2.6 Torseur cinétique

2.6.1 Définition

Le torseur cinétique est le torseur des quantités de mouvement d'un système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R.

$$\left\{\mathcal{C}_{E/R}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{p_{E/R}} = \displaystyle\int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, dm \\ \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \displaystyle\int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, dm \end{array}\right\}_A$$

— $\overrightarrow{V_{P/R}}$: Vitesse du point P du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R ;

— $\overrightarrow{p_{E/R}} = \displaystyle\int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, dm$: Résultante cinétique ou quantité de mouvement de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R ;

— $\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \displaystyle\int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, dm$: Moment cinétique au point A de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R.

a) Résultante cinétique

Soit O un point lié au référentiel $\mathcal{R}$ et G le centre d'inertie de l'ensemble matériel E , par définition du centre d'inertie : $m_E \overrightarrow{OG} = \int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\, dm$.

En dérivant par rapport au temps dans R : $m_E \cdot \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\, dm\right]_R$.

Compte tenu du principe de conservation de la masse, on peut permuter la dérivation par rapport au temps et l'intégration sur la masse :

$$m_E \cdot \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right]_R = \int_{P\in E} \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R dm.$$

On reconnaît la vitesse du point G et celle du point P par rapport au repère R. La quantité de mouvement se calcule donc finalement comme :

$$\overrightarrow{p_{E/R}} = \int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, dm = m_E \cdot \overrightarrow{V_{G/R}}$$

b) Changement de point

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} &= \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, dm \\
\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} &= \int_{P\in E} \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, dm = \int_{P\in E} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, dm \\
\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} &= \int_{P\in E} \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, dm + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, dm \\
\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} &= \overrightarrow{BA} \wedge \int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, dm + \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}
\end{aligned}$$

On reconnaît la relation de changement de point d'un torseur, le champ des moments cinétiques $\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}$ est équiprojectif.

On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{E/R}}$$

ou

$$\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge m_E \cdot \overrightarrow{V_{G/R}}.$$

2.6.2 Cas du solide indéformable

Soit S, un solide indéformable de masse m_s.

L'hypothèse de solide indéformable, permet d'associer les propriétés du champ des vecteurs vitesses d'un solide aux propriétés du torseur cinétique. Ainsi, pour P et A deux points liés au solide, la relation de composition des vitesses permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}$$

avec $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$: le vecteur rotation du solide S par rapport au repère R.

Pour un solide S le torseur cinétique s'écrit :

$$\left\{\mathcal{C}_{S/R}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{p_{S/R}} = \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{V_{P\in S/R}} \cdot \,dm \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}} \cdot \,dm \end{array}\right\}_A$$

et la résultante cinétique :

$$\overrightarrow{p_{S/R}} = \int_{P\in S} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \,dm = m_s \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}}.$$

En faisant intervenir le point A dans la détermination du moment cinétique d'un solide indéformable, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} &= \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}} \cdot \,dm \\
&= \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \,dm \\
&= \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \,dm + \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \,dm \\
&= \left(\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \cdot \,dm\right) \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \,dm
\end{aligned}$$

On reconnaît :

— dans le premier terme la définition du centre d'inertie G :
$\displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \cdot \,dm = m_s\overrightarrow{AG}$;

— dans le deuxième terme l'opérateur d'inertie du solide S au point A appliqué au vecteur :
$\displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \,dm = \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Finalement, le moment cinétique d'un solide indéformable dans son mouvement par rapport à un repère R devient

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = m_s\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.$$

Cette relation est importante mais on s'attachera à l'utiliser dans les cas particuliers suivants qui facilitent les calculs.

Le point A est confondu avec le centre d'inertie G

$$\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} = \overline{\overline{J_G(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

A est un point fixe dans le repère R

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overline{\overline{J_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Le mouvement du solide S par rapport au repère R **est une translation**

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = m_s \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Il est souvent préférable de calculer le moment cinétique soit au centre d'inertie, soit en un point A du solide S fixe dans le repère R puis d'utiliser la relation de changement de point si nécessaire pour le ramener au point d'étude.

2.7 Torseur dynamique

2.7.1 Définition

Le torseur dynamique est le torseur des quantités d'accélération d'un système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R :

$$\left\{\mathcal{D}_{E/R}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{A_{E/R}} = \displaystyle\int_{P\in E} \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \, dm \\ \overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \displaystyle\int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \, dm \end{array} \right\}_A$$

— $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}}$: accélération du point P de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R ;

— $\overrightarrow{A_{E/R}} = \int_{P\in E} \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \, dm$: résultante dynamique de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R , on montre aussi que

$$\overrightarrow{A_{E/R}} = m_E \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R}};$$

— $\overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \, dm$: moment dynamique en A de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R.

2.7.2 Changement de point de réduction

Le champ des moments dynamiques est un champ de torseur. Pour changer de point de réduction on utilise donc la relation générale des torseurs :

$$\overrightarrow{\delta_{B,E/R}} = \overrightarrow{\delta_{A,E/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge m_E \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/S}}.$$

2.7.3 Relation entre la résultante cinétique et la résultante dynamique

On montre facilement que :

$$\overrightarrow{A_{E/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{p_{S/R}}\right]_R = m_E\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{G/R}}\right]_R = m_E\overrightarrow{\Gamma_{G/R}}.$$

2.7.4 Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique

Par définition le moment cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} &= \int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V_{P/R}}\cdot dm \\
\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}\right]_R &= \left[\frac{d}{dt}\int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V_{P/R}}\,dm\right]_R \\
&= \int_{P\in E}\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V_{P/R}}\right)\right]_R\cdot dm \\
&= \int_{P\in E}\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AP}\right]_R\wedge\overrightarrow{V_{P/R}}\cdot dm + \int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{P/R}}\right]_R\cdot dm \\
&= \int_{P\in E}\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)\right]_R\wedge\overrightarrow{V_{P/R}}\cdot dm + \int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Gamma_{P/R}}\cdot dm \\
&= \int_{P\in E}\left(\overrightarrow{V_{P/R}}-\overrightarrow{V_{A/R}}\right)\wedge\overrightarrow{V_{P/R}}\cdot dm + \int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Gamma_{P/R}}\cdot dm \\
\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}\right]_R &= \int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Gamma_{P/R}}\cdot dm - \int_{P\in E}\overrightarrow{V_{A/R}}\wedge\overrightarrow{V_{P/R}}\cdot dm
\end{aligned}$$

— le premier terme représente le moment dynamique en A

$$\int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Gamma_{P/R}}\cdot dm = \overrightarrow{\delta_{A,E/R}};$$

— le second devient

$$\int_{P\in E}\overrightarrow{V_{A/R}}\wedge\overrightarrow{V_{P/R}}\cdot dm = \overrightarrow{V_{A/R}}\wedge\int_{P\in E}\overrightarrow{V_{P/R}}\cdot dm = m_E\cdot\overrightarrow{V_{A/R}}\wedge\overrightarrow{V_{G/R}}.$$

D'où la relation cherchée entre le moment dynamique et le moment cinétique :

$$\overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}\right]_R + m_E\cdot\overrightarrow{V_{A/R}}\wedge\overrightarrow{V_{G/R}}$$

A un point géométrique quelconque et G le centre d'inertie de cet ensemble matériel.

a) Cas particuliers

— A est confondu avec G, alors : $\overrightarrow{\delta_{G,E/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G,E/R}}\right]_R$;

— A est un point fixe de R, alors : $\overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}\right]_R$.

b) Détermination du moment dynamique

Il est en général plus facile de déterminer le moment cinétique que le moment dynamique (le champ des vitesses est en général connu). Pour calculer le moment dynamique, on choisit de calculer en un point caractéristique (le centre d'inertie G ou un point fixe du repère) le moment cinétique puis de le dériver. Pour obtenir le moment dynamique en un autre point on utilise la relation liant les moments d'un torseur.

2.7.5 Cas du solide indéformable

Pour un solide, nous avons la relation de composition des vitesses des points du solide :

$$\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{Q\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{QP}.$$

La résultante dynamique s'écrit :

$$\overrightarrow{A_{S/R}} = m_S \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}}$$

et le moment dynamique en A :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}\right]_R + m_S \cdot \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$$

avec A point géométrique.

Cette dernière relation est à manipuler avec précaution, en effet $\overrightarrow{V_{A/R}}$ n'est pas toujours facile à évaluer pour un point quelconque, on se limitera donc à calculer le moment dynamique uniquement en des points avec des propriétés particulières :

— A est confondu avec G, alors :

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}\right]_R \;;$$

— A est un point fixe de R, alors :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}\right]_R .$$

Puis on utilisera la relation de changement de point des torseurs.

2.8 Énergie cinétique

2.8.1 Définition

L'énergie cinétique élémentaire d'un point P affecté de la masse dm dans son mouvement par rapport à un repère R est donnée par :

$$dT_{P/R} = \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{P/R}}^2\, dm$$

L'énergie cinétique d'un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un repère R est alors :

$$T_{E/R} = \frac{1}{2}\int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P/R}}^2\, dm$$

L'unité de l'énergie cinétique est le joule.

2.8.2 Cas du solide indéformable

Soit un solide S de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère R , A un point lié au solide.

Pour un solide, l'énergie cinétique du solide dans son mouvement par rapport au repère R s'écrit :

$$T_{S/R} = \frac{1}{2}\int_{P\in S} \overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2 \, dm.$$

On a $\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}$, d'où

$$\begin{aligned}
T_{S/R} &= \frac{1}{2}\int_{P\in S} \left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \, dm \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{P\in S} \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 \, dm + 2\cdot \int_{P\in S} \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \, dm + \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \, dm\right)
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ indépendant de la variable d'intégration dm

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 + \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \, dm\right) + \frac{1}{2}\int_{P\in S} \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \, dm$$

On reconnaît le produit mixte $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ invariant par permutation circulaire dans le troisième terme avec $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ et $\vec{w} = \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)$ soit alors :

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 + m_S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\right) + \frac{1}{2}\int_{P\in S} \left(\overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)\right) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \, dm$$

On reconnaît l'opérateur d'inertie du solide S en A

$$\int_{P\in S} \left(\overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)\right) \, dm = \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.$$

Finalement la relation permettant de déterminer l'énergie cinétique d'un solide :

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 + m_S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Cette relation est assez difficile à utiliser, montrons que dans le cas d'un solide, l'énergie cinétique peut aussi se calculer en réalisant le comoment des torseurs cinématique et cinétique.

$$T_{S/R} = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\} \otimes \left\{\mathcal{C}_{S/R}\right\}$$

On note :

— Torseur cinématique en A du solide S dans son mouvement par rapport au repère R

$$\left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{matrix}\right\}_A .$$

— Torseur cinétique du solide S dans son mouvement par rapport au repère R

$$\left\{\mathcal{C}_{S/R}\right\} = \left\{\begin{matrix} m_S \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} \end{matrix}\right\}_A .$$

$$
\begin{aligned}
T_{S/R} &= \frac{1}{2}\left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\} \otimes \left\{\mathcal{C}_{S/R}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix} m_S \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}\end{matrix}\right\}_A \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} + \frac{1}{2} m_S \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(m_s \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \right) + \frac{1}{2} m_S \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(m_s \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \right) + \frac{1}{2} m_S \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GA} \right) \\
T_{S/R} &= \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 + m_S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}
\end{aligned}
$$

On retrouve bien le même résultat. Cette relation est souvent plus facile à mettre en œuvre que la relation générale.

L'énergie cinétique ne dépend donc pas du point de calcul (propriété du comoment), il est donc préférable d'appliquer cette relation en des points particuliers :

En G, centre d'inertie du solide

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

avec $\overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}}$ la matrice d'inertie du solide S en G.

Pour un mouvement de rotation de centre C point fixe dans le mouvement de rotation (rotule ou gyroscope) par rapport au repère R

$$T_{S/R} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_C(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

avec $\overline{\overline{\mathcal{I}_C(S)}}$ la matrice d'inertie du solide S en C.

Pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $(C, \vec{u})$, en C point fixe de l'axe de rotation du solide S par rapport au repère R.

On pose $\overline{\overline{\mathcal{I}_C(S)}} = \begin{pmatrix} I_u & -F & -E \\ -F & I_v & -D \\ -E & -D & I_w \end{pmatrix}_{\substack{C \\ (\vec{u},\vec{v},\vec{w})}}$ la matrice d'inertie du solide S en C dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_u \cdot \vec{u}$.

$$
\begin{aligned}
T_{S/R} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_C(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\
&= \frac{1}{2}(\omega_u, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} I_u & -F & -E \\ -F & I_v & -D \\ -E & -D & I_w \end{pmatrix}_{\substack{C \\ (\vec{u},\vec{v},\vec{w})}} \begin{pmatrix} \omega_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

d'où

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} I_u \cdot \omega_u^2$$

Pour un mouvement de translation

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2$$

2.9 Caractéristiques cinétiques d'un ensemble de solides

Soit E un ensemble de n solides S_i , en mouvement par rapport au repère R.

2.9.1 Torseur cinétique d'un ensemble de solides

Le torseur cinétique d'un ensemble de solides, est la somme (en un même point) des torseurs cinétiques de chaque solide.

$$\left\{\mathcal{C}_{E/R}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\mathcal{C}_{S_i/R}\right\}$$

La résultante cinétique d'un ensemble de solides est la somme des résultantes cinétiques et le moment cinétique en un point A d'un ensemble de solides est la somme des moments cinétiques de chaque solide en ce même point.

$$\overrightarrow{p_{E/R}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_{S_i/R}} \qquad \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\sigma_{A,S_i/R}}$$

2.9.2 Torseur dynamique d'un ensemble de solides

Le torseur dynamique d'un ensemble de solides, est la somme (en un même point) des torseurs dynamiques de chaque solide.

$$\left\{\mathcal{D}_{E/R}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\mathcal{D}_{S_i/R}\right\}$$

La résultante dynamique d'un ensemble de solides est la somme des résultantes dynamiques et le moment dynamique en un point A d'un ensemble de solides est la somme des moments dynamiques de chaque solide en ce même point.

$$\overrightarrow{A_{E/R}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_{S_i/R}} \qquad \overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\delta_{A,S_i/R}}$$

2.9.3 Énergie cinétique d'un ensemble de solides

L'énergie cinétique d'un ensemble de solides est la somme des énergies cinétiques.

$$T_{E/R} = \sum_{i=1}^{n} T_{S_i/R}$$

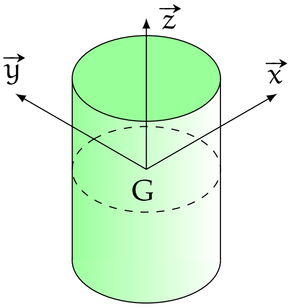
En décomposant sur chaque solide :

$$T_{E/R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathcal{V}_{S_i/R}\right\} \otimes \left\{\mathcal{C}_{S_i/R}\right\}$$
$$T_{E/R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{S_i/R}}\\ \overrightarrow{V_{A_i\in S_i/R}}\end{matrix}\right\}_{A_i} \otimes \left\{\begin{matrix}m_i\overrightarrow{V_{G_i\in S_i/R}}\\ \overrightarrow{\sigma_{A_i,S_i/R}}\end{matrix}\right\}_{A_i}$$

Remarque : L'énergie cinétique ne dépendant pas du point de calcul du comoment, chaque comoment peut être calculé en un point particulier caractéristique du mouvement considéré.

A.1.2 Matrices d'inertie de quelques solides élémentaires

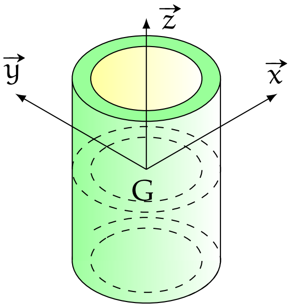
— **Cylindre** d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} m \cdot \left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \dfrac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$

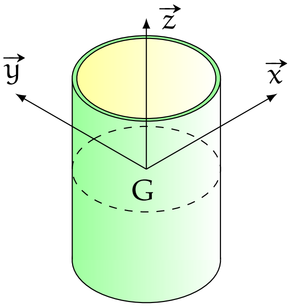
— **Tube** d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon extérieur R_e, de rayon intérieur R_i et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} m \left(\dfrac{R_e^2 + R_i^2}{4} + \dfrac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left(\dfrac{R_e^2 + R_i^2}{4} + \dfrac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m \dfrac{R_e^2 + R_i^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

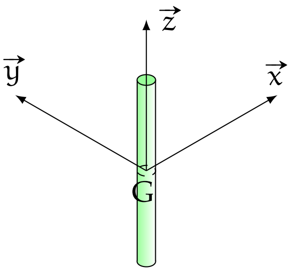
— **Tube** d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H et d'épaisseur négligeable



$$\begin{pmatrix} m \cdot \left(\dfrac{R^2}{2} + \dfrac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left(\dfrac{R^2}{2} + \dfrac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

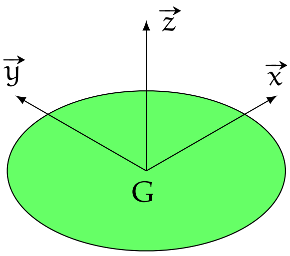
— **Tige** cylindrique $(G, \vec{z})$ de rayon négligeable



$$\begin{pmatrix} m \cdot \dfrac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \dfrac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

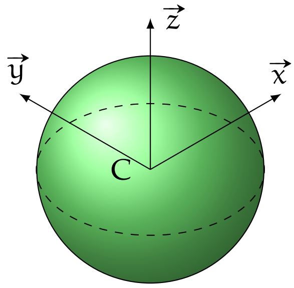
— **Disque** d'axe $(G, \vec{z})$ d'épaisseur négligeable



$$\begin{pmatrix} m \cdot \dfrac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \dfrac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \dfrac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

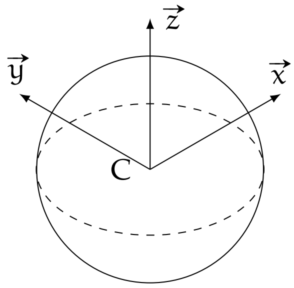
— **Sphère pleine** de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}m \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}m \cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{\substack{C \\ \forall \mathcal{B}}}$$

en C dans toute base

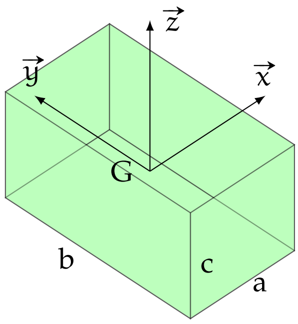
— **Sphère creuse** de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}m \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}m \cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{\substack{C \\ \forall \mathcal{B}}}$$

en C dans toute base

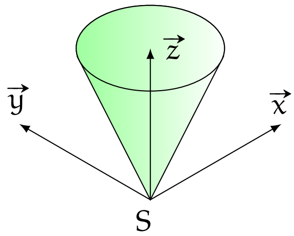
— **Parallélépipède** de côtés a, b et c



$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{a^2+b^2}{12} \end{pmatrix}_{\substack{C \\ \forall \mathcal{B}}}$$

en G dans la base parallèle aux arêtes du parallélépipède

— **Cône** $(S, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + H^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + H^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot m}{5} \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{\substack{S \\ (\vec{?}, \vec{?}, \vec{z})}}$$

en S dans toute base contenant $\vec{z}$.