

**Exercice 1- Hydro-nettoyeur***d'après Centrale TSI99**Corrigé page 7***A. Mise en situation – paramétrage**

Le schéma technologique (figure 0.1) représente la pompe hydraulique d'un hydro-nettoyeur (figure 0.2). Cet hydro-nettoyeur assure lui-même la production d'eau chaude et la mise sous pression de l'eau grâce à la pompe hydraulique. La pompe comporte 5 pistons répartis régulièrement. L'arbre moteur entraîne dans sa rotation un plateau dont l'axe est incliné d'un angle  $\alpha = 10^\circ$ , le mouvement oscillant du plateau entraîne les pistons en translation.

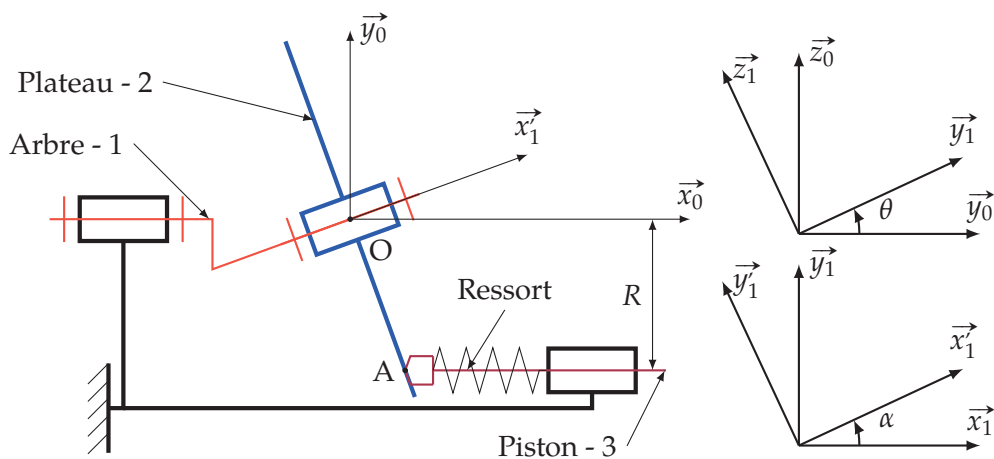


FIGURE 0.1 – Schéma technologique

—  $R = 18 \text{ mm}$ ,—  $\alpha = 10^\circ$ — masse du piston :  $m = 100 \text{ g}$ 

— vitesse de rotation du moteur

 $N = 3000 \text{ tr/min}$ **B. Modélisation cinématique**

**Q1.** On modélise dans un premier temps la liaison entre le piston et le plateau par une liaison ponctuelle.

**Q1a.** Tracer le graphe de structure du mécanisme pour un seul piston.

**Q1b.** Après avoir donné le degré de mobilité (en détaillant les divers mouvements correspondants), calculer le degré d'hyperstatisme du mécanisme.

On modélise maintenant la liaison entre le piston et le plateau par une liaison cylindre plan plus conforme avec la réalisation réelle.

**Q2.** Le degré de mobilité est-il modifié? Calculer le degré d'hyperstatisme. Pourquoi a-t-on réalisé un contact linéaire entre le piston et le plateau?

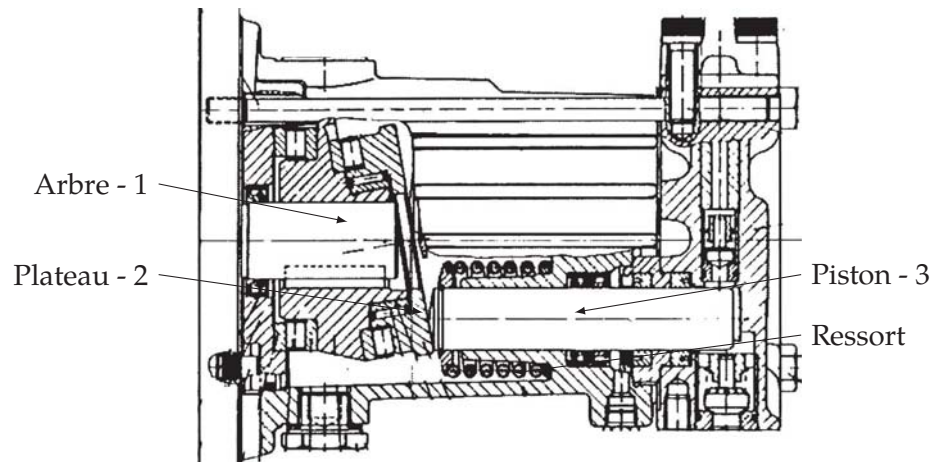


FIGURE 0.2 – Hydronettoyeur

### C. Détermination du ressort de rappel

On se propose dans cette partie de déterminer la raideur  $k$  minimale pour que le contact soit toujours maintenu entre le piston et le plateau.

- Pendant la phase de refoulement la pression appliquée sur la face avant du piston est de 100 bar l'effort développé par le ressort est négligeable devant les efforts dus à la pression.
- Pendant la phase d'aspiration, on ne prendra en compte que l'effort développé par le ressort.
- Le ressort de raideur  $k$ , est écrasé de la valeur  $e = 20$  mm lorsque le piston est en position point mort droit (fin de refoulement, début d'aspiration). L'écrasement total  $e$  est supérieur à la course du piston.
- Le poids des différentes pièces est négligeable devant les autres actions mécaniques.
- Les liaisons sont supposées parfaites.

On supposera dans cette partie que le contact en A est ponctuel.

**Q3.** Étude cinématique préalable

**Q3a.** Justifier que pour le point A, on peut écrire,

$$\vec{OA} = x_A \cdot \vec{x}_0 - R \cdot \vec{y}_0 \text{ et } \vec{OA} \cdot \vec{x}_1 = 0;$$

**Q3b.** En déduire  $x_A = R \cdot \tan \alpha \cdot \cos \theta$ ;

**Q3c.** Déterminer  $\vec{V}_{G \in 3/0}$ , la vitesse du centre d'inertie G du piston, puis  $\vec{\Gamma}_{G \in 3/0}$ .

**Q4.** Inventaire des efforts extérieurs au piston

**Q4a.** Écrire le torseur des actions transmissibles par la liaison entre le plateau et le piston en A, d'abord dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  puis dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Écrire le torseur des actions transmissibles par la liaison entre le piston et le bâti.

**Q4b.** Donner l'expression de l'action exercée par le ressort sur le piston en fonction de  $k, e, \theta, \alpha$  et les autres paramètres géométriques.

**Q5.** Écrire l'équation de la résultante suivant  $\vec{x}_0$  issue de l'application du principe fondamental de la dynamique appliqué au piston.

**Q6.** À quelle condition n'y a-t-il pas rupture de contact en A? En déduire la valeur minimale de la raideur  $k$  du ressort.

## Exercice 2- Bras de robot

Corrigé page 9

Le schéma de la figure 0.3 modélise un bras de robot.

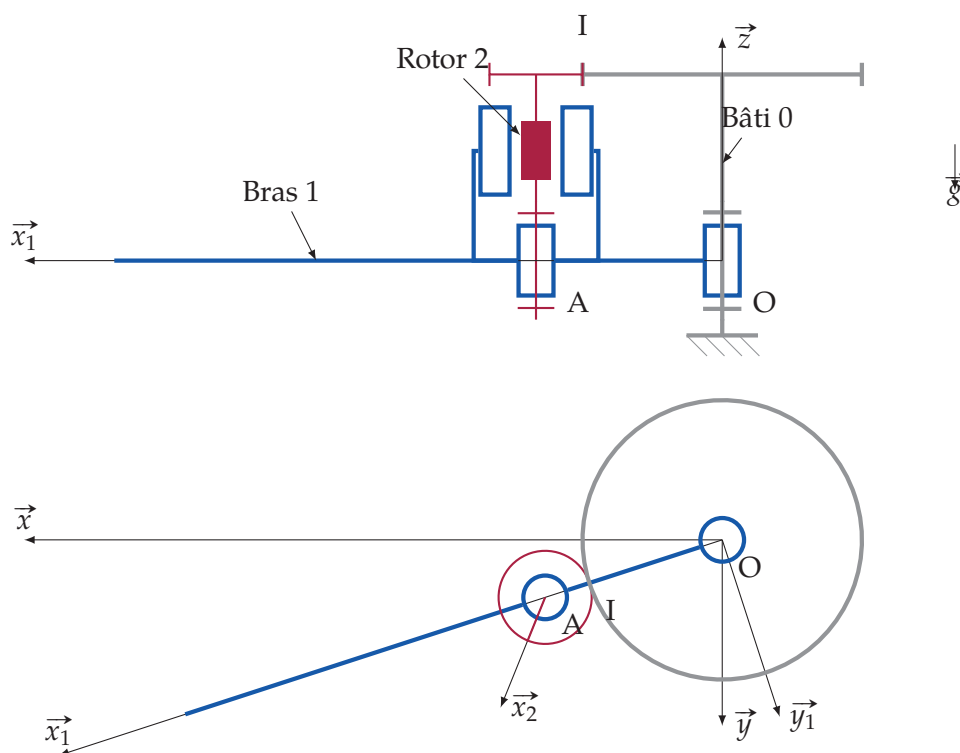


FIGURE 0.3 – Bras de robot

Le moteur d'axe  $(A, \vec{z})$ , dont le stator est solidaire du bras 1 et le rotor du pignon moteur 2, entraîne le bras en rotation autour de l'axe  $(O, \vec{z})$  à travers un train d'engrenage :

- pignon moteur :  $Z_2$  dents, rayon  $R_2$ ,
- roue :  $Z_0$  dents, rayon  $R_0$ .

Le couple moteur de 2 sur 1 est noté  $\vec{C}_m = C_m \vec{z}$ .

On note :

- $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1), \vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10} \cdot \vec{z}$  avec  $\omega_{10} = \dot{\alpha}$ ;
- $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2), \vec{\Omega}_{2/1} = \omega_m \cdot \vec{z}$  avec  $\omega_m = \dot{\theta}$ ;
- $\vec{OA} = L_1 \cdot \vec{x}_1, \vec{AI} = H_2 \cdot \vec{z} - R_2 \cdot \vec{x}_1$ .

L'engrenage est réalisé à partir de pignon à denture droite, l'angle de pression est de  $\beta = 20^\circ$ .

On note :  $\{ \mathcal{A}_{0 \rightarrow 2} \} = \begin{Bmatrix} F_{02} \cdot \sin \beta & 0 \\ F_{02} \cdot \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}^I$  le torseur de l'action transmissible par la roue 0 sur le pignon

1 avec I le point de contact  $(\vec{OI} \cdot \vec{z} = h)$ .

Soit A, le centre d'inertie de l'ensemble composé du rotor et du pignon moteur. Cet ensemble est équilibré dynamiquement par rapport à l'axe  $(A, \vec{z})$ , son moment d'inertie autour de  $(A, \vec{z})$  est noté  $I_2$ , et sa masse  $M_2$ .

Le centre d'inertie  $G_1$  de l'ensemble  $S_1$ , composé du bras et du stator, de masse  $M_1$  est tel que  $\vec{OG}_1 = x_g \cdot \vec{x}_1$ .

La matrice d'inertie de cet ensemble en O s'écrit :  $\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S_1)}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}} .$

Les liaisons sont supposées parfaites.

L'objectif de l'étude est de déterminer le couple moteur pour la loi d'évolution de la figure 0.4 du bras (entre les instants  $T_0$  et  $T_3$  le bras fait une rotation de  $180^\circ$ ) :

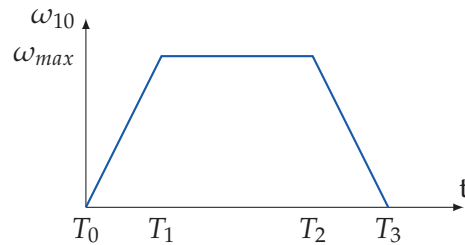


FIGURE 0.4 – Loi d'évolution du bras

**Q1.** Déterminer  $\omega_{10}$  et  $\omega_{20}$  en fonction de  $\omega_m$ .

**Q2.** Tracer le graphe des liaisons et placer sur celui-ci les efforts. Préciser les différents torseurs des actions transmissibles. Justifier la forme du torseur des actions transmissibles par la liaison engrenage. Les différents torseurs seront écrits dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

**Q3.** Appliquer le théorème du moment dynamique au bras de robot en O en projection suivant  $\vec{z}$ .

**Q4.** Isoler maintenant le rotor, et écrire les équations du P.F.D permettant de déterminer la composante suivant  $\vec{y}_1$  du torseur des actions transmissibles de la liaison entre le rotor 2 et le bras 1.

**Q5.** En déduire l'équation différentielle du mouvement permettant d'obtenir le couple moteur en fonction des paramètres du mouvement et des paramètres cinétiques, puis tracer l'évolution de celui-ci sur le graphe des vitesses.

### Exercice 3- Machine à vibrer le béton

d'après Centrale TA95

Corrigé page 10

Les deux figures suivantes (fig 0.5, 0.6) représentent schématiquement une machine à vibrer des éléments préfabriqués en béton. Un châssis sur roues est solidaire du moule et du stator d'un moteur électrique destiné à générer les vibrations.

#### A. Données

**L'ensemble 1**, de masse  $M_1$ , en translation comprend la plate-forme, le moule, le béton et le stator du moteur électrique. Sa position par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  galiléen est définie par  $x(t)$ . La liaison équivalente par rapport au sol est une glissière de direction  $\vec{x}_0$ .

**L'ensemble 2**, de masse  $M_2$ , tournant par rapport à 1 autour de l'axe  $(A, \vec{z}_0)$ , comporte le rotor du moteur, son arbre et deux disques excentrés. On note :

- $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  la vitesse de rotation constante de l'ensemble 2 ;
- $G_2$  le centre d'inertie du solide 2 avec  $\overrightarrow{AG_2} = c \cdot \vec{x}_2$  ;
- La matrice d'inertie de l'ensemble 2 s'écrit en A dans la base  $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(2)}} = \begin{pmatrix} I_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az} \end{pmatrix}_{\substack{A \\ \mathcal{B}_2}}$$

**Les roues** sont en liaison pivot, sans frottement, par rapport à 1. La masse et l'inertie des roues sont négligeables.

**Le moteur** applique sur le rotor un couple noté  $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{z}_0$ .

Le plan  $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  est plan de symétrie du système.

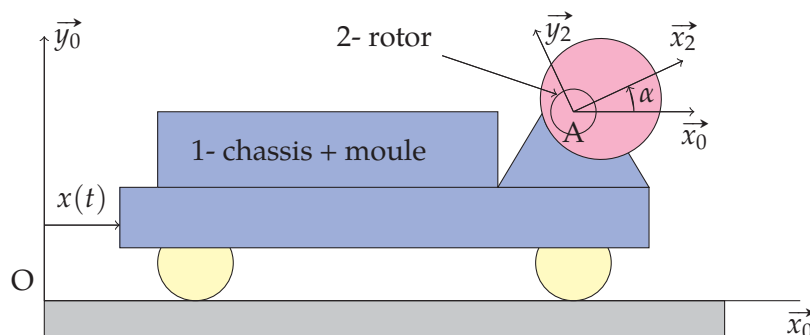


FIGURE 0.5 – Machine à vibrer le béton - modélisation

#### B. Questions

**Q1.** Déterminer la vitesse et l'accélération du point  $G_2$ , centre de gravité de l'ensemble 2, par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ .

**Q2.** On modélise l'ensemble 2 par :

- un cylindre de diamètre  $d_3$ , de hauteur  $h_3$  et de masse volumique  $\rho_3$  pour le rotor du moteur ;
- deux disques centrés respectivement en  $B_1$  et  $B_2$  de diamètre  $d_1$ , de hauteur  $h_1$  de masse volumique  $\rho_1$  ;
- deux arbres cylindriques centrés respectivement en  $A_1$  et  $A_2$  de diamètre  $d_2$ , de hauteur  $h_2$  et de masse volumique  $\rho_1$  reliant le rotor aux disques ;
- les trois cylindres sont d'axe  $\vec{z}_0$ .

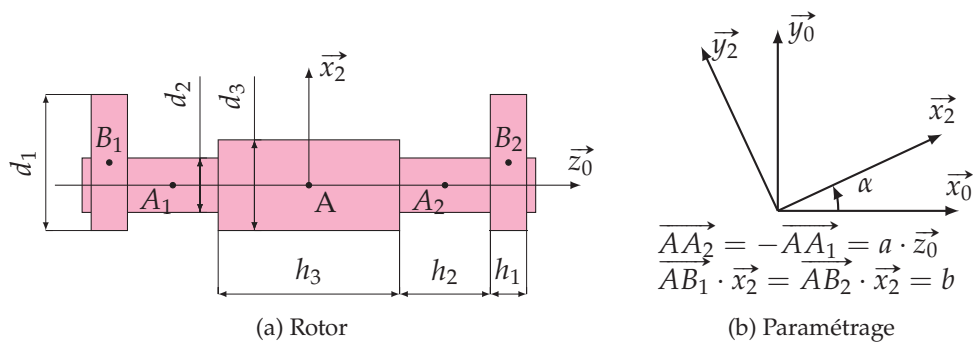


FIGURE 0.6 – Machine à vibrer le béton

- Q2a.** Justifiez la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble 2.
- Q2b.** Déterminer le moment d'inertie de l'ensemble 2 par rapport à l'axe  $(A, \vec{z}_0)$ , en fonction des  $h_i$ ,  $d_i$  et  $\rho_i$ .
- Q3.** Déterminer  $x(t) = f(M_1, M_2, c, \omega, t)$ , l'équation du mouvement de l'ensemble 1, par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ . On considérera que le moteur tourne à vitesse constante et qu'à l'instant  $t=0$ ,  $x(0) = 0$ . Pour cela :
- Q3a.** Tracer le graphe de structure du mécanisme et établir l'inventaire des efforts sur 1 et 2.
- Q3b.** Appliquer le PFD sur l'ensemble  $\{1+2\}$ .
- Q3c.** en déduire l'équation de mouvement. Limiter l'étude aux équations nécessaires pour résoudre le problème posé.
- Q4.** Déterminer l'expression du moment du couple moteur  $C_m$  du stator sur le rotor, en fonction de  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $g$ ,  $\omega$ ,  $c$  et  $t$ .
- On modélise la liaison en  $A_1$  entre le rotor et le châssis par une liaison sphérique et celle en  $A_2$  par une liaison sphère cylindre.
- Q5.** Déterminer les composantes du torseur des actions transmissibles pour les deux liaisons entre l'ensemble 1 et l'ensemble 2 en  $A_1$  et  $A_2$ .