Cinétique
Masse et inertie

Papanicola

Lycée Jacques Amyot

23 septembre 2012

Sommaire

Cinétique
Masse et inertie
- Masse
  - Conservation de la masse
- Centre d'inertie
  - Centre d'inertie d'un ensemble de corps
  - Théorèmes de Guldin

Moments et produits d'inertie
- Moments d'inertie
  - Moment d'inertie par rapport à un point
  - Moment d'inertie par rapport à un point
  - Moment d'inertie par rapport à une droite
  - Rayon de giration
  - Moments d'inertie dans un repère cartésien
  - Relations
- Théorème de Huygens
  - Relation entre les moments d'inertie par rapport à deux droites parallèles
- Produits d'inertie

Cinétique

En première année nous avons débuté l'étude de la mécanique du solide par la cinématique du solide puis par la statique des solides.

- La cinématique est l'étude et la caractérisation des mouvements d'un solide,
- la statique correspond à l'étude de l'équilibre statique (sans mouvement) d'un solide soumis à des actions mécaniques extérieures.
- Ces deux études se sont appuyées sur la modélisation du mécanisme (liaisons).

Nous allons compléter ce cours par la dynamique du solide, c'est à dire l'étude du mouvement des solides avec leur masse et inertie soumis a des actions mécaniques extérieures, en commençant par définir les notions de masse et d'inertie et la cinétique.

Masse et inertie
Notions d'inertie

L'inertie caractérise la résistance qu'oppose un corps par sa nature propre à une variation de mouvement (passer de l'arrêt au mouvement ou le contraire.
Ainsi, nous savons, par l'expérience, qu'il est plus « difficile » d'accélérer ou de freiner un camion qu'une moto.

Pour un mouvement de translation, la masse suffit pour définir cette quantité, par contre pour un mouvement de rotation, il est nécessaire de préciser la répartition de cette masse.

La **cinétique** est l'étude des caractéristiques d'inertie d'un solide.

Masse et inertie
Masse

La masse caractérise la quantité de matière d'un système « matériel », c'est une grandeur complétement additive.
Soit, Σ_1 ,Σ_2 deux systèmes matériels disjoints alors :

$$m(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = m(\Sigma_1) + m(\Sigma_2) \qquad (1)$$

avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \phi$.
La masse m_Σ de l'ensemble Σ est définie par :

$$m_\Sigma = \int_\Sigma \mathrm{d}m = \int_V \rho(P)\,\mathrm{d}v \qquad (2)$$

avec $\rho(P)$ masse volumique au point P et $\mathrm{d}v$ un élément de volume.

Masse et inertie
Masse

Masse volumique : Si le système matériel est assimilable à un volume, on parle de masse volumique $\rho(P)$ au point P :

$$\mathrm{d}m = \rho(P)dv;$$

Masse surfacique : Si le système matériel est assimilable à une surface on parle de masse surfacique $\sigma(P)$ au point P :

$$\mathrm{d}m = \sigma(P)ds;$$

Masse linéique : Si le système matériel est assimilable à une ligne, on parle de masse linéique $\lambda(P)$ au point P :

$$\mathrm{d}m = \lambda(P)dl.$$

Masse et inertie
Masse

On admet en mécanique classique que la masse est une grandeur indépendante du temps, ainsi pour deux instants t_1 et t_2 quelconque :

$$m(\Sigma, t_1) = m(\Sigma, t_2). \qquad (3)$$

On en déduit une relation importante :

$$\left[\frac{d}{dt}\int\limits_{P\in\Sigma} \overrightarrow{f(P,t)}\,\mathrm{d}m\right]_R = \int\limits_{P\in\Sigma} \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{f(P,t)}\right]_R \mathrm{d}m. \qquad (4)$$

qui permet d'inverser la dérivation par rapport au temps et l'intégration par rapport à la masse.

Masse et inertie
Centre d'inertie

On appelle centre d'inertie du système matériel Σ , le point G défini par :

$$\int\limits_{P\in\Sigma} \overrightarrow{GP}\,\mathrm{d}m = \vec{0}. \qquad (5)$$

En faisant intervenir le point O, la relation devient

$$\int_\Sigma \overrightarrow{GO}\,\mathrm{d}m + \int_\Sigma \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}m = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \int_\Sigma \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}m = m_\Sigma \cdot \overrightarrow{OG}$$

finalement

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_\Sigma}\int\limits_{P\in\Sigma} \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}m \qquad (6)$$

Masse et inertie

Centre d'inertie - Centre d'inertie dans un repère cartésien

Dans un repère cartésien, on note (x_G, y_G, z_G) les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ et (x, y, z) les coordonnées de $\overrightarrow{OP}$, on peut donc écrire :

$$x_G = \frac{1}{m_\Sigma}\int_\Sigma x \cdot \mathrm{d}m,$$
$$y_G = \frac{1}{m_\Sigma}\int_\Sigma y \cdot \mathrm{d}m,$$
$$z_G = \frac{1}{m_\Sigma}\int_\Sigma z \cdot \mathrm{d}m.$$

Masse et inertie

Centre d'inertie - Propriétés du centre d'inertie

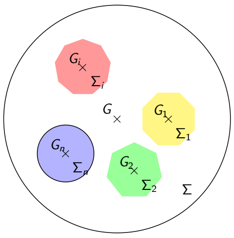
- Si le système matériel est un solide indéformable, le centre d'inertie est un point fixe du solide ;
- Si le système matériel possède un élément de symétrie matérielle, plan ou axe de symétrie, aussi bien du point de vue géométrique que du point de vue de la répartition des masses, le centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie ;
- Le centre d'inertie est confondu avec centre de gravité dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme.

Masse et inertie

Centre d'inertie - Centre d'inertie d'un ensemble de corps

Un ensemble matériel Σ est composé de n sous-ensembles matériels Σ_i. A chaque sous-ensemble Σ_i est associé sa masse m_i et son centre d'inertie G_i, alors

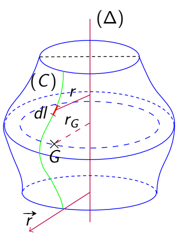
$$\overrightarrow{OG_\Sigma} = \frac{1}{m_\Sigma}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}. \quad (7)$$



Le centre d'inertie d'un ensemble de corps est le barycentre des centres d'inertie.
Si les corps sont des solides indéformables immobiles les uns par rapport aux autres, le centre d'inertie de l'ensemble est fixe dans un repère lié à cet ensemble.

Masse et inertie

Centre d'inertie - Théorème de Guldin 1- Centre d'inertie d'une courbe plane



Soient (C) une courbe du plan (P) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (C).
L'aire de la surface engendrée par la rotation de la courbe (C) autour de la droite (Δ) est égal au produit de la longueur de la courbe L par le périmètre décrit par son centre d'inertie $2\pi \cdot r_G$.

$$S = 2\pi \cdot r_G \cdot L \quad (8)$$

Masse et inertie

Centre d'inertie - Théorème de Guldin 1- Centre d'inertie d'une courbe plane

On associe à la courbe (C) une masse linéïque λ constante, $\mathrm{d}m = \lambda \cdot dl$ d'où la masse totale de la courbe $m_c = \lambda \cdot L$.
La position du centre d'inertie de la courbe est calculée par la relation générale : $m_c \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} \cdot \mathrm{d}m$

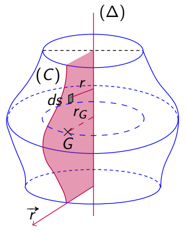
Cette relation devient : $\lambda \cdot L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} \cdot \lambda \cdot \mathrm{d}l$.

Après simplification puis en ne prenant que la projection suivant $\vec{r}$:
$L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP}\, \mathrm{d}l \quad \Rightarrow \quad L \cdot r_G = \int_C r\, \mathrm{d}l$

Calculons maintenant la surface engendrée par la rotation de la courbe :
$S = \int_S r \cdot d\theta \cdot \mathrm{d}l = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_C r \cdot \mathrm{d}l = 2\pi \int_C r \cdot \mathrm{d}l$ En substituant $\int_C r \cdot \mathrm{d}l = L \cdot r_G$ dans cette égalité on retrouve bien le résultat cherché.

Masse et inertie

Centre d'inertie - Centre d'inertie d'une surface plane



Soient (S) une surface du plan (P) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (S).
Le volume engendré par la rotation de la surface plane tournant autour de l'axe (Δ) est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre décrit par son centre d'inertie.

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S \qquad (9)$$

Masse et inertie

Centre d'inertie - Centre d'inertie d'une surface plane

On démontre cette égalité comme la précédente. On associe à (S) une masse surfacique $\mathrm{d}m = \sigma \cdot ds$ constante et $m_S = \sigma \cdot S$.
Par définition : $m_S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} \cdot \mathrm{d}m \quad \Rightarrow S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} \cdot ds$

soit en projection $S \cdot r_G = \int_S r \cdot ds$

Le volume engendré par la rotation de la surface (S) s'écrit : $V = \int_v r \cdot d\theta \cdot ds = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_S r \cdot ds = 2\pi \int_S r \cdot ds$

d'où la relation cherchée : $V = 2\pi \cdot r_G \cdot S$.

Moments et produits d'inertie

Moments d'inertie

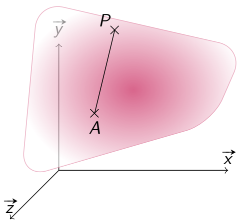
La masse suffit pour caractériser l'inertie dans le cas d'un mouvement de translation.
Pour un mouvement de rotation ou un mouvement plus complexe, il faut prendre en compte la répartition de cette masse sur le solide.
Les moments et produits d'inertie caractérisent cette répartition.

Moments et produits d'inertie
Moments d'inertie - Moment d'inertie par rapport à un point

On appelle moment d'inertie du solide S par rapport à un point A la quantité positive :

$$I_A\left(S\right) = \int_S \overrightarrow{AP}^2 \,\mathrm{d}m \left(\mathrm{kgm}^2\right)\right)$$

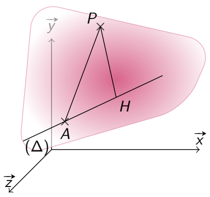
avec : S un solide, A un point, P un point du solide et $\mathrm{d}m$ la quantité de matière :



Moments et produits d'inertie
Moments d'inertie - Moment d'inertie par rapport à une droite

On appelle moment d'inertie du solide S par rapport à une droite (Δ) la quantité positive

$$I_\Delta\left(S\right) = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \,\mathrm{d}m \left(\mathrm{kgm}^2\right). \tag{10}$$



projection de P sur la droite (Δ) (d_P distance du point P à la droite(Δ)) la relation devient :

$$I_\Delta\left(S\right) = \int_S \overrightarrow{HP}^2 \,\mathrm{d}m = \int_S d_P^2 \cdot \,\mathrm{d}m.$$

En faisant intervenir le point H,

Le moment d'inertie par rapport à une droite est le même en tout point de la droite.

Moments et produits d'inertie
Moments d'inertie - Rayon de giration

Le moment d'inertie étant homogène au produit d'une masse par une distance au carré, il est toujours possible d'écrire le moment d'inertie autour d'un axe d'un solide quelconque sous la forme :

$$I = M \cdot R_g^2$$

avec M la masse du solide et R_g le rayon de giration.

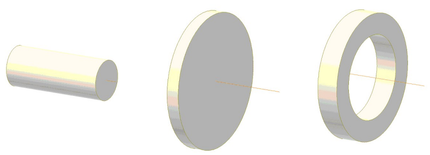


Figure : Rayon de giration

Moments et produits d'inertie
Moments d'inertie - Moments d'inertie par rapport à un point dans $\mathbb{R}$

Soit un repère $\mathbb{R}\ (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Un point P de coordonnées x, y, z dans $\mathbb{R}$.
Par définition on peut écrire le moment d'inertie du solide S par rapport au point O à l'aide des coordonnées cartésiennes :

$$I_O(S) = \int_S \overrightarrow{OP}^2 \,\mathrm{d}m = \int_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \,\mathrm{d}m$$

Moments et produits d'inertie

Moments d'inertie - Moments d'inertie par rapport à un axe dans $\mathbb{R}$

Déterminons le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe $(O,\vec{x})$: Par définition : $I_{(O,\vec{x})}(S) = \int_S \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 \mathrm{d}m = \int_S (\vec{x} \wedge (x\cdot\vec{x} + y\cdot\vec{y} + z\cdot\vec{z}))^2 \,\mathrm{d}m$

$I_{(O,\vec{x})}(S) = \int_S (y^2+z^2)\cdot \mathrm{d}m$, moment d'inertie du solide par rapport à $(O,\vec{x})$;

De même :

$I_{(O,\vec{y})} = \int_S (z^2+x^2)\cdot \mathrm{d}m$, moment d'inertie du solide par rapport à $(O,\vec{y})$;

$I_{(O,\vec{z})} = \int_S (x^2+y^2)\cdot \mathrm{d}m$, moment d'inertie du solide par rapport à $(O,\vec{z})$.

Moments et produits d'inertie

Moments d'inertie - Moment d'inertie par rapport au plan

Par extension, on définit les moments d'inertie par rapport au plan :

Moment d'inertie du solide par rapport au plan $(O,\vec{x},\vec{y})$:

$$I_{(O\vec{x}\vec{y})} = \int_S z^2\cdot \mathrm{d}m$$

moment d'inertie du solide par rapport au plan $(O,\vec{y},\vec{z})$:

$$I_{(O\vec{y}\vec{z})} = \int_S x^2\cdot \mathrm{d}m$$

moment d'inertie du solide par rapport au plan $(O,\vec{z},\vec{z})$:

$$I_{(O\vec{z}\vec{x})} = \int_S y^2\cdot \mathrm{d}m$$

Moments et produits d'inertie

Moments d'inertie - Relations entres les moments d'inertie

Quelques relations entre les moments d'inertie d'un solide :

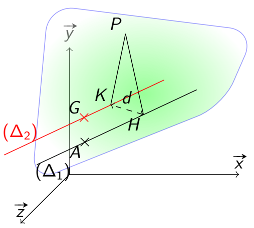
- $I_O = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})} + I_{(O\vec{z}\vec{x})}$
- $I_O = \frac{1}{2}\left(I_{(O,\vec{x})} + I_{(O,\vec{y})} + I_{(O,\vec{z})}\right)$
- $I_{(O,\vec{x})} = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{z}\vec{x})}$
- $I_{(O,\vec{y})} = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})}$
- $I_{(O,\vec{z})} = I_{(O\vec{z}\vec{x})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})}$

Moments et produits d'inertie

Théorème de Huygens

Soit un solide S de centre d'inertie G et de masse m, avec :

- (Δ_1), une droite passant par A de vecteur unitaire $\vec{\delta}$;
- (Δ_2), une droite parallèle passant par G ;
- d, la distance entre les deux droites.
- H la projection du point P du solide S sur (Δ_1)
- K la projection sur (Δ_2).



On sait que :

- $I_{(A,\vec{\delta})} = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \mathrm{d}m$,
- $I_{(G,\vec{\delta})} = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{GP}\right)^2 \mathrm{d}m,$

Moments et produits d'inertie
Théorème de Huygens

Cherchons une relation entre $I_{(A,\vec{\delta})}$ et $I_{(G,\vec{\delta})}$
nous savons que :

$$I_{(A,\vec{\delta})} = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \mathrm{d}m = \int_S \overrightarrow{HP}^2 \mathrm{d}m$$

En faisant intervenir le point K : $I_{(A,\vec{\delta})} = \int_S \left(\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KP}\right)^2 \mathrm{d}m$ soit
$I_{(A,\vec{\delta})} = \int_S \overrightarrow{HK}^2 \mathrm{d}m + \int_S 2\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KP} \mathrm{d}m + \int_S \overrightarrow{KP}^2 \mathrm{d}m$
Le premier terme s'écrit : $\int_S \overrightarrow{HK}^2 \mathrm{d}m = m \cdot d^2$
On reconnaît le troisième : $\int_S \overrightarrow{KP}^2 \mathrm{d}m = I_{(G,\vec{\delta})}$

Moments et produits d'inertie
Théorème de Huygens

Il ne reste plus qu'à déterminer $\int_S 2\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KP} \mathrm{d}m$ en faisant intervenir le centre d'inertie G :

$$\begin{aligned}
\int_S 2\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KP} \mathrm{d}m &= 2\overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{KP} \mathrm{d}m \\
&= 2 \cdot \overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GP} \mathrm{d}m \\
&= 2 \cdot \overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{KG}\, \mathrm{d}m + 2 \cdot \overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{GP} \mathrm{d}m
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{HK} \perp \overrightarrow{KG} \Rightarrow 2 \cdot \overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{KG}\, \mathrm{d}m = 0$ et $\int_S \overrightarrow{GP} \mathrm{d}m = 0$
Finalement

$$I_{(A,\vec{\delta})} = I_{(G,\vec{\delta})} + m \cdot d^2.$$

Moments et produits d'inertie
Théorème de Huygens

Énoncé du Théorème de Huygens

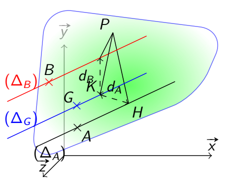
Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $\left(A, \vec{\delta}\right)$ est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe $\left(G, \vec{\delta}\right)$, parallèle et passant par le centre d'inertie du solide, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance séparant les deux axes.

$$I_{(A,\vec{\delta})} = I_{(G,\vec{\delta})} + m \cdot d^2 \tag{11}$$

Corollaire
De tous les axes parallèles à une direction donnée, celui par rapport auquel le moment d'inertie est minimum est l'axe passant par G.

Moments et produits d'inertie
Théorème de Huygens - Relation entre les moments d'inertie par rapport à deux droites parallèles

On se propose de déterminer une relation entre les moments d'inertie par rapport à deux droites parallèles.



On sait que :

- $I_{(A,\vec{\delta})}(S) = I_{(G,\vec{\delta})}(S) + m \cdot d_A^2$
- $I_{(B,\vec{\delta})}(S) =$

$I_{(G,\vec{\delta})}(S) + m \cdot d_B^2$
D'où la relation entre les moments d'inertie

$$I_{(A,\vec{\delta})}(S) - I_{(B,\vec{\delta})}(S) = m \cdot d_A^2 - m \cdot d_B^2 \tag{12}$$

avec d_A et d_B respectivement distance entre les droites Δ_A, Δ_B et Δ_G.

Moments et produits d'inertie

Produits d'inertie

Les produits d'inertie caractérisent l'absence de symétrie dans la répartition des masses.
La détermination des produits d'inertie sera déduite du calcul de l'opérateur d'inertie dans le chapitre suivant.