

2.4 Feuille de travaux dirigés n°2a

Exercice 1 - Drone à voilure tournante

Extrait de Mines MP 2010

Corrigé page 26

A. Schéma, données, notation et paramétrage du drone

Le sujet étudie un drone miniature à voilure tournante (figure 2.11a).

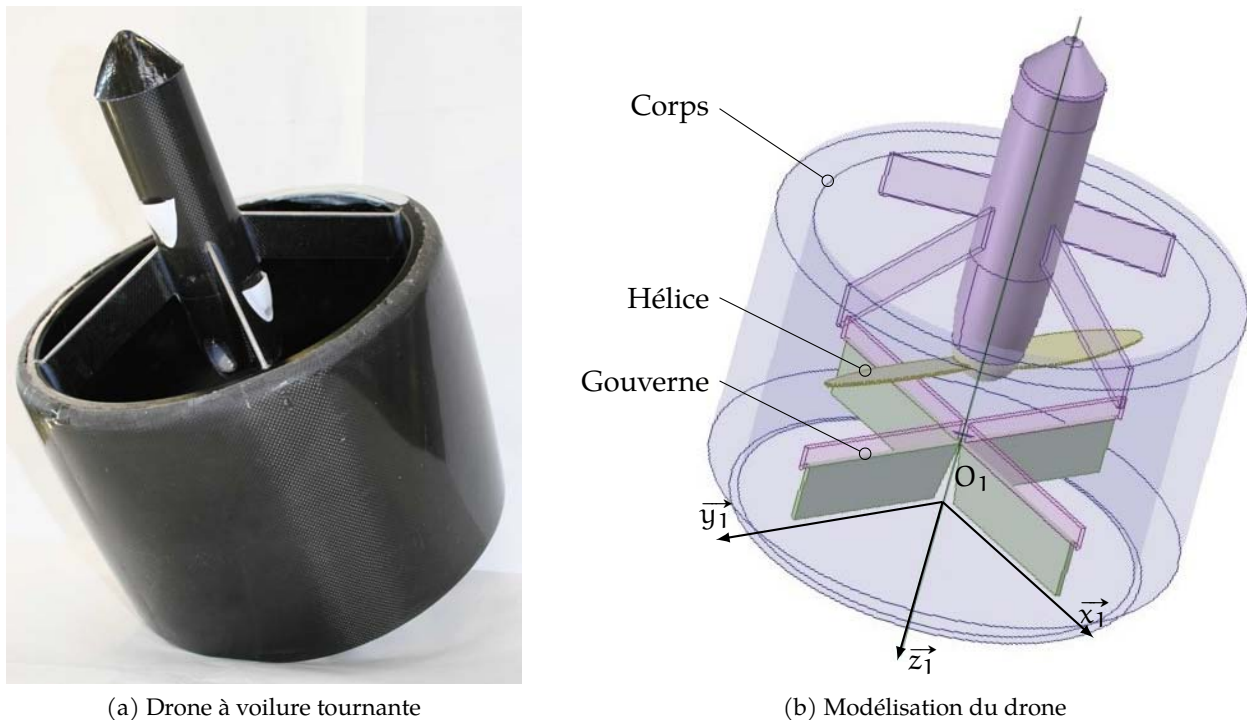


FIGURE 2.11 – Drone

Lors de l'étude du mouvement nous avons besoin de déterminer les caractéristiques cinétiques de plusieurs solides.

On s'intéresse plus particulièrement aux éléments représentés ci-dessous.

Pour les calculs de pré-dimensionnement, le drone, dont le centre d'inertie est noté G , est constitué de deux solides (1) et (2) :

Le corps (1) (figure 2.11b), constitué du corps et des gouvernes (1a), (1b), (1c) et (1d). On négligera la masse et l'inertie des gouvernes devant les masses et inerties des autres composants du drone. Le corps du drone est considéré comme étant de symétrie axiale d'axe (G_1, \vec{z}_1) et de masse $m_1 = 0,89$ kg. Le point G_1 est son centre d'inertie. On note $\overline{\mathcal{J}}_{G_1}(1)$ la matrice d'inertie du solide (1) calculée en G_1 .

$$\overline{\mathcal{J}}_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{G_1}^{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad \text{et} \quad \overline{O_1 G_1} = \ell_1 \cdot \vec{z}_1$$

L'axe hélice (2), constitué de l'arbre moteur et de l'hélice. Cet ensemble (2) est en liaison pivot d'axe par rapport au corps (1).

L'axe hélice (2) est considéré comme étant de symétrie axiale d'axe (G_2, \vec{z}_1) de masse $m_2 = 0,11$ kg.

Le point G_2 est son centre d'inertie. On note $\overline{\overline{J_{G_2}(2)}}$ la matrice d'inertie du solide (2) calculée en G_2 .

$$\overline{\overline{J_{G_2}(2)}} = \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{G_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_1G_2} = \ell_2 \cdot \vec{z}_1$$

$(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

B. Question

Q1. En tenant compte des symétries, simplifier les matrices d'inertie $\overline{\overline{J_{G_1}(1)}}$ et $\overline{\overline{J_{G_2}(2)}}$ des solides (1) et (2).

Q2. On pose $\overrightarrow{O_1G} = \ell_G \cdot \vec{z}_1$, déterminer ℓ_G caractérisant la position du centre d'inertie G du drone en fonction des caractéristiques cinétiques des solides (1) et (2).

Q3. En déduire les matrices d'inertie des solides (1) et (2) calculées en G en fonction des caractéristiques cinétiques des solides (1) et (2).

C. Évolution

On souhaite faire évoluer le drone en passant d'une hélice à deux pales à une hélice à trois pales.

Soit l'hélice tripale définie sur la figure 2.12.

Q4. Montrez que la matrice d'inertie de trois masses ponctuelles (P_1, P_2, P_3 de masse m) régulièrement réparties sur un cercle de rayon R est diagonale et que les deux moments d'inertie perpendiculaires à l'axe de rotation sont égaux.

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_1 = R \cdot \cos(\theta) \\ b_1 = R \cdot \sin(\theta) \\ c_1 = z \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_2 = R \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ b_2 = R \cdot \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ c_2 = z \end{pmatrix}$$

et

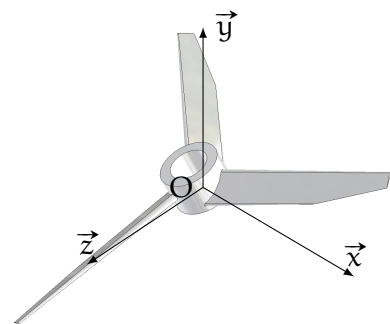
$$P_3 = \begin{pmatrix} a_3 = R \cdot \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ b_3 = R \cdot \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ c_3 = z \end{pmatrix}.$$

Q5. En déduire que la matrice d'inertie d'une hélice tripale est

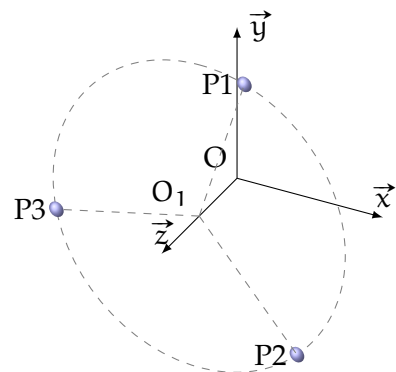
de la forme $\overline{\overline{J_O(1)}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{O} \quad \text{diagonale en tout}$

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

point de l'axe.



(a) Hélice



(b) Masses ponctuelles réparties

FIGURE 2.12 – Hélice tripale

Exercice 2 - Vilebrequin

Adapté du concours BTS de l'ENSAE

Corrigé page 27

On considère un coude de vilebrequin formé de 2 tourillons T_1 et T_2 identiques, de 2 bras B_3 et B_4 identiques, et d'un maneton M_5 (voir schéma ci-dessous).

Les masses respectives de ces éléments sont notées m_1, m_2, m_3, m_4 et m_5 . Leurs centres d'inertie respectifs sont notés G_1, G_2, G_3, G_4 et G_5 .

On suppose que les tourillons et le maneton sont des cylindres parfaits de section circulaire. Les bras sont des parallélépipèdes supposés parfaits. Les dimensions, points et axes sont précisés sur le schéma.

On note Σ l'ensemble $\{T_1 + T_2 + B_3 + B_4 + M_5\}$.

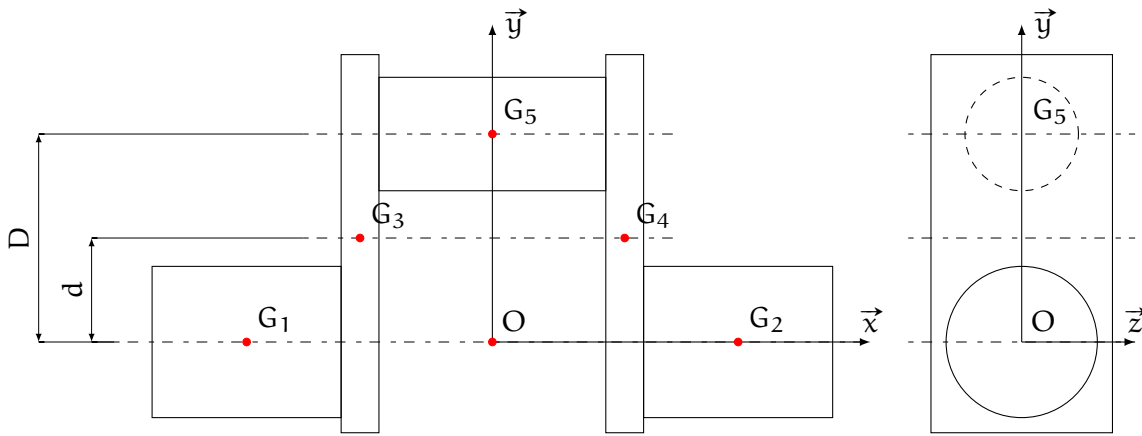


FIGURE 2.13 – Vilebrequin

Pour chacune des questions suivantes, confirmer ou infirmer la proposition.

Q1. La matrice d'inertie de l'ensemble Σ est de la forme : $\overline{\overline{J}}_O(\Sigma) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})_O}$

Q2. Le maneton M_5 étant un cylindre de rayon R_5 , de hauteur h_5 , de masse m_5 , de centre d'inertie noté G_5 , son moment d'inertie par rapport à l'axe (G_5, \vec{x}) est : $I_{G_5, \vec{x}}(M_5) = \frac{m_5}{12} (3 \cdot R_5^2 + h_5^2)$.

Q3. L'axe (O, \vec{x}) est axe principal d'inertie pour l'ensemble Σ .

Q4. Le moment d'inertie du maneton M_5 par rapport à (O, \vec{x}) est : $I_{O, \vec{x}}(m_5) = \frac{m_5 \cdot R_5^2}{2} + m_5 \cdot D^2$.

Q5. Le centre d'inertie de l'ensemble Σ est le point G tel que : $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{y} = \frac{m_3 \cdot d + m_4 \cdot d + m_5 \cdot D}{m_3 + m_4 + m_5}$.

On considère maintenant un coude « allégé », où les tourillons, les bras et le maneton ont été alésés (voir schéma 2.14). On suppose les alésages parfaits, de rayons r_1 et r_2 pour les bras, et de rayon r_5 pour le maneton.

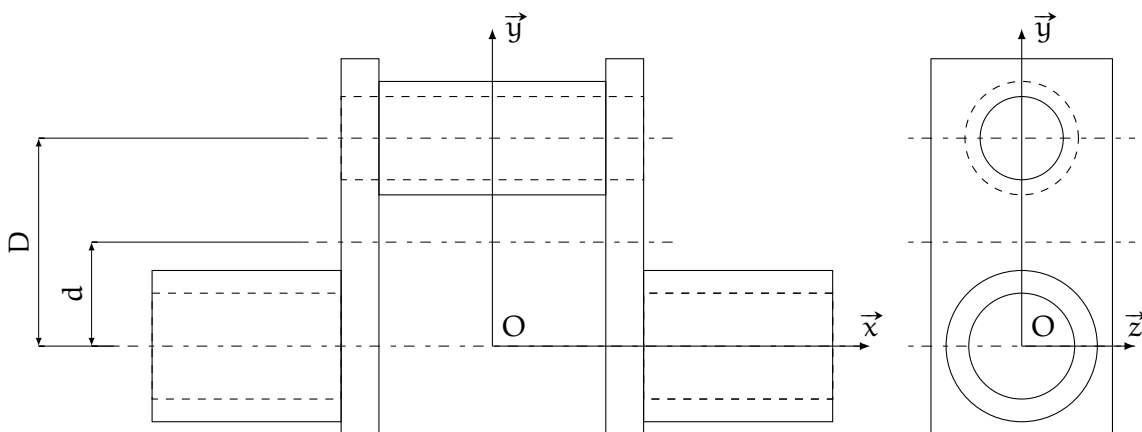


FIGURE 2.14 – Vilebrequin allégé

Q6. Le centre d'inertie reste inchangé pour chacun des solides.

Q7. La forme de la matrice d'inertie de coude allégé au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est modifiée par rapport à celle du coude « plein ».

Q8. Le moment d'inertie du tourillon T_1 par rapport à l'axe (G_1, \vec{x}) est maintenant :

$$I_{G_1}(T_1) = \frac{m_1}{2} (R_1^2 - r_1^2).$$

Exercice 3 - Tête d'amarrage

Extrait de CCP 2001

Corrigé page 27

La tête d'amarrage est de géométrie suffisamment simple pour pouvoir être décomposée en volumes de base. Ainsi, la forme peut être décrite à l'aide de deux cylindres 0 et 1, de centres respectifs C_1 et C_3 , et de deux parallélépipède 2 et 3 de centre c_2 .

Q1. Déterminez en fonction du paramétrage donné figure 2.15, la matrice d'inertie de chaque volume élémentaire.

La matrice d'inertie de cette tête d'amarrage 3 est de la forme :

$$\overline{\overline{J_{C_2}(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\substack{C \\ B}}$$

Q2. Justifiez la forme de cette matrice.

Q3. Identifiez le terme C de la matrice d'inertie de la tête d'amarrage au point C_2 en fonction de la masse volumique ρ et des dimensions.

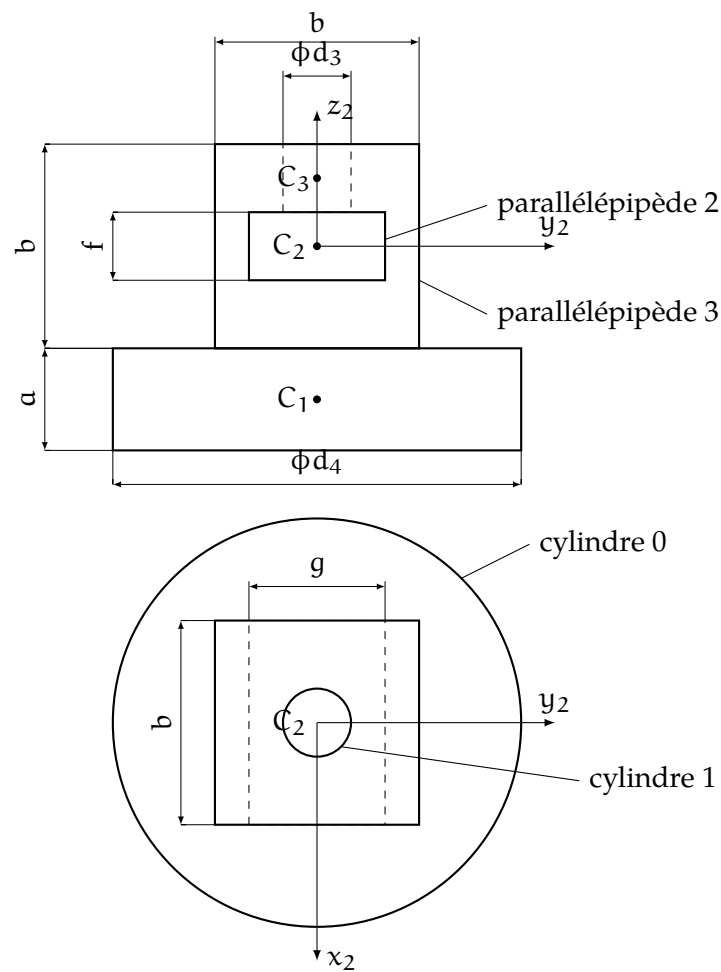


FIGURE 2.15

Exercice 4 - Cinétique du carrousel

Extrait d'E3A PSI 2008

Corrigé page 28

L'objet de l'étude est un carrousel installé entre les différents postes de fabrication d'une peau de tableau de bord.

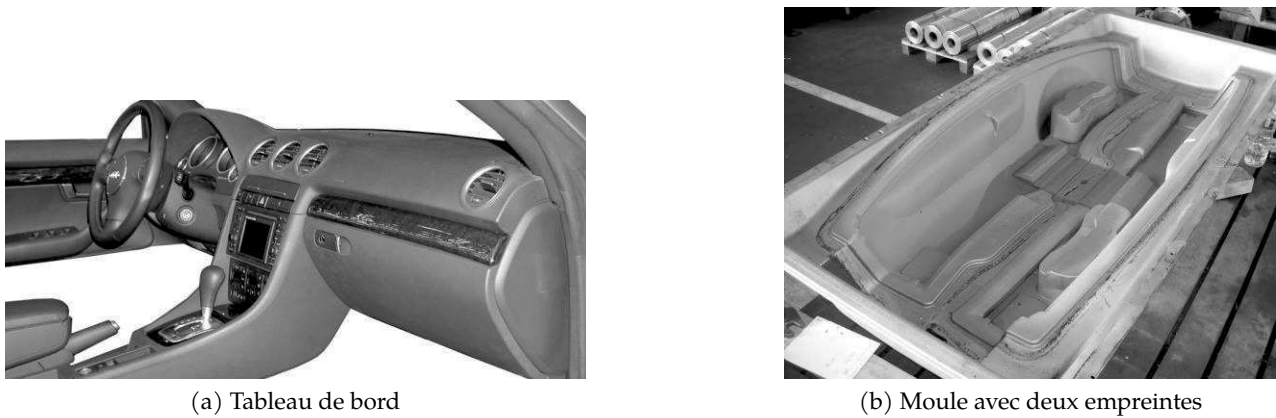


FIGURE 2.16 – Présentation

La société SMCA produit une cellule de fabrication des peaux de tableau de bord automobile, le CASM : Cellule Autonome de Slush-Molding.

Les peaux de tableau de bord sont fabriquées par dépôt d'une poudre de synthèse de polychlorure de vinyle ou polyuréthane sur une empreinte chaude appelée moule. La peau est le produit fabriqué par le procédé de « slush molding ». Il consiste en la mise en forme par fusion d'une poudre sur la surface d'un moule préchauffé. Le moule donne à la peau sa forme. Le moule fixé sur un bras est généralement double et permet ainsi de fabriquer 2 peaux (identiques ou non) au cours du même processus.

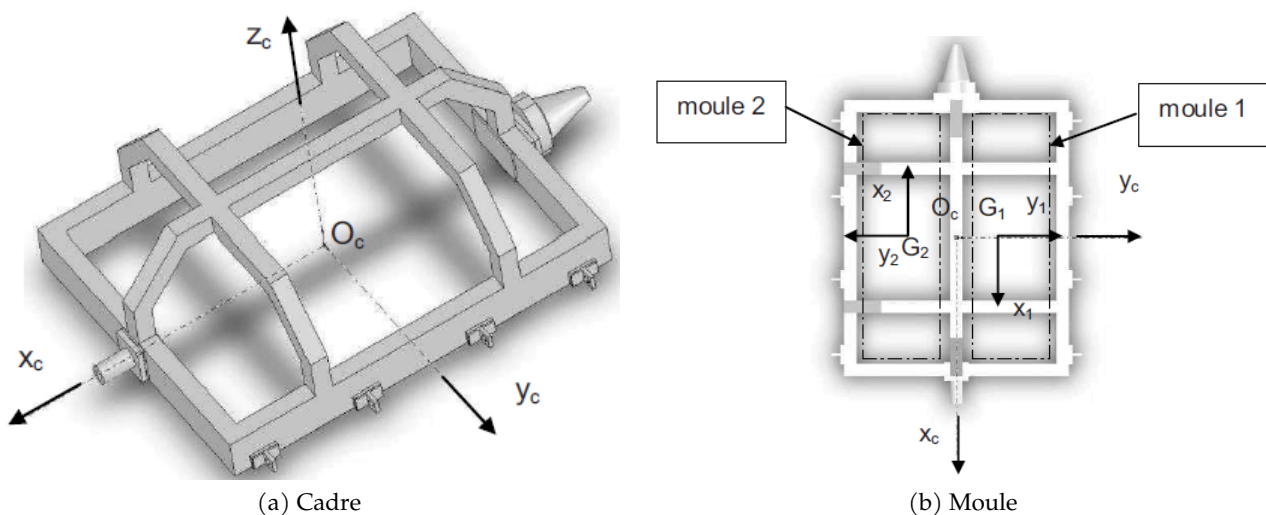


FIGURE 2.17 – Moules et cadre

Le carrousel comporte 4 bras (figure 2.18) soutenant chacun un cadre de deux moules (figure 2.17). Il permet le déplacement du moule, du poste (1) où la poudre est déposée dans le moule, au poste (2) de chauffage, au poste (3) pour le démoulage et finalement au poste (4) dans lequel le moule est refroidi avant le nouveau cycle.

2.4 Feuille de travaux dirigés n°2a

La matrice d'inertie du cadre (C) au point O_c , milieu du cadre se trouvant sur l'axe de rotation (O_x, \vec{x}_c) de celui-ci avec le plateau, dans la base $B_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ est la suivante :

$$\overline{\overline{J_{O_c}(C)}} = \begin{pmatrix} A_c & -F_c & -E_c \\ -F_c & B_c & -D_c \\ -E_c & -D_c & C_c \end{pmatrix}_{O_c}^{B_c}$$

Q1. Indiquer les termes nuls de cette matrice et préciser pourquoi.

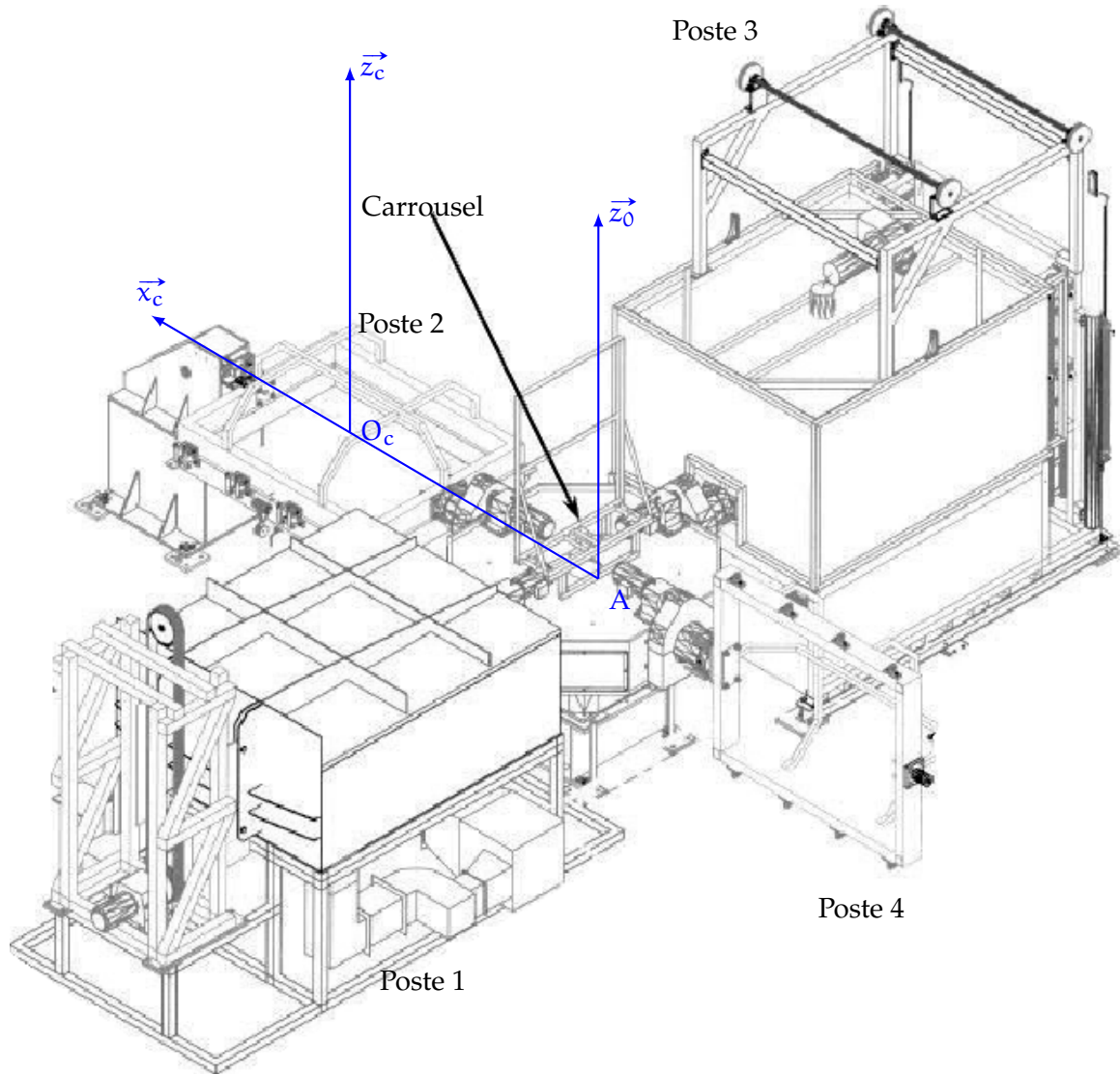


FIGURE 2.18 – Carrousel

Le cadre est équipé de deux moules identiques respectivement M1 et M2 montés en opposition (voir bases associées sur la figure).

Les matrices d'inertie des moules 1 et 2 au point O_c dans leurs bases respectives $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ sont identiques :

$$\overline{\overline{J_{O_c}(M1)}} = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{O_c}^{B_1} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{J_{O_c}(M2)}} = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{O_c}^{B_2}$$

Q2. Déterminer littéralement la matrice d'inertie du cadre équipé des deux moules au point O_c , dans la base $B_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ en fonction des termes des matrices précédentes

$$\overline{\overline{J_{O_c}(C + 2M)}} = \begin{pmatrix} A_{cm} & -F_{cm} & -E_{cm} \\ -F_{cm} & B_{cm} & -D_{cm} \\ -E_{cm} & -D_{cm} & C_{cm} \end{pmatrix}_{O_c}^{B_c}$$

Q3. Application numérique :

$$A_c = 159,22 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, B_c = 426,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, C_c = 531,77 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, E_c = 0,06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, A_m = 14,38 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ B_m = 15,43 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, C_m = 21,44 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, D_m = 5,32 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, E_m = 0,36 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, F_m = -0,04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

On donne :

- la masse m_{c_m} d'un cadre équipé de deux moules ;
- le moment d'inertie C_{c_m} d'un cadre équipé de deux moules autour de l'axe (O_c, \vec{z}_c) ;
- le centre de gravité d'un cadre équipé de deux moules est sur l'axe (O_c, \vec{z}_c) et situé à une distance d par rapport à l'axe de rotation axe Az_0 du plateau indexeur $\vec{z}_0 = \vec{z}_c$;
- le moment d'inertie C_p du plateau indexeur par rapport à l'axe (A, \vec{z}_0) .

L'inertie des « peaux fabriquées » étant négligée par rapport à celle du cadre équipé de deux moules.

Q4. Déterminer littéralement le moment d'inertie C de l'ensemble tournant plateau indexeur équipé de ses quatre cadres et huit moules par rapport à l'axe de rotation (A, \vec{z}_0) en fonction des termes précédents. L'ensemble pivote lorsque tous les cadres sont positionnés avec l'axe \vec{z}_c vertical.

Q5. Application numérique : $C_{c_m} = 575 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $m_{c_m} = 500 \text{ kg}$; $d = 2,95 \text{ m}$; $C_p = 1\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Exercice 5 - Compacteur

Adapté du concours Centrale TSI -2004

Corrigé page 28

Présentation

Le compacteur étudié (Caterpillar, modèle 214 D) est présenté sur la figure 2.19. Ce compacteur vibrant est destiné aux petits travaux de compactage.



FIGURE 2.19 – Compacteur

Pour ce type d'engin, le compactage résulte plus des chocs à fréquence élevée qu'exerce chaque cylindre sur le sol plutôt que de la masse du compacteur.

Les vibrations sont obtenues par le mouvement de rotation à vitesse rapide (3 600 tr/min) d'un arbre nommé arbre-balourd à l'intérieur des deux cylindres. L'arbre-balourd est constitué d'un arbre équilibré sur lequel est placée une masse excentrée (masse « balourd »). La mise en rotation de l'arbre-balourd est effectuée par un moteur hydraulique de vibration par l'intermédiaire d'une transmission à double joint de Cardan.

La masse « balourd » se trouve dans le plan médian vertical du cylindre (avant ou arrière).

Afin d'assurer le compactage, le concepteur a donc choisi d'ajouter au poids propre du système, l'effet d'une vibration réalisée par la mise en rotation d'un solide déséquilibré, l'arbre-balourd.

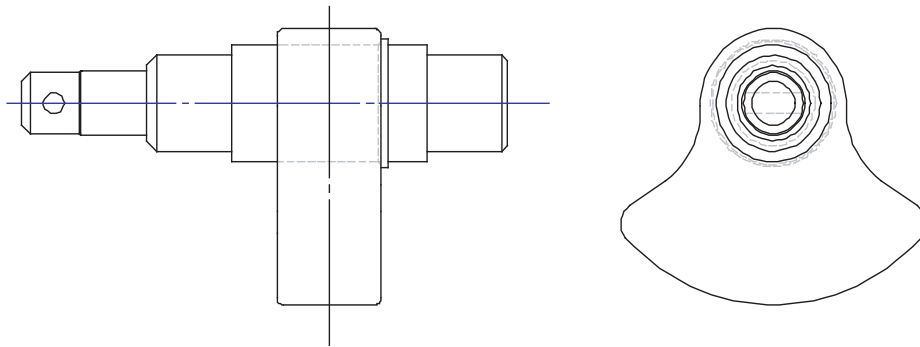


FIGURE 2.20 – Dessins de l'ensemble arbre et balourd

L'arbre-balourd est représenté sur la figure 2.20. Il est constitué de deux pièces, l'arbre a et le balourd b. Pour les différents calculs de masse et inertie, on utilisera les données du modèle simplifié de la figure 2.21.

Ces deux pièces sont en acier (masse volumique $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). L'arbre recevant le balourd est modélisé par un cylindre épaulé de diamètre $D_a = 45 \text{ mm}$ et de longueur $L_a = 232 \text{ mm}$ (son diamètre vaut $D_b = 55 \text{ mm}$ sous le balourd). On note O_a , le centre d'inertie de cet arbre.

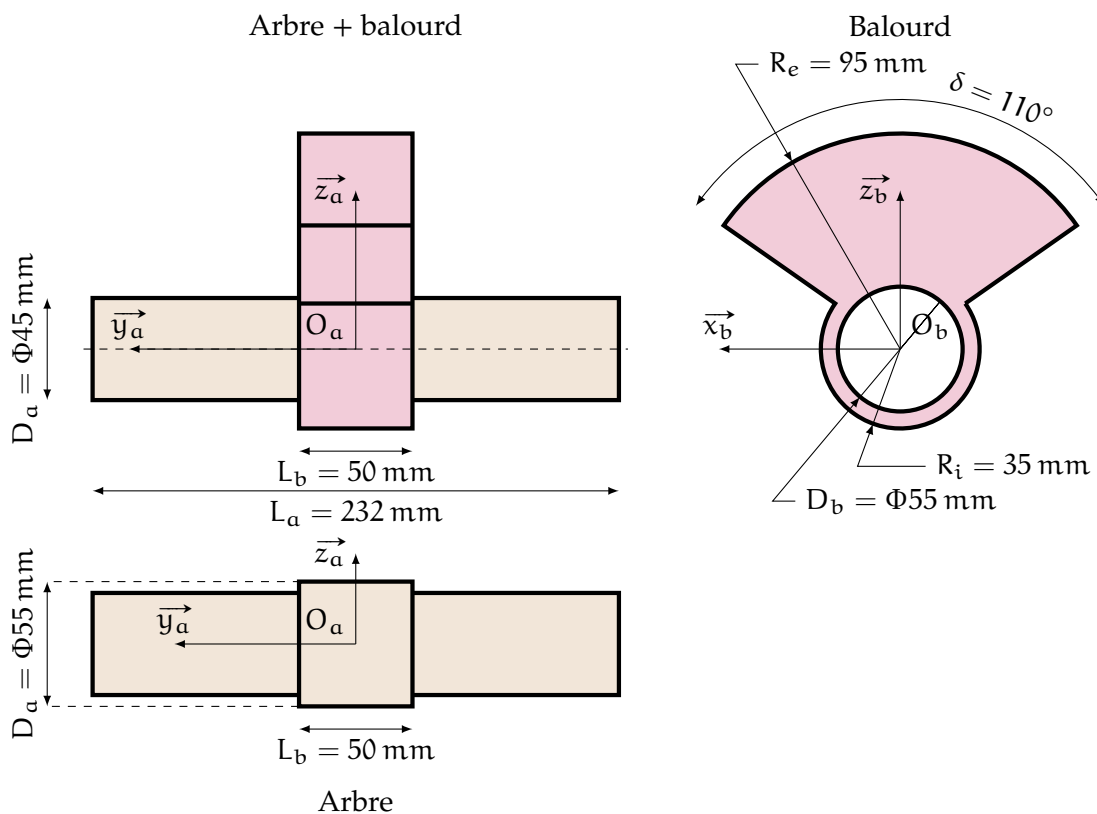


FIGURE 2.21 – Modélisation de l'arbre balourd, du balourd et de l'arbre

Q1. À partir de la modélisation du balourd, déterminer la masse du balourd, masse notée m_b .

Q2. Calculer la position du centre d'inertie G_b du balourd seul.

Pour la suite on prendra, $m_b = 3,5 \text{ kg}$ et $\vec{O}_b G_b \cdot \vec{z}_b = z_{Gb} = 49,7 \text{ mm}$.

Q3. En utilisant les données de la figure 2.21,

Q3a. Proposer et justifier l'allure générale de la matrice d'inertie de l'ensemble arbre-balourd, en O_a et dans la base $B_a = (\vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$.

Q3b. Calculer le moment d'inertie $B_{a,b}$ de cet ensemble autour de l'axe (O_a, \vec{y}_a) .

Le système étudié est présenté sur la figure 2.22. Il s'agit d'un disque 2 guidé en rotation sur un arbre 1, lui-même guidé par une liaison pivot par rapport au bâti 0. Le disque, d'épaisseur e , de rayon R et de masse M (de masse volumique ρ), comporte six usinages identiques répartis angulairement de manière égale (tous les 60°).

La rotation de l'arbre par rapport au bâti est paramétrée par l'angle α autour de l'axe (O_1, \vec{z}_0) . La rotation du disque sur l'arbre est paramétrée par l'angle θ autour de l'axe (O_2, \vec{x}_1) . On note L la distance entre les deux centres de rotation O_1 et O_2 . I désigne le point du disque tel que : $\vec{O_2 I} = -R \cdot \vec{z}_1$.

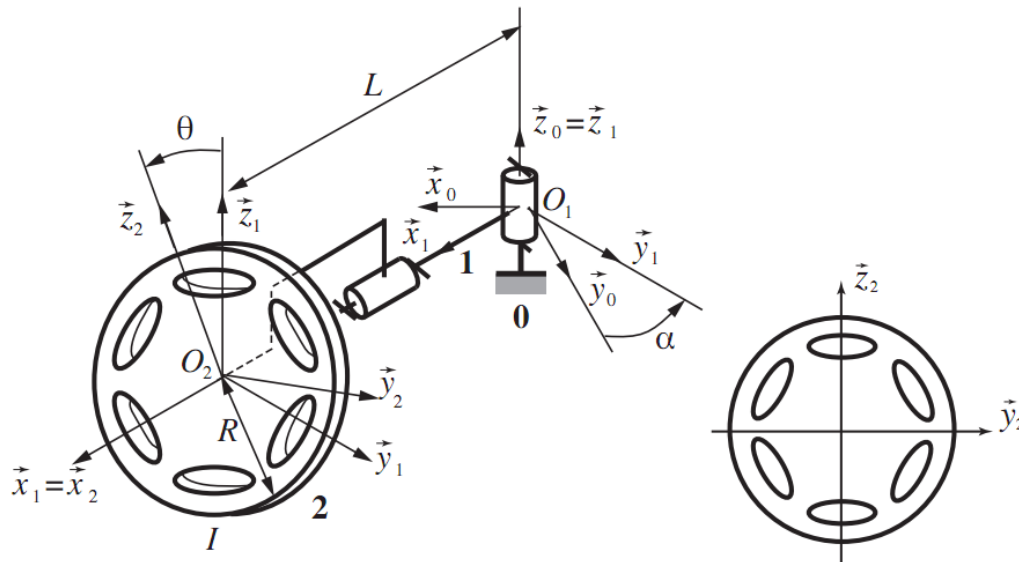


FIGURE 2.22 – Disque guidé en rotation par rapport au bâti et la vue de face du disque

Pour toutes les questions suivantes, vous pouvez, soit

- accepter la réponse proposée, et dans ce cas la vous précisez les éléments qui permettent d'obtenir le résultat (hypothèses, théorèmes, ...) sans calculer ;
- infirmer la réponse et dans ce cas la, vous devez déterminer la bonne réponse.

Q1. En toute rigueur et sans connaître les dimensions des usinages, on peut tout de même affirmer à la vue de la Figure 1(b) que l'opérateur d'inertie du disque 2 s'écrit comme suit au point O_2 et dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\overline{\overline{J_{O_2}(2)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{O_2}^{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Q2. En toute rigueur et sans connaître les dimensions des usinages, on peut tout de même affirmer à la vue de la Figure 1(b) que l'opérateur d'inertie du disque 2 s'écrit comme suit au point O_2 et dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\overline{\overline{J_{O_2}(2)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{O_2}^{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Q3. On décide maintenant de négliger les six usinages pour calculer l'opérateur d'inertie. En faisant l'hypothèse que l'épaisseur e est négligeable devant le rayon R , on peut écrire l'opérateur d'inertie sous

2.4 Feuille de travaux dirigés n°2a

la forme :

$$\overline{\overline{J_{O_2}(2)}} = \begin{pmatrix} 2 \cdot C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{O_2}^{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

où C est une constante similaire à A et B.

Q4. La valeur de C à la question précédente est donnée par :

$$C = \frac{\rho \cdot \pi \cdot e \cdot R^4}{2}$$

Q5. Le torseur cinématique du disque 2 dans son mouvement par rapport au bâti 0 s'écrit, au point I

$$\{v_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + \dot{\theta} \cdot \vec{x}_1 \\ (\dot{\alpha} \cdot L + R \cdot \dot{\theta}) \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\}_I$$

Q6. En reprenant les notations précédentes, le torseur dynamique du disque 2 dans son mouvement par rapport au bâti 0 s'écrit, au point O_2 :

$$\{D_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} M \cdot L \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 \\ 2 \cdot C \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_1 + C \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_2}$$