à retard-avance de phase

Le correcteur à avance-retard (ou retard-avance) combine les deux correcteurs précédents :

$$C_{avr}(p) = K_p \frac{1 + T_r \cdot p}{1 + b \cdot T_r \cdot p} \frac{1 + a \cdot T_a \cdot p}{1 + T_a \cdot p}$$

7.2 Principaux réseaux correcteurs

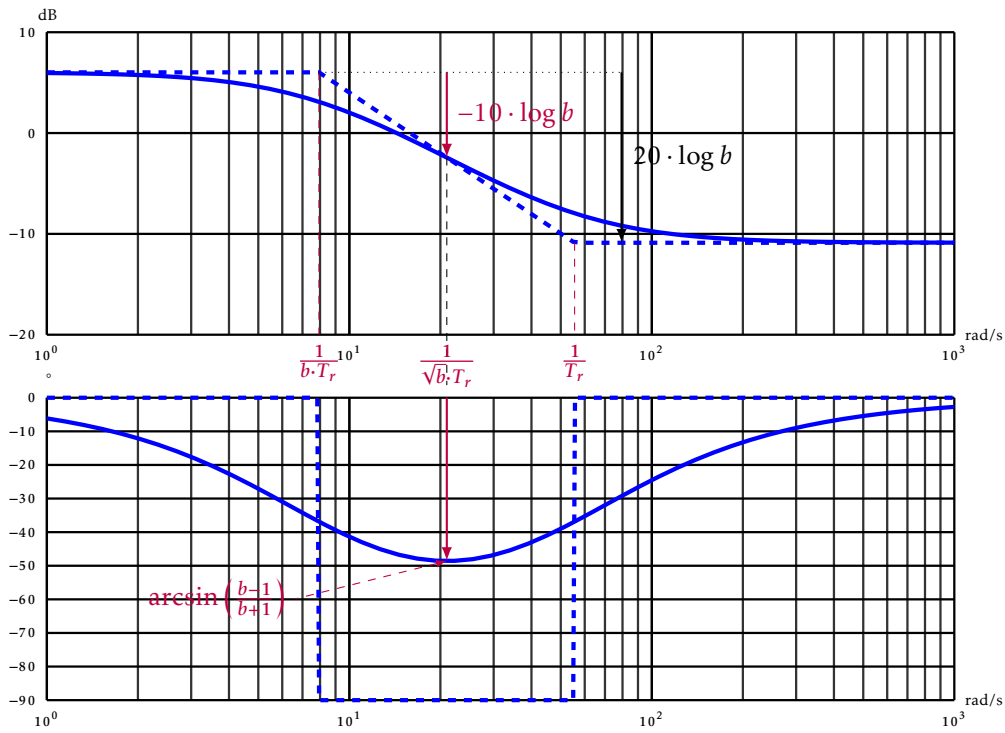


FIGURE 7.17 – Correcteur à retard de phase

avec $b > 1$ et $a > 1$. On choisit souvent $a = b$.

On voit bien sur les diagrammes de Bode de la figure 7.18 les propriétés de ce correcteur.

- Pas d'effet sur les basses et hautes fréquences aussi bien pour le gain que pour la phase.
- Il existe une pulsation pour laquelle le gain est fortement diminué sans que l'argument soit modifié.

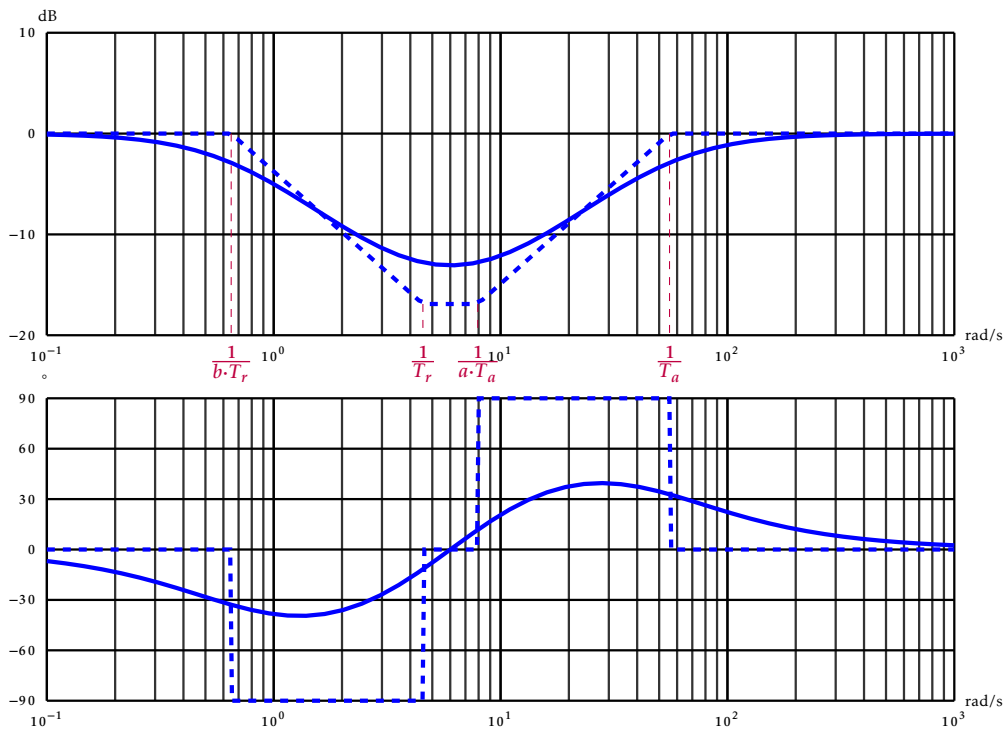


FIGURE 7.18 – Correcteur à avance-retard de phase

Ce correcteur combine les avantages des correcteurs à avance de phase et à retard de phase. On

l'utilise pour améliorer la marge de phase autour du point critique.

Correctement placé, il permet d'augmenter la bande passante et donc la rapidité du système.

7.2.8 Correcteur P.I.D.

Le correcteur P.I.D. combine les effets des correcteurs proportionnel, intégrateur et dérivé. La loi de commande de ce correcteur est donc une combinaison de ces trois fonctions, plusieurs structures sont possibles.

Remarque : Le correcteur P.I.D n'est pas explicitement au programme mais ce correcteur peut être considéré comme la mise en série d'un correcteur P.I et d'un correcteur à avance de phase qui sont tous les deux au programme.

a) Structure des correcteurs P.I.D.

P.I.D. parallèle : (fig. 7.19)

$$C(p) = K_p + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p$$

$$C(p) = \frac{1 + K_p \cdot T_i \cdot p + T_d \cdot T_i \cdot p^2}{T_i \cdot p}$$

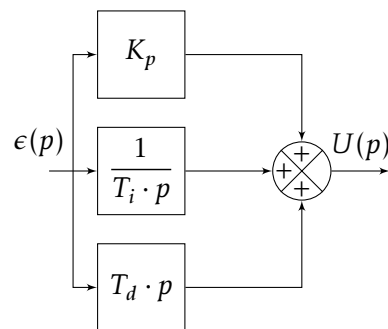


FIGURE 7.19 – P.I.D. parallèle

P.I.D. mixte : (fig. 7.20)

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right)$$

$$C(p) = \frac{K_p \cdot (1 + T_i \cdot p + T_d \cdot T_i \cdot p^2)}{T_i \cdot p}$$

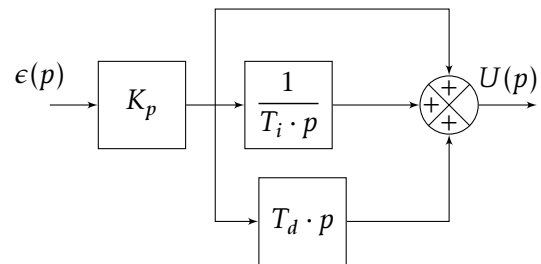


FIGURE 7.20 – P.I.D. mixte

P.I.D. série : (fig. 7.21)

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) (1 + T_d \cdot p)$$

$$C(p) = \frac{K_p \cdot (T_i \cdot p + 1)(1 + T_d \cdot p)}{T_i \cdot p}$$

$$C(p) = \frac{K_p \cdot (1 + (T_i + T_d)p + T_i \cdot T_d \cdot p^2)}{T_i \cdot p}$$

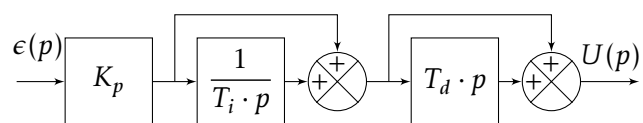


FIGURE 7.21 – P.I.D. série

Un correcteur P.I.D. de type série est la mise en série des trois correcteurs élémentaires, un correcteur proportionnel, un correcteur P.I. et un correcteur P.D.

Remarque : On constate que le degré du numérateur d'un correcteur P.I.D. est supérieur au degré du dénominateur, or comme pour le correcteur proportionnel dérivateur (P.D.) idéal, il n'existe pas de correcteur P.I.D. idéal. Un correcteur P.I.D. approché réalisable est de la forme :

$$C(p) = K_p + \frac{1}{T_i \cdot p} + \frac{T_d \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \text{ avec } T_d \gg \tau.$$

Malgré tout, pour l'étude qui suit nous ne considérons que les correcteurs idéaux.

Ces trois formes ne sont pas totalement équivalentes.

Il est toujours possible de passer d'un P.I.D. mixte à un P.I.D. parallèle et réciproquement.

$$\begin{aligned} C_m(p) &= K_{pm} \left(1 + \frac{1}{T_{im} \cdot p} + T_{dm} \cdot p \right) = K_{pm} + \frac{K_{pm}}{T_{im} \cdot p} + K_{pm} \cdot T_{dm} \cdot p \\ &= K_{pp} + \frac{1}{T_{id} \cdot p} + T_{dp} \cdot p = C_p(p) \end{aligned}$$

Il est toujours possible de passer d'un P.I.D. série à un P.I.D. mixte (ou parallèle)

$$C_m(p) = K_{pm} \left(1 + \frac{1}{T_{im} \cdot p} + T_{dm} \cdot p \right) = K_{pm} \frac{1 + T_{im} \cdot p + T_{im} \cdot T_{dm} \cdot p^2}{T_{im} \cdot p}$$

L'identification donne :

$$\begin{aligned} T_{im} &= T_{is} + T_{id} \\ T_{dm} &= \frac{T_{is} \cdot T_{id}}{T_{is} + T_{id}} \end{aligned}$$

Par contre dans l'autre sens, ce n'est possible que si les racines de

$$1 + T_{im} \cdot p + T_{im} \cdot T_{dm} \cdot p^2 = 0$$

sont réelles. On montre qu'il faut $T_{im} > 4 \cdot T_{dm}$.

b) Diagrammes de Bode

La figure 7.22 présente les diagrammes de Bode d'un correcteur P.I.D. de type série

$$C_s(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) (1 + T_d \cdot p)$$

On constate :

- une intégration à basse fréquence ($\omega < \frac{1}{T_i}$) caractérisée par
 - un déphasage de -90° du diagramme de phase,
 - une pente de $-20dB/dec$;
- une zone plus ou moins large ($\frac{1}{T_i} < \omega < \frac{1}{T_d}$) dans laquelle le gain varie peu ($20 \log(K_p)$);
- un fonctionnement de type dérivateur pour les hautes fréquences ($\omega > \frac{1}{T_d}$) caractérisé par :
 - une avance de phase de $+90^\circ$,
 - une pente positive de $+20dB/dec$.

c) Détermination du correcteur P.I.D.

Le réglage d'un correcteur P.I.D. est relativement complexe car, il s'agit ici de régler trois paramètres T_i , T_d et K_p . Les deux paramètres temporels permettent de positionner le correcteur sur l'axe des

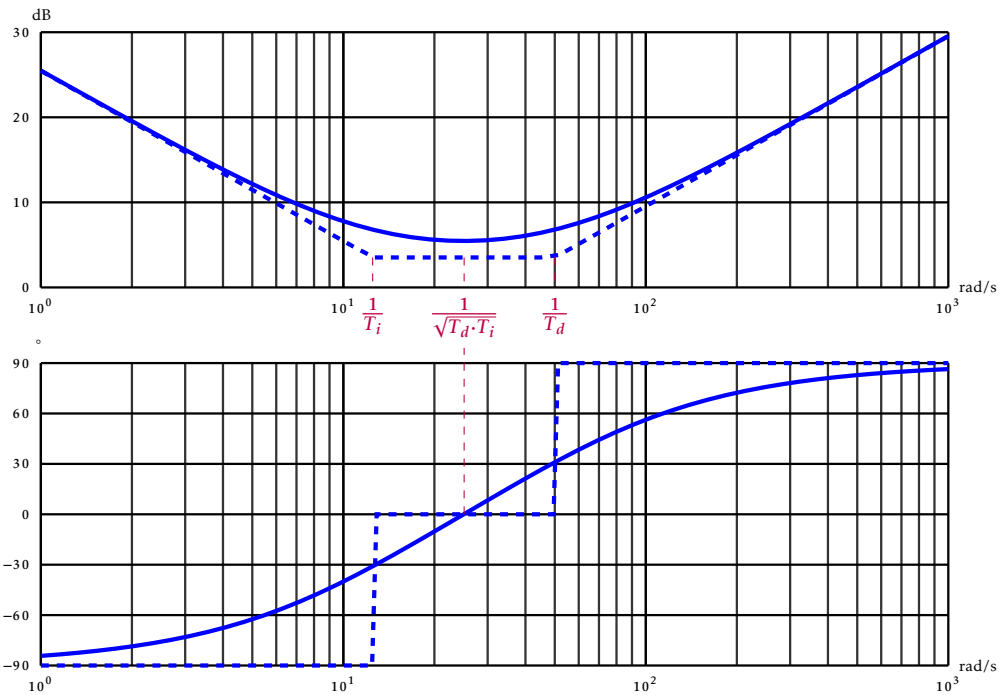


FIGURE 7.22 – Correcteur P.I.D.

pulsations, le gain K_p permet d'affiner le réglage.

Exemple guidé : Réglage d'un correcteur P.I.D par la méthode des pôles dominants

Nous avons déjà utilisé cette méthode pour configurer un correcteur P.I. (page 6). Un correcteur P.I.D. comportant deux constantes de temps (si $T_i > 4 \cdot T_d$) permet d'annuler algébriquement deux constantes de temps du système à corriger (T_i compensant la plus grande et T_d la suivante).

Le système à corriger est connu par sa fonction de transfert en boucle ouverte.

$$G(p) = \frac{40}{(1 + 0,12 \cdot p + 0,01 \cdot p^2)(1 + 0,5 \cdot p)(1 + 5 \cdot p)}$$

Le cahier des charges précise :

- erreur indicielle nulle;
- marge de phase supérieure à 50°;
- temps de réponse à 5% inférieur à 1 s.

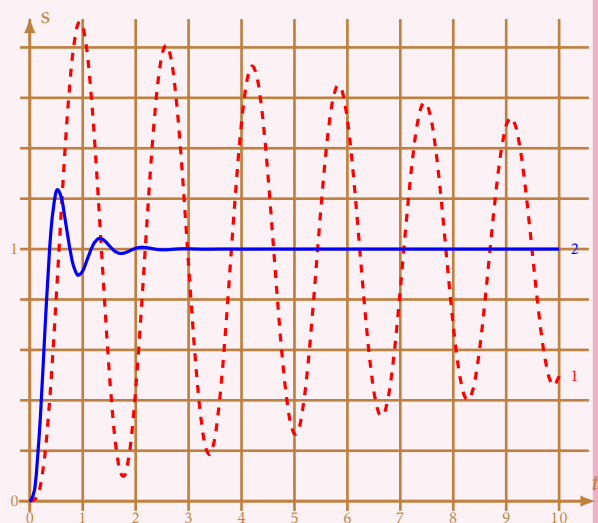
Le système non réglé (tracé en pointillé) est fortement oscillant, sa marge de phase et sa marge de gain sont insuffisants (fig. 7.23, tracé en pointillé).

On choisit d'installer un correcteur de type P.I.D. série.

$$C_s(p) = K_{ps} \left(1 + \frac{1}{T_{is} \cdot p} \right) (1 + T_{ds} \cdot p)$$

Détermination du correcteur :

- on associe la plus grande des constantes de temps à la constante d'intégration $T_{is} = T_1 = 5$ s;



7.2 Principaux réseaux correcteurs

- on associe la suivante à la constante de dérivation $T_{ds} = T_2 = 0,5 s$;
- dans un premier temps on pose $K_{ps} = 1$.

D'où le correcteur P.I.D.

$$C_s(p) = \left(1 + \frac{1}{5 \cdot p}\right)(1 + 0,5 \cdot p) = \frac{(1 + 5 \cdot p)(1 + 0,5 \cdot p)}{5 \cdot p}$$

La FTBO devient :

$$BO(p) = C_s(p) \cdot G(p) = \frac{55}{5 \cdot p \cdot (1 + 0,1 \cdot p)}$$

On trace les diagrammes de Bode de la fonction corrigée (fig. 7.23). On constate que la marge de phase est insuffisante. Il faut donc ajuster K_{ps} . Pour cela, on recherche sur la courbe de phase la pulsation correspondant à un déphasage de $-180 + 50 = -130^\circ$ que l'on reporte sur la courbe de gain. Ici on constate que l'on doit « descendre » la courbe de gain de $-4dB$ soit un gain $K_{ps} = 10^{\frac{-4}{20}} \approx 0,63$.

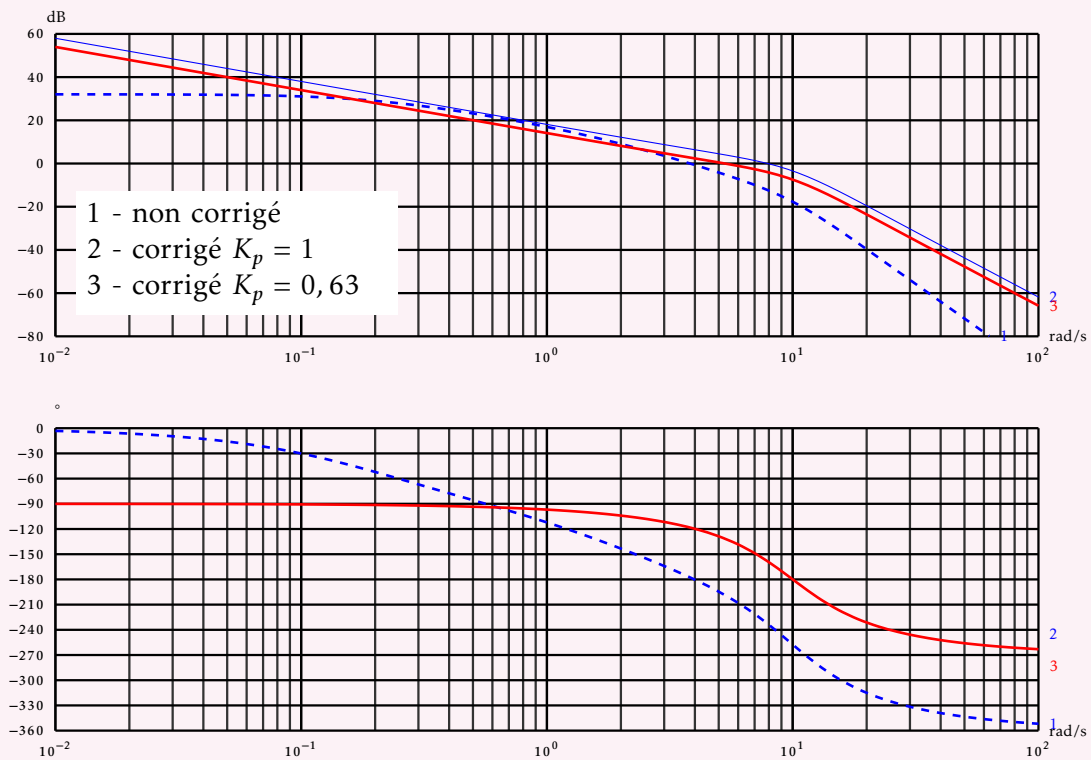


FIGURE 7.23 – Détermination correcteur P.I.D. - Diagrammes de Bode du système corrigé

La réponse temporelle définitive obtenue, superposée à la réponse non corrigée, est conforme au cahier des charges.

Le correcteur obtenu est donc : $C_s(p) = 0,63 \frac{(1 + 5 \cdot p)(1 + 0,5 \cdot p)}{5 \cdot p}$.

7.2.9 Correction en réaction

Nous allons dans cette partie, montrer le principe et l'intérêt des correcteurs en réaction à partir d'un exemple, la correction tachymétrique d'un moteur.

a) Correction tachymétrique

Pour réaliser la correction tachymétrique, on installe une dynamo-tachymétrique qui permet de mesurer la vitesse de rotation de l'axe du moteur et on compare cette vitesse à la commande.

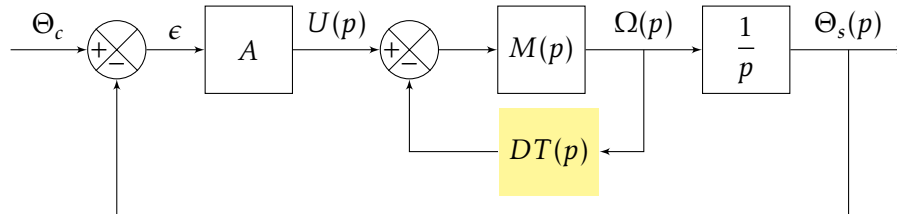
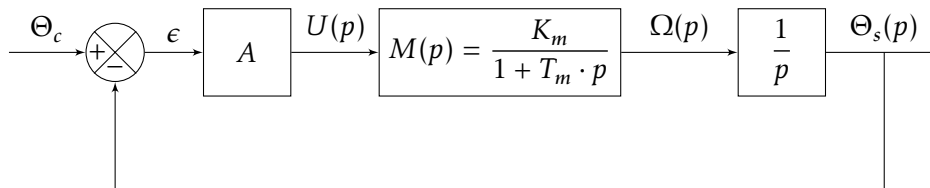


FIGURE 7.24 – Correction en tachymétrie

La boucle interne permet d'asservir la vitesse de rotation du moteur.

Afin d'évaluer l'effet de la correction, nous allons déterminer les caractéristiques du système avec et sans correction tachymétrique.

Soit un asservissement de position décrit par le schéma bloc ci-dessous.



avec

- $M(p)$: la fonction de transfert du moteur modélisée pour l'étude par une fonction du premier ordre ;
- A : un correcteur proportionnel de gain A .

On détermine rapidement :

$$\text{FTBO} : BO(p) = \frac{A \cdot K_m}{p(1 + T_m \cdot p)} ;$$

$$\text{FTBF} : BF(p) = \frac{\Theta_s(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{A \cdot K_m}{A \cdot K_m + p + T_m \cdot p^2}$$

On reconnaît un second ordre que l'on met sous forme canonique :

$$BF(p) = \frac{A \cdot K_m}{1 + \frac{1}{A \cdot K_m} p + \frac{T_m}{A \cdot K_m} \cdot p^2}$$

après identification on obtient :

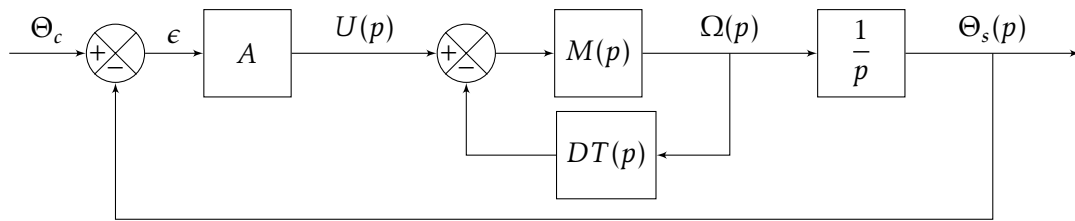
gain : $K = 1$;

pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\frac{A \cdot K_m}{T_m}}$;

coefficient d'amortissement : $z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{A \cdot K_m \cdot T_m}}$.

On insère maintenant une dynamo tachymétrique. On assimile la dynamo à un gain pur $DT(p) = K_d$.

7.2 Principaux réseaux correcteurs



La fonction de transfert $\frac{\Omega(p)}{U(p)} = M_d(p)$ devient :

$$M_d(p) = \frac{M(p)}{1 + K_d \cdot M(p)} = \frac{K_m}{1 + K_m \cdot K_d + T_m \cdot p}$$

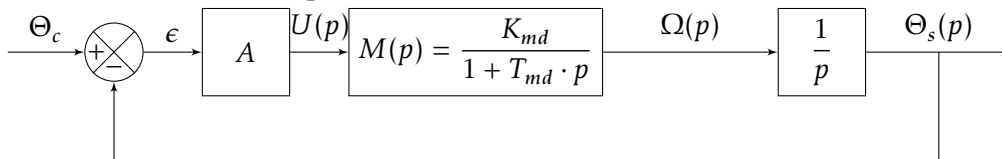
soit sous forme canonique :

$$M_d(p) = \frac{K_{md}}{1 + T_{md} \cdot p} = \frac{\frac{K_m}{1 + K_m \cdot K_d}}{1 + \frac{T_m}{1 + K_m \cdot K_d} \cdot p}$$

On constate un premier effet de la correction tachymétrique, elle permet de diminuer la constante de temps de l'ensemble moteur+dynamo. Le moteur atteindra donc sa valeur finale plus rapidement que s'il était seul :

$$T_{md} = \frac{T_m}{1 + K_m \cdot K_d}, \quad K_{md} = \frac{K_m}{1 + K_m \cdot K_d}$$

En remplaçant la boucle interne par sa fonction de transfert, on obtient le schéma suivant :



Par analogie avec l'étude précédente, on détermine

FTBO corrigée : $BO_c(p) = \frac{A \cdot K_{md}}{p(1 + T_{md} \cdot p)}$;

FTBF corrigée : $BF_c(p) = \frac{\Theta_s(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{A \cdot K_{md}}{A \cdot K_{md} + p + T_{md} \cdot p^2}$ soit sous forme canonique :

$$BF_c(p) = \frac{A \cdot K_{md}}{1 + \frac{1}{A \cdot K_{md}} p + \frac{T_{md}}{A \cdot K_{md}} \cdot p^2}$$

d'où on déduit les nouvelles valeurs de :

gain : $K_c = 1$;

pulsation propre corrigée : $\omega_{nc} = \sqrt{\frac{A \cdot K_{md}}{T_{md}}} = \sqrt{\frac{A \cdot K_m}{T_m}}$;

coefficient d'amortissement corrigé : $z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{A \cdot K_{md} \cdot T_{md}}} = z \cdot (1 + K_m \cdot K_d)$.

On constate

- que la correction tachymétrique n'a pas modifié la pulsation propre ;
- que le système est toujours précis pour un échelon ;
- que le coefficient d'amortissement a augmenté.

Cette augmentation du coefficient d'amortissement correspond à un effet stabilisant (diminution des oscillations, augmentation de la marge de phase).

b) Effet de la correction tachymétrique

La correction tachymétrique a un effet stabilisant tout en augmentant la dynamique de la boucle intérieure.

Pour régler le système on dispose de deux paramètres, le gain A et le gain K_d de la dynamo tachymétrique. Ces deux paramètres permettent d'ajuster la marge de phase et le gain du système.

7.3 Détermination expérimentale des correcteurs

Sur les systèmes installés, on ne connaît en général pas la fonction de transfert du système, la détermination et le réglage d'un correcteur ne peuvent se faire que expérimentalement.

L'étude expérimentale peut se conduire soit à partir d'essais en boucle ouverte, soit à partir d'une étude fréquentielle sur la boucle fermée.

7.3.1 Méthode de Ziegler-Nichols

a) Détermination fréquentielle en boucle fermée

La détermination d'un correcteur par Ziegler et Nichols s'appuie sur la recherche de la juste instabilité en ne faisant varier que le gain proportionnel.

Procédure

Étape 1 : désactiver les composantes intégrales et dérivées du correcteur ;

Étape 2 : augmenter progressivement le gain proportionnel du correcteur jusqu'à la juste instabilité ;

Étape 3 : noter le gain K_{osc} correspondant à la juste instabilité et la période des oscillations T_{osc} .

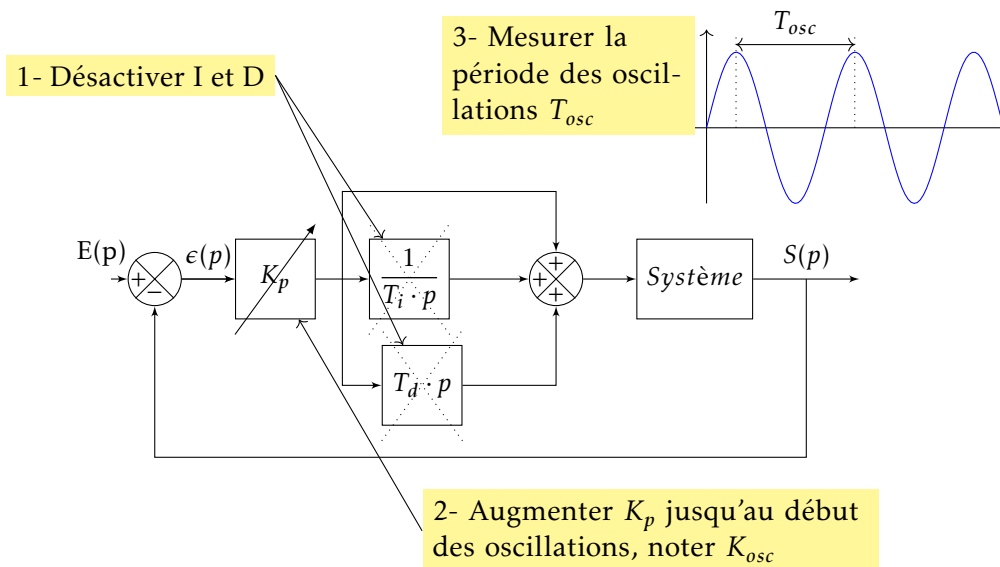


FIGURE 7.25 – Ziegler–Nichols - Détermination fréquentielle

À partir de la mesure de K_{osc} et T_{osc} , Ziegler et Nichols ont proposé des valeurs typiques de réglages des correcteurs P, P.I. et P.I.D. mixte.

Correcteur	K_p	T_i	T_d
P	$K_p = 0,5 \cdot K_{osc}$		
P.I.	$K_p = 0,45 \cdot K_{osc}$	$T_i = 0,83 \cdot T_{osc}$	
P.I.D.	$K_p = 0,6 \cdot K_{osc}$	$T_i = 0,5 \cdot T_{osc}$	$T_d = 0,12 \cdot T_{osc}$

Ces valeurs permettent de réaliser un réglage dit du quart décroissant, c'est-à-dire que l'amplitude du deuxième dépassement n'est que le quart du premier. Le système corrigé ainsi, se comporte comme un système du second ordre dont le coefficient d'amortissement est $z \approx 0,4$.

7.3 Détermination expérimentale des correcteurs

Si on souhaite un système moins dynamique, on pourra diminuer le gain préconisé par Ziegler et Nichols.

Remarque : La détermination fréquentielle du correcteur ne peut s'utiliser que sur des systèmes qui autorisent les dépassements et les oscillations sans risque de destruction du système.

Cette procédure de réglage peut aussi être utilisée à partir de la représentation fréquentielle du lieu de transfert (Bode, Black ou Nyquist) d'un système non corrigé. On détermine directement la pulsation des oscillations correspondant à la juste instabilité ($\omega_{osc} = \omega_{ODB}$) et le gain K_{osc} correspond au gain à appliquer pour que le système soit juste instable.

b) Détermination temporelle à partir de la boucle ouverte

Cette procédure ne peut s'utiliser que si le système est stable en boucle ouverte (pas d'intégration dans la boucle).

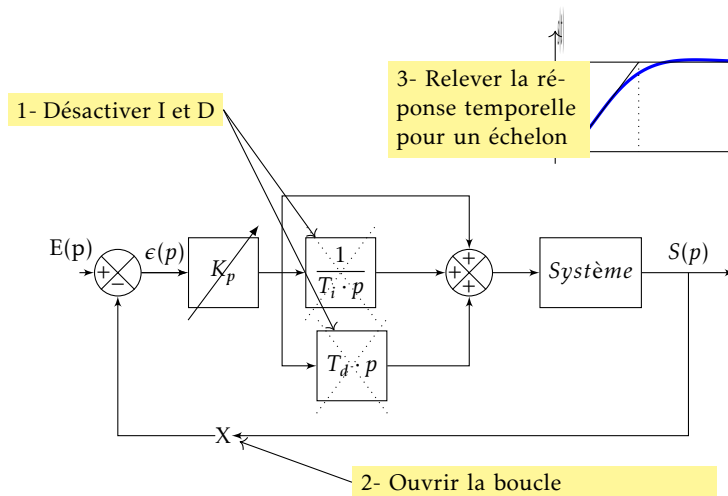


FIGURE 7.26 – Ziegler–Nichols - Détermination à partir de la boucle ouverte

Étape 1 : désactiver les composantes intégrale et dérivée du correcteur.

Étape 2 : ouvrir la boucle de retour.

Étape 3 : relever l'évolution de la sortie pour une entrée de type échelon unitaire.

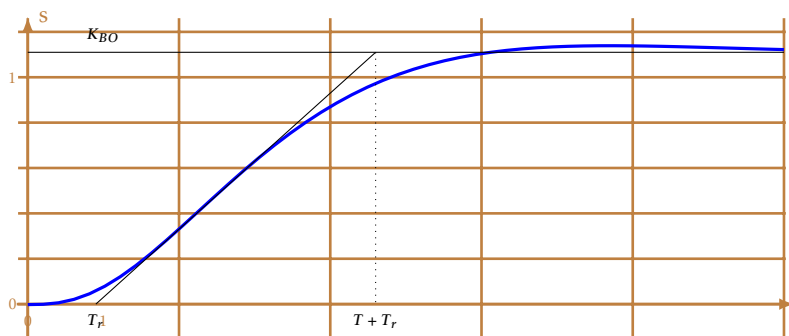


FIGURE 7.27 – Ziegler-Nichols, identification des paramètres en boucle ouverte

À partir de la réponse temporelle relevée 7.27, on détermine :

- le temps de retard, T_r ;
- le gain de la FTBO, K_{BO} ;
- le temps d'établissement, T .

Pour cela,

- on cherche le point d'inflexion de la courbe,
 - on trace la tangente en ce point,
 - on relève les intersections avec l'axe des abscisses et l'asymptote finale qui donnent T_r et T .
- Le tableau suivant donne les valeurs des paramètres des correcteurs P.I. et P.I.D. mixte.

Correcteur	K_p	T_i	T_d
P.I.	$K_p = \frac{T}{K_{BO} \cdot T_r}$	T	
P.I.D.	$K_p = 0,6 \frac{T}{K_{BO} \cdot T_r}$	T	$T_d = 0,5 \cdot T$

Tableau 7.1 – Coefficients du correcteur P.I.D