Des systèmes linéaires aux systèmes asservis

Robert Papanicola

Lycée Charlemagne- Paris 4e

5 janvier 2015

Sommaire

SLCI
Définition

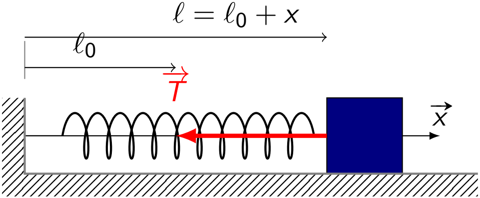
Définition : Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants [1]. Les systèmes linéaires possèdent principalement deux propriétés :

- la proportionnalité ;
- l'additivité.

1. Les équations différentielles seront abordées dans la suite du cours et approfondies en mathématiques

SLCI

Exemple



La deuxième loi de de Newton en projection sur l'axe $(O, \vec{x})$ s'écrit :

$$T_x = m \cdot \ddot{x}(t) \quad \text{avec} \quad T_x = -K \cdot (\ell - \ell_0)$$

SLCI

Exemple

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \ddot{x}(t) + K \cdot x(t) = 0$$

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{dt}^2} + K \cdot x(t) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant.

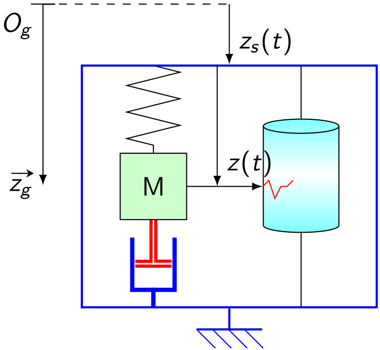
On obtient la solution de cette équation différentielle en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, elle est de la forme :

$$x(t) = A \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot t + \phi\right)$$

A l'amplitude et ϕ la phase à l'origine.

SLCI

Exemple - sismographe



- $M = 10\,\mathrm{kg}$: masse de la masse M,
- $k = 36\,\mathrm{kN\,m^{-1}}$: raideur du ressort,
- l_0 : longueur à vide du ressort,
- h : coefficient de frottement fluide avec les valeurs suivantes :
  $h_1 = 2\,000\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$,
  $h_2 = 1\,200\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$,
  $h_3 = 600\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$.

SLCI

Exemple - sismographe

Un sismographe simple est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur naturelle l_0, d'un amortisseur de coefficient de frottement h et d'une masse M (m) considérée comme ponctuelle.
Le ressort et l'amortisseur sont fixés à un cadre(C) rigide solidaire du sol(S). L'amortisseur exerce sur la masse M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport au cadre.
Un stylet reproduisant les déplacements verticaux de la masse M par rapport au cadre est fixé au niveau de la masse M (voir figure 6).
On considère que l'axe vertical $\overrightarrow{z_g}$ est un des axes du référentiel galiléen.
On note, $z_s(t)$ le mouvement du sol et $z(t)$ le mouvement du stylet.
Le mouvement du stylet dépend de la sollicitation $(z_s(t))$, de la masse et des caractéristiques ressort et de l'amortisseur. On se propose de déterminer l'équation différentielle du mouvement, liant le mouvement du stylet $(z(t))$ au mouvement du sol $(z_s(t))$

SLCI

Exemple - sismographe

Détermination de l'équation différentielle liant du mouvement liant $z_s(t)$ et $z_s(t)$.

Pour établir l'équation différentielle, nous allons appliquer la deuxième loi de Newton [2] (Principe Fondamental de la Dynamique en Translation) qui s'énonce : Dans un référentiel galiléen, la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le solide :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}_g}}\right]_{\mathcal{R}_g} = M \cdot \overrightarrow{a_{S/\mathcal{R}_g}}$$

avec $\overrightarrow{a_{S/\mathcal{R}_g}}$ l'accélération du solide par rapport au référentiel galiléen.

2. vu en TS dans le cours de physique

SLCI

Exemple - sismographe

La masse est soumise à 3 actions mécaniques :

- son poids

$$\overrightarrow{P} = M \cdot g \cdot \overrightarrow{z_g}$$

- l'action du ressort qui s'oppose à sa déformation

$$\overrightarrow{F_r} = -k \cdot (z - l_0) \cdot \overrightarrow{z_g}$$

- l'action de l'amortisseur, force de frottement fluide proportionnelle et opposée à la vitesse de déplacement de M par rapport au cadre :

$$\overrightarrow{F_a} = -h \cdot \frac{\mathrm{d}\, z}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{z_g} = -h \cdot \dot{z}(t) \cdot \overrightarrow{z_g}$$

La masse M se déplace verticalement, la projection sur $\overrightarrow{z_g}$ dans le référentiel galiléen est : $\overrightarrow{O_g M} \cdot \overrightarrow{z_g} = z_s(t) + z(t)$.
Pour un mouvement de translation vertical, l'accélération est la dérivée seconde du déplacement, soit :

$$\overrightarrow{a_{S/\mathcal{R}_g}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\, z_s(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\, z(t)}{\mathrm{d}t^2}\right) \overrightarrow{z_g} = \left(\ddot{z}_s(t) + \ddot{z}(t)\right) \overrightarrow{z_g}.$$

SLCI

Exemple - sismographe

Le principe fondamental de la dynamique en translation s'écrit donc :

$$M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z_s(t)}{\mathrm{dt}^2} + M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{dt}^2} = M \cdot g - k \cdot (z(t) - l_0) - h \cdot \frac{\mathrm{d}\, z(t)}{\mathrm{dt}}$$

en réorganisant :

$$M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{dt}^2} + h \cdot \frac{\mathrm{d}\, z(t)}{\mathrm{dt}} + k \cdot z(t) = -M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z_s(t)}{\mathrm{dt}^2} + M \cdot g + k \cdot l_0$$

On obtient une équation différentielle du second ordre à coefficient constant que l'on peut simplifier en considérant les mouvements par rapport à la position d'équilibre au repos. À l'équilibre (pas de mouvement), $\frac{\mathrm{d}^2 z_s(t)}{\mathrm{dt}^2} = 0$, $\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{dt}^2} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\, z(t)}{\mathrm{dt}} = 0$ et $z = z_e$, on peut écrire :

$$k \cdot z_e = M \cdot g + k \cdot l_0$$

On pose $z = z_e = 0$ à l'équilibre, donc :

$$M \cdot g + k \cdot l_0 = 0$$

SLCI

Exemple - sismographe

L'équation différentielle se simplifie donc en :

$$M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + h \cdot \frac{\mathrm{d}\, z(t)}{\mathrm{d}t} + k \cdot z(t) = -M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z_s(t)}{\mathrm{d}t^2}$$
$$M \cdot \ddot{z}(t) + h \cdot \dot{z}(t) + k \cdot z(t) = -M \cdot \ddot{z}_s(t)$$

L'équation du mouvement est une équation différentielle du second ordre (dérivée seconde) à coefficients constants.
La sortie est ici $z(t)$, c'est à dire le tracé du stylet sur le rouleau, elle dépend de la sollicitation, l'entrée ici, $\ddot{z}_s(t)$ (c'est a dire l'accélération des mouvements du sol) et des coefficients (constants) de l'équation.
Il ne reste plus qu'à la résoudre !

SLCI

Propriétés - proportionnalité

Définition : Si $y(t)$ est la réponse à l'entrée $x(t)$ alors $\lambda \cdot y(t)$ est la réponse à $\lambda \cdot x(t)$.

Dans un système linéaire, l'effet est proportionnel à la cause (figure 2).
L'effet de proportionnalité n'est effectif que lorsque le système a atteint sa position d'équilibre ou que le régime permanent s'est établi.
La caractéristique Entrée / Sortie d'un système linéaire est une droite dont la pente est appelée gain du système.
La réponse, en régime définitif (en régime permanent) d'un système linéaire à une entrée donnée est un signal de même nature que l'entrée.
Sur la figure 3 on constate que la réponse en régime établi à une entrée sinusoïdale de fréquence f est aussi une sinusoïde de même fréquence mais déphasée et atténuée.

SLCI

Propriétés - proportionnalité

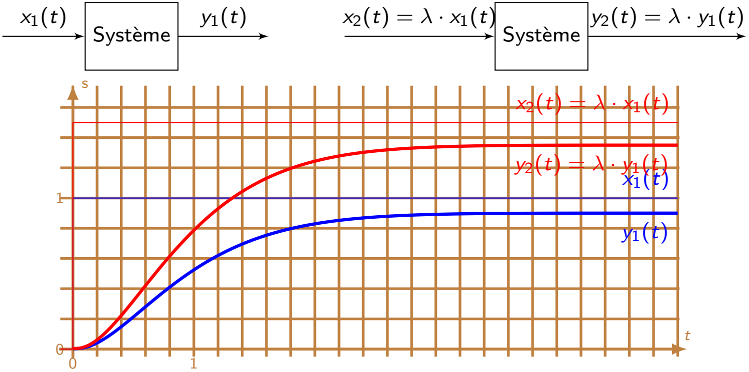
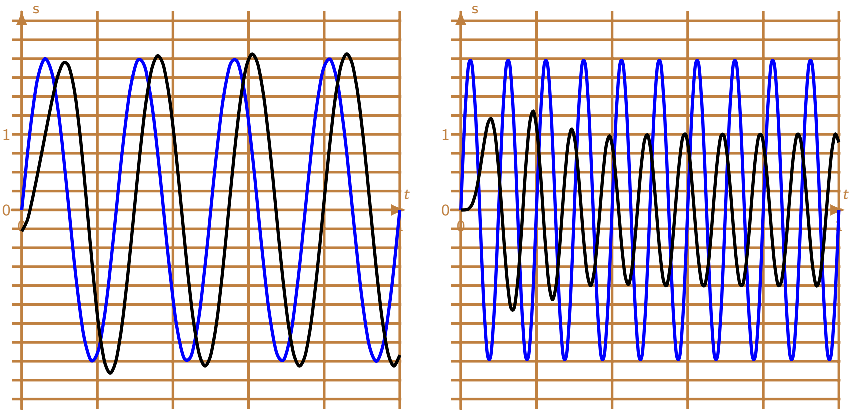


Figure: Proportionalité

SLCI

Propriétés - proportionnalité



(a) $f = 4\,\text{Hz}$ (b) $f = 10\,\text{Hz}$

Figure: Comportement en régime permanent

SLCI

Propriétés - additivité

Définition : Si $y_1(t)$ est la réponse à l'entrée $x_1(t)$ et $y_2(t)$ est la réponse à l'entrée $x_2(t)$ alors, $y_1(t) + y_2(t)$ est la réponse à l'entrée $x_1(t) + x_2(t)$(figure 4)

Les principes de proportionnalité et de superposition vont nous permettre, connaissant la réponse d'un système à des sollicitations simples de déterminer par additivité et proportionnalité la réponse à des sollicitations plus complexes.

SLCI

Propriétés - additivité

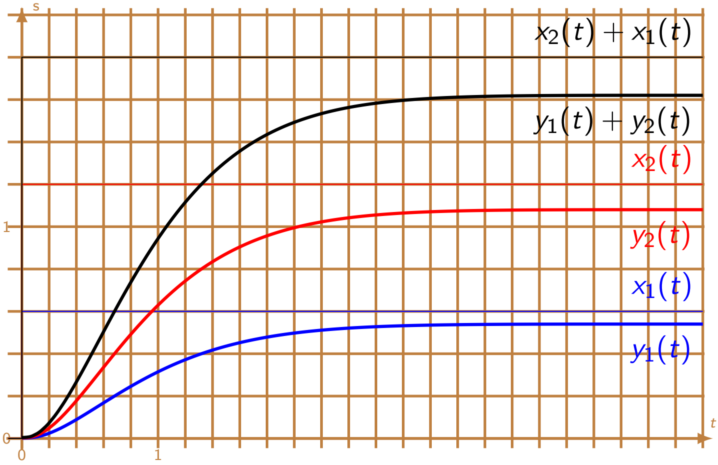


Figure: Principe de superposition

SLCI

Propriétés - continuïté

Un système est dit continu lorsque les grandeurs physiques qui le caractérisent, évoluent de manière continue d'un état à un autre.
On oppose les systèmes continus aux systèmes discrets pour lesquels l'évolution d'un état à un autre se fait par « saut » d'une valeur à la suivante.

SLCI

Propriétés - invariant

On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques du système ne se modifient pas dans le temps.

Remarque : Les systèmes réels ne sont ni linéaires, ni continus, ni invariants. Il est par contre toujours possible de modéliser correctement le système afin que celui ci puisse être considéré comme linéaire, continu et invariant dans la zone d'étude.

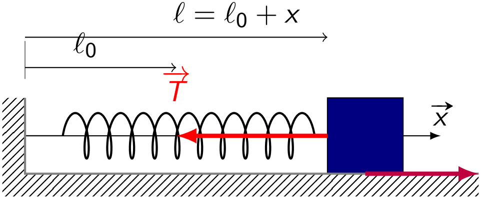
SLCI

non-linéarités

Les systèmes physiques présente en général des non linéarités, ainsi si nous reprenons le premier exemple de l'oscillateur harmonique en ajoutant un frottement solide (frottement sec) qui s'oppose avec un effort constant au déplacement, le système n'est plus linéaire.

SLCI

non-linéarités - exemple



$$\overrightarrow{F_f} = -\operatorname{sgn}\left(\dot{x}(t)\right) \cdot F_f \cdot \overrightarrow{x}$$

SLCI

non-linéarités - exemple

La deuxième loi de de Newton en projection sur l'axe $(O, \overrightarrow{x})$ s'écrit :

$$K \cdot x(t) - \operatorname{sgn}(\dot{x}(t)) \cdot F_f = m \cdot \ddot{x}(t)$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \ddot{x}(t) + \operatorname{sgn}(\dot{x}(t)) \cdot F_f + K \cdot x(t) = 0$$

Cette équation n'est plus une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant. Elle est non linéaire.
Malgré tout, dans ce cas là, il est encore possible de résoudre cette équation en l'étudiant par morceau suivant le signe de la vitesse $(\dot{x}(t))$.

SLCI

non-linéarités

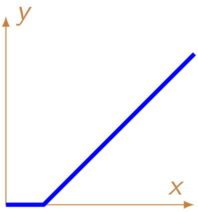
Les principales non linéarités :

Seuil : Un système présente un seuil si la sortie n'évolue que lorsque l'entrée dépasse une valeur minimale (seuil). Les seuils ont souvent pour origine des frottements secs.

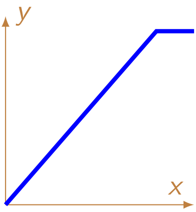
Saturation Un système présente une saturation lorsque la sortie n'évolue plus au-delà d'une valeur limite.
Ces saturations sont dues soit aux limites mécaniques du système (butées) soit aux limites des interfaces de puissance (saturation des amplificateurs opérationnels).

SLCI

non-linéarités



(a) seuil



(b) saturation

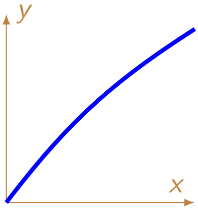
SLCI

non-linéarités

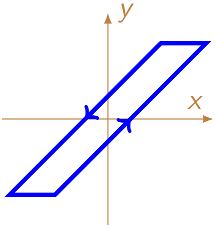
Courbure : La quasi totalité des systèmes présente des courbures plus ou moins prononcées.
Dans la plupart des cas le système est approché par une droite passant par l'origine, mais il est aussi possible de linéariser autour d'un point de fonctionnement.

Hystérésis : Un système présente une réponse avec une hystérésis lorsque le comportement est différent suivant le sens d'évolution de la variable d'entrée.
Exemple : cycle de magnétisation.

SLCI
non-linéarités



(c) courbure



(d) hystérésis

Figure: Non-linéarités

Systèmes linéaires

L'étude et la caractérisation des systèmes linéaires ne passent pas obligatoirement par la résolution de l'équation différentielle surtout qu'il n'est pas toujours possible de résoudre celle-ci.
Nous allons voir dans un premier temps les principes de la résolution des équations différentielles avec les outils mathématiques classiques puis en utilisant la **transformation de Laplace** qui permet de travailler dans un espace dans lequel les équations différentielles sont représentées par des polynômes.

Systèmes linéaires

Équations différentielles

Un système dynamique linéaire peut être décrit par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.
L'équation générale d'un système linéaire est de la forme :

$$b_m \frac{\mathrm{d}^m y(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 \cdot y(t) = a_n \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 \cdot x(t)$$

on note :

$$\frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{y}(t)$$ dérivée 1^{re} de $y(t)$ par rapport au temps

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y}(t)$$ dérivée 2^{nd} de $y(t)$ par rapport au temps

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}$$ dérivée n^{me} de $y(t)$ par rapport au temps

Pour les systèmes réels, $m \geq n$ (principe de causalité).

Systèmes linéaires

Équations différentielles

À partir de cette représentation il est possible de déterminer l'évolution temporelle de la sortie en résolvant l'équation différentielle.

Nous n'allons pas ici faire un cours de math, juste montrer les principes de la résolution dans des exemples simples.

Vous trouverez en annexe, un document plus complet sur la résolution des équations différentielles.

On considère deux formes d'équations différentielles à coefficients constants, les équations sans second membre, et celle avec second membre.

Systèmes linéaires
Équations différentielles

équation sans second membre :

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2} + b \cdot \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + c \cdot s(t) = 0$$

équation avec second membre :

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2} + b \cdot \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + c \cdot s(t) = e(t)$$

Résoudre une équation avec second membre commence par résoudre une équation sans second membre puis il faut rechercher une solution particulière égale au second membre.

Systèmes linéaires

Équations différentielles

Pour une équation différentielle du 1er ordre,

$$\tau \cdot \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + s(t) = 0$$

la réponse est de la forme :

$$s(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec A une constante déterminée en fonction des conditions initiales.
Pour une équation différentielle d'ordre supérieur, montrons qu'une solution de la forme

$$s(t) = A \cdot e^{r \cdot t} \quad \text{avec } A \text{ réel et } r \text{ réel ou complexe}$$

existe.

Systèmes linéaires

Équations différentielles

Remplaçons $s(t)$ dans l'équation différentielle.

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2} + b \cdot \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + b \cdot s(t) = 0$$

avec $\frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} = A \cdot r \cdot e^{r \cdot t}$ et $\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2} = A \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot t}$

$$a \cdot A \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot t} + b \cdot A \cdot r \cdot e^{r \cdot t} + c \cdot A \cdot e^{r \cdot t} = 0$$

$$A \cdot \left(a \cdot r^2 + b \cdot r + c\right) \cdot e^{r \cdot t} = 0$$

Cette égalité n'est nulle que si r est solution de l'équation du second degré :

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$$

On appelle cette équation, l'équation caractéristique de l'équation différentielle

Systèmes linéaires

Équations différentielles

- $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ alors il existe deux racines réelles : $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$ et $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$. La solution est alors de la forme :

$$s(t) = A_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

- $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ alors il existe deux racines complexes conjuguées : $r_1 = \dfrac{-b + j \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}$ et $r_2 = \dfrac{-b - j \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}$. La solution est alors de la forme :

$$s(t) = A_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

Remarque : l'exponentielle complexe : $e^{j \cdot \theta} = \cos\theta + j \cdot \sin\theta$

- $\Delta = 0$, alors l'équation à une racine réelle double $r_1 = \dfrac{-b}{2 \cdot a}$. On montre que la solution de l'équation différentielle est alors :

$$s(t) = (A_1 \cdot t + A_2) \cdot e^{r_1 \cdot t}$$

Systèmes linéaires

Équations différentielles

On le voit, on pourra étudier le comportement d'un système linéaire à partir de la réponse temporelle. Mais cette méthode est peu utilisé en automatique, on préfère utiliser une autre méthode, la transformation de Laplace.

Systèmes linéaires

Équations différentielles - exercice

Le comportement simplifié d'un moteur à courant continu peut être décrit par les équations suivantes :

$$u(t) = R \cdot i(t) + e(t)$$

$u(t)$: la tension d'alimentation, $i(t)$: le courant et $e(t)$ la force contre électromotrice.

$$J \cdot \frac{\mathrm{d}\,\omega(t)}{\mathrm{dt}} = C_m(t)$$

$\omega(t)$: la vitesse de rotation du moteur, $C_m(t)$: le couple moteur.

$$\begin{aligned} C_m(t) &= K_t \cdot i(t) \\ e(t) &= K_e \cdot \omega(t) \end{aligned}$$

Donner l'équation différentielle donnant la vitesse de rotation $\omega(t)$ en fonction de la tension d'alimentation $u(t)$.

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace

Avant de commencer cette partie, nous allons d'abord faire un point mathématique sur la transformée de Laplace.

Il est absolument nécessaire de bien assimiler le cours sur la transformation de Laplace pour pouvoir poursuivre l'étude des systèmes linéaires et asservis

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace

L'utilisation de la transformée de Laplace pour la résolution des équations différentielles, a été développée par Heaviside.

La transformation permet de ramener l'étude des équations différentielles dans le domaine temporel, à une étude d'un polynôme dans le domaine symbolique.

Soit l'équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants

$$b_2 \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2} + b_1 \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + b_0 \cdot s(t) = e(t)$$

avec les conditions initiales suivantes : $s(0) = a$ et $\dot{s}(0) = b$.

On pose :

$$E(p) = \mathcal{L}\left(e(t)\right) \quad \text{et} \quad S(p) = \mathcal{L}\left(s(t)\right)$$

on a aussi :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}}\right) = p \cdot S(p) - s(0) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2}\right) = p^2 \cdot S(p) - p \cdot s(0) - \dot{s}(0)$$

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace

En substituant :

$$b_2\left(p^2 \cdot S(p) - p \cdot s(0) - \dot{s}(0^+)\right) + b_1\left(p \cdot S(p) - s(0)\right) + b_0 \cdot S(p) = E(p)$$

$$\left(b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0\right) \cdot S(p) - b_2 \cdot p \cdot s(0) - b_2 \cdot \dot{s}(0) - b_1 \cdot s(0) = E(p)$$

$$S(p) = \frac{E(p) + b_2 \cdot p \cdot s(0) + b_2 \cdot \dot{s}(0) + b_1 \cdot s(0)}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}$$

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace

La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.
En général, on se place dans les conditions de Heaviside, c'est à dire que les différentes conditions initiales sont nulles. si ce n'est pas le cas, on réalise un changement de variable qui permet de les annuler.
Dans les conditions de Heaviside, le résultat précédent devient :

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} E(p)$$

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace

Ce résultat est important, il permet de montrer que dans le domaine symbolique, la sortie (la solution de l'équation différentielle) s'obtient comme le produit de :

- la transformée de Laplace du signal d'entrée : $E(p) = \mathcal{L}\left(e(t)\right)$
- et d'une fraction rationnelle.

On appelle

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

La **fonction de transfert** du système linéaire.

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace

On utilisera pour représenter le système, une représentation graphique, le schéma bloc :

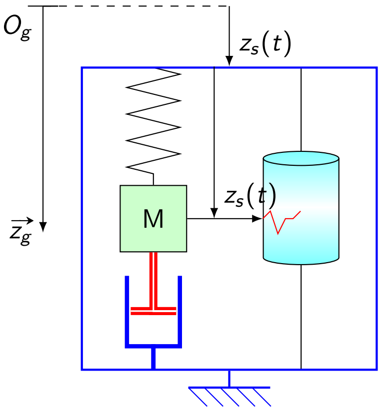
$$E(p) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}} \longrightarrow S(p)$$

La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace - exemple

On poursuit l'étude du sismometre



- $M = 10\,\text{kg}$: masse de la masse M,
- $k = 36\,\text{kN}\,\text{m}^{-1}$: raideur du ressort,
- l_0 : longueur à vide du ressort,
- h : coefficient de frottement fluide avec les valeurs suivantes :
  $h_1 = 2\,000\,\text{N}\,\text{s}\,\text{m}^{-1}$,
  $h_2 = 1\,200\,\text{N}\,\text{s}\,\text{m}^{-1}$,
  $h_3 = 600\,\text{N}\,\text{s}\,\text{m}^{-1}$.

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace - exemple

L'équation différentielle du mouvement du sysmomètre s'écrit :

$$M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{dt}^2} + h \cdot \frac{\mathrm{d}\, z(t)}{\mathrm{dt}} + k \cdot z(t) = -M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z_s(t)}{\mathrm{dt}^2}$$

$$M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{dt}^2} + h \cdot \frac{\mathrm{d}\, z(t)}{\mathrm{dt}} + k \cdot z(t) = -M \cdot \gamma_s(t)$$

avec $\gamma_s(t)$ l'accélération verticale du boitier.

On se place dans les conditions d'Heaviside (le sismomètre est à l'arrêt au début de l'étude, à l'équilibre).

On pose les transformées de Laplace : $\mathcal{L}\left(z_s(t)\right) = Z(p)$ et $\mathcal{L}\left(\gamma_s(t)\right) = \Gamma_s(p)$

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace - exemple

L'équation différentielle devient dans le domaine symbolique :

$$
\begin{aligned}
M \cdot p^2 \cdot Z(p) + h \cdot p \cdot Z(p) + k \cdot Z(p) &= -M \cdot \Gamma_s(p) \\
\left(M \cdot p^2 + h \cdot p + k\right) \cdot Z(p) &= -M \cdot \Gamma_s(p)
\end{aligned}
$$

soit :

$$Z(p) = \frac{-M}{M \cdot p^2 + h \cdot p + k} \cdot \Gamma_s(p)$$

Le système peut être représenté par le schéma bloc suivant :

$$\xrightarrow{\Gamma_s(p)} \boxed{\frac{-M}{M \cdot p^2 + h \cdot p + k}} \xrightarrow{Z(p)}$$

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace - exemple

Pour poursuivre, il faut définir la nature de l'entrée, supposons que le cadre est soumis à une impulsion (accélération très courte et de grande amplitude), cette impulsion peut être modélisée par une impulsion de Dirac. On a alors : $\gamma_s(t) = \delta(t)$.

La transformée de Laplace de l'accélération est : $\mathcal{L}\left(\gamma_s(t)\right) = \Gamma_s(p) = 1$

$$Z(p) = \frac{-M}{M \cdot p^2 + h \cdot p + k}$$

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace - exemple

Compte tenu des valeurs numériques de $M = 10\,\mathrm{kg}$ et $k = 36\,\mathrm{kN\,m^{-1}}$ et pour h :

$h_1 = 2\,000\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$

$$Z(p) = \frac{-10}{10 \cdot p^2 + 2\,000 \cdot p + 36\,000} = \frac{-1}{p^2 + 200 \cdot p + 3\,600}$$

Le dénominateur admet 2 racines réelles.

$$Z(p) = \frac{-1}{(p+180) \cdot (p+20)}$$

La décomposition en fraction simple s'écrit :

$$Z(p) = \frac{A}{(p+180)} + \frac{B}{(p+20)} = \frac{1}{160 \cdot (p+180)} - \frac{1}{160 \cdot (p+20)}$$

À partir du tableau des transformées page **??**, on déduit la réponse temporelle pour un Dirac :

$$z(t) = \left(\frac{1}{160} \cdot e^{-180 \cdot t} - \frac{1}{160} \cdot e^{-20 \cdot t} \right) \cdot \mathcal{H}(t)$$

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace - exemple

$h_2 = 1\,200\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$

$$Z(p) = \frac{-10}{10 \cdot p^2 + 1\,200 \cdot p + 36\,000} = \frac{-1}{p^2 + 120 \cdot p + 3\,600}$$

Le dénominateur admet 1 racine double

$$Z(p) = \frac{-1}{(p+60)^2}$$

À partir du tableau des transformées page **??** on obtient

$$z(t) = -t \cdot e^{-60 \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$$

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace - exemple

$h_3 = 600\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$

$$Z(p) = \frac{-1}{p^2 + 60 \cdot p + 3\,600}$$

Le dénominateur admet 2 racines complexes conjuguées, pour déterminer la transformée inverse, on doit mettre la fraction rationnelle sous la forme : $\dfrac{1}{{\omega_0}^2 + 2 \cdot z \cdot \omega_0 \cdot p + p^2}$ (tableau de la page **??**)

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{-1}{p^2 + 60 \cdot p + 3\,600} \\ &= \frac{-1}{p^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 60 \cdot p + 60^2} \end{aligned}$$

soit $\omega_0 = 60\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et $z = 0{,}5$. On retrouve la fonction temporelle à partir du tableau :

Systèmes linéaires

Transformation de Laplace - exemple

La transformée de Laplace permet donc de résoudre les équations différentielles à coefficients constants. Cette méthode ne permet pas de résoudre d'autres équations que celle que l'on pourraient résoudre par la méthode classique, par contre elle permet de prendre en compte rapidement les conditions initiales et surtout les signaux d'entrées composés.

Systèmes linéaires

Schémas blocs

La description par la transformée de Laplace se prête bien à une représentation graphique de l'équation différentielle et de manière générale des systèmes linaires Pour tracer le schéma bloc, nous allons déterminer la fonction de transfert de chaque équation différentielle, puis associer à chacune un schéma bloc que nous allons relier.

Systèmes linéaires

Schémas blocs - exemple

Le système représenté figure 7 est chargé de maintenir la température d'une enceinte Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne v, permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur. On note :

- $\alpha(t)$: l'angle d'ouverture de la vanne.
- $q(t)$: débit dans l'échangeur.
- θ_1 : température en sortie de l'échangeur.
- θ : température dans l'enceinte

Systèmes linéaires

Schémas blocs - exemple

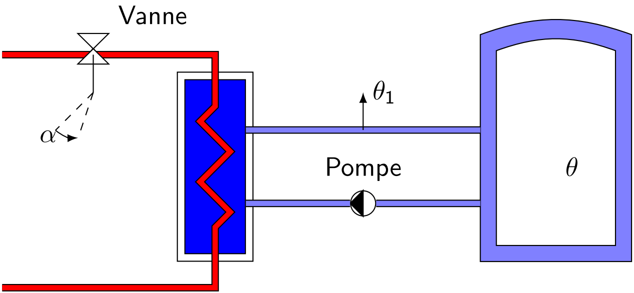


Figure: Échangeur thermique

Systèmes linéaires

Schémas blocs - exemple

La loi de fonctionnement de la vanne est caractérisée par l'équation

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$$

donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture (le débit est proportionnel à l'ouverture de la vanne).
Les deux autres équations caractérisent le transfert de chaleur :

- dans l'échangeur : $\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \dfrac{\mathrm{d}\,\theta_1(t)}{\mathrm{d}t} = k_1 \cdot q(t)$;
- et dans l'enceinte : $\theta(t) + \tau_2 \cdot \dfrac{\mathrm{d}\,\theta(t)}{\mathrm{d}t} = k_2 \cdot \theta_1(t)$.

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles.
L'entrée du système est l'angle d'ouverture de la vanne $\alpha(t)$ et la température de l'enceinte θ, la sortie.
On note : $A(p)$ la transformée de Laplace de $\alpha(t)$ et $Q(tp)$, $\Theta(p)$ et $\Theta_1(p)$ respectivement les transformées de $q(t)$, $\theta(t)$ et $\theta_1(t)$.

Systèmes linéaires

Schémas blocs - exemple

Dans le domaine de Laplace, les équations deviennent :

$$Q(p) = k_0 \cdot A(p)$$
$$\Theta_1(p) + \tau_1 \cdot p \cdot \Theta_1(p) = k_1 \cdot Q(p) \quad \Rightarrow \quad \Theta_1(p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) = k_1 \cdot Q(p)$$
$$\Theta(p) + \tau_2 \cdot p \cdot \Theta(p) = k_2 \cdot \Theta_1(p) \quad \Rightarrow \quad \Theta(p) \cdot (+\tau_2 \cdot p) = k_2 \cdot \Theta_1(p)$$

Il est possible d'écrire les fonctions de transfert

$$H_1(p) = \frac{Q(tp)}{A(p)} = k_0$$
$$H_2(p) = \frac{\Theta_1(p)}{Q(p)} = \frac{k_1}{1 + \tau_1 \cdot p}$$
$$H_3(p) = \frac{\Theta(p)}{\theta_1(p)} = \frac{k_2}{1 + \tau_2 \cdot p}$$

Systèmes linéaires

Schémas blocs - exemple

d'où le schéma bloc du système.

$$\xrightarrow{A(p)} \boxed{k_0} \xrightarrow{Q(p)} \boxed{\dfrac{k_1}{1+\tau_1 \cdot p}} \xrightarrow{\Theta_1(p)} \boxed{\dfrac{k_2}{1+\tau_2 \cdot p}} \xrightarrow{\Theta(p)}$$

Finalement, la fonction de transfert $H_O(p) = \dfrac{\Theta(p)}{A(p)}$ du système complet :

$$H_O(p) = \frac{\Theta(p)}{A(p)} = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1+\tau_1 \cdot p) \cdot (1+\tau_2 \cdot p)}$$

Systèmes linéaires

Schémas blocs - exemple

À partir de la fonction de transfert du système il est possible de déterminer l'allure de l'évolution de la température, si par exemple on ouvre la vanne d'un angle constant (un échelon de consigne) :

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \mathcal{H}(t)$$

Nous verrons plus loin la syntaxe complète des schémas blocs.

Systèmes linéaires

Schémas blocs - exercice

Enceinte chauffée - réponse temporelle en boucle ouverte

On poursuit l'étude de l'enceinte chauffée.

Déterminer l'allure de l'évolution de la température dans l'enceinte, tous les coefficients k_i etτ_i étant positifs pour un échelon d'amplitude de l'ouverture de la vanne.

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \mathcal{H}(t)$$

Structure d'un système asservi

Exemple

L'objectif d'un système automatisé étant de remplacer l'homme dans une tâche, nous allons pour établir la structure d'un système automatisé commencer par étudier le fonctionnement d'un système dans lequel l'homme est la « partie commande ».

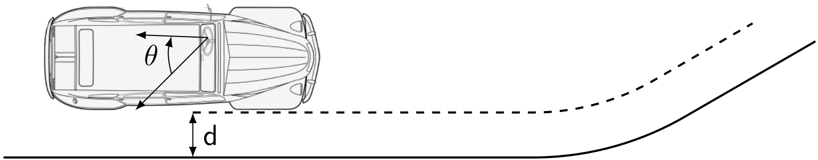


Figure: Maintien de la trajectoire d'une voiture

Structure d'un système asservi

Exemple

Le conducteur doit suivre la route (figure 8), pour cela :

- Il observe la route et son environnement et évalue la distance d qui sépare son véhicule du bord de la route.
- Il détermine en fonction du contexte l'angle θ qu'il doit donner au volant pour suivre la route.
- Il agit sur le volant (donc sur le système), la rotation du volant est transmise aux roues via la colonne de direction.
- puis de nouveau il recommence son observation pendant toute la durée du déplacement.
- Si un coup de vent dévie le véhicule, après avoir observé et mesuré l'écart il agit pour s'opposer à cette perturbation le plus rapidement possible.

Structure d'un système asservi

Schéma fonctionnel

Le fonctionnement peut être traduit par le schéma.

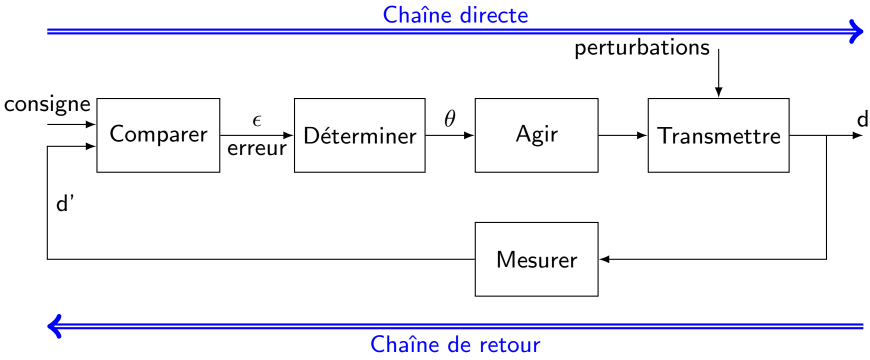


Figure: Schéma fonctionnel d'un asservissement

Structure d'un système asservi

Structure d'un système asservi

En précisant les constituants qui réalisent les fonctions on retrouve les constitaunts des chaînes d'énergie et d'information.

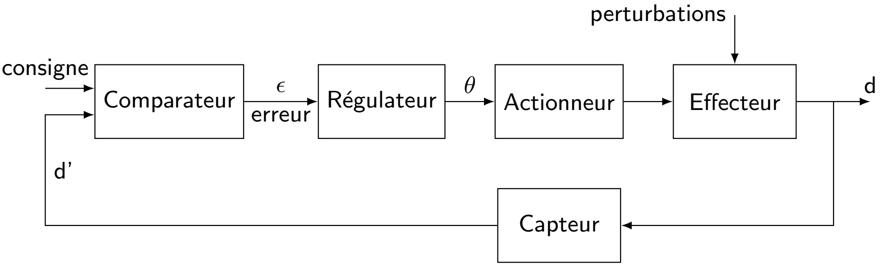


Figure: Constituants d'un asservissement

Structure d'un système asservi

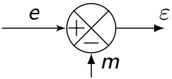
Structure d'un système asservi

Les schémas précédents présente la structure classique d'un système asservis, elle décrit le fonctionnement.
Le conducteur souhaite maintenir une distance constante avec le bord de la route, il agit sur le volant pour régler la distance, un capteur (ses sens) mesure en permanence l'évolution de la sortie à contrôler (ici la distance d) et en retourne une image (d') à la partie commande qui la compare à la consigne. En fonction de l'erreur (ϵ), le système va déterminer la nouvelle loi de commande (ici θ) et agir.
On retrouve la structure générique que nous avons détaillée dans le chapitre précédent. Elle fait apparaître une chaine directe d'action et boucle de rétroaction.

Structure d'un système asservi

Constituants

Comparateur : le comparateur est chargé de comparer la consigne et l'image de la grandeur à asservir. À la sortie du comparateur, on trouve l'erreur (ou écart) entre ces deux informations.



Partie commande ou régulateur : la partie commande, le régulateur, le contrôleur, détermine la loi de commande à partir de l'erreur et de son évolution.

Actionneur : c'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité. Il est en général associé à un pré-actionneur qui permet de moduler l'énergie.

Capteur : le capteur prélève sur le système la grandeur réglée (information physique) et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur. La précision et la rapidité sont deux caractéristiques importantes du capteur.

Effecteur : L'effecteur rassemble l'ensemble des constituants qui vont permettre d'obtenir la sortie à partir de l'énergie fournie par l'actionneur.

Structure d'un système asservi

Signaux

Consigne : la consigne, est la grandeur réglante du système, c'est ce que l'on veut obtenir.

Sortie régulée : la sortie régulée représente le phénomène physique que doit régler le système, c'est la raison d'être du système.

Perturbation on appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie a son niveau indépendamment des perturbations.

Écart, erreur : on appelle écart ou erreur, la différence entre la consigne et la sortie. Cette mesure ne peut être réalisée que sur des grandeurs comparables, on la réalisera donc en général entre la consigne et la mesure de la sortie.

Structure d'un système asservi

Régulation et asservissement

On considère deux types principaux de systèmes asservis.

Régulation : on appelle régulation un système asservi qui doit maintenir constante la sortie conformément à la consigne (constante) indépendamment des perturbations (régulation de température d'un four, régulateur de vitesse, ...).

Asservissement : on appelle asservissement un système asservi dont la sortie doit suivre le plus fidèlement possible la consigne quelle que soit son évolution (suivi de trajectoire d'un robot, asservissement de vitesse).