

Feuille n°1 : Mécanismes

Exercice 1 - Scooter Piaggio

d'après Banque PT SIB

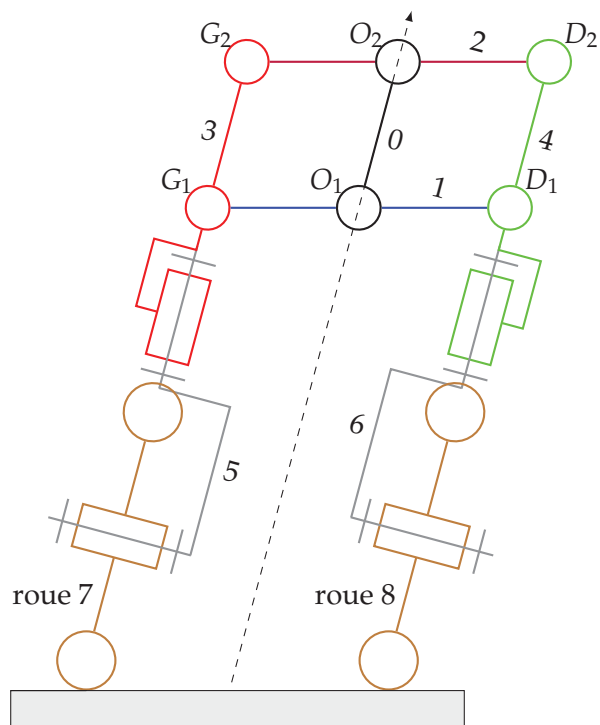
Corrigé page 17

Le train avant est défini comme l'ensemble comprenant : la roue (ou les roues) avant, la suspension, le dispositif de freinage, tous les éléments participant aux liaisons entre ces éléments. Sur un scooter à une seule roue avant, le train avant est lié au châssis du véhicule par une liaison pivot permettant d'orienter la roue avant par rapport au véhicule par l'intermédiaire du guidon. Cette liaison permet de diriger le véhicule. Pour un scooter à deux roues avant, le train avant doit non seulement permettre le pivotement des roues commandé par le guidon mais il doit également permettre l'inclinaison de l'ensemble du scooter tout en conservant le contact des roues au sol.



(a) scooter

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1O_2} &= \overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{D_1D_2} = l_1 \cdot \vec{y}_0 \\ \overrightarrow{G_1O_1} &= \overrightarrow{G_2O_2} = l_2 \cdot \vec{x}_1 \\ \overrightarrow{O_1D_1} &= \overrightarrow{O_1D_2} = l_2 \cdot \vec{x}_1 \\ \alpha &= (\vec{y}_1, \vec{y}_0)\end{aligned}$$



(b) Parallélogramme de la direction

A. Parallélogramme d'inclinaison

La solution retenue pour permettre une inclinaison du véhicule malgré la présence de deux roues sur le train avant repose sur la cinématique imposée par un dispositif en parallélogramme (figure 1b). Le mécanisme est constitué d'un châssis (0), de deux bras (1) et (2) et de deux colonnes (3) et (4). Les liaisons entre ces différents solides sont des liaisons pivots.

- Q1.** Tracer le graphe des liaisons limité à l'ensemble $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, préciser le nombre cyclomatique.
- Q2.** Écrire la fermeture cinématique limitée à la boucle $\{0, 1, 2, 3\}$. En déduire le degré de mobilité de l'ensemble Σ .
- Q3.** Déterminer le nombre d'inconnues de liaisons de l'ensemble Σ , en déduire le degré d'hyperstaticité. Justifier ce degré.

B. Blocage de la suspension

On s'intéresse dans cette partie au dispositif de verrouillage de l'inclinaison. Ce dispositif, présent en option, répond à un souci d'amélioration du confort d'utilisation du scooter en milieu urbain (vitesses inférieures à 15 km h^{-1}). Le train avant est sensiblement alourdi, par sa structure particulière, par rapport à un véhicule classique. D'autre part, les protections et les éléments de confort propres au marché du scooter amènent le poids des scooters, même de faible cylindrée, à atteindre celui d'une moto de grosse cylindrée. Il permet en outre d'éviter de poser le pied aux arrêts (nombreux en circulation urbaine), et de garer le scooter dans n'importe quelle configuration (pente, à cheval sur un trottoir ou une bordure, etc ...) sans avoir à utiliser la béquille centrale (opération difficile sur un engin d'environ 200 kg).

Le verrouillage de l'inclinaison du train avant nécessite la suppression de ces mobilités :

- la mobilité du parallélogramme d'inclinaison,
- la mobilité de la suspension avant (particulièrement utile en mode parking).

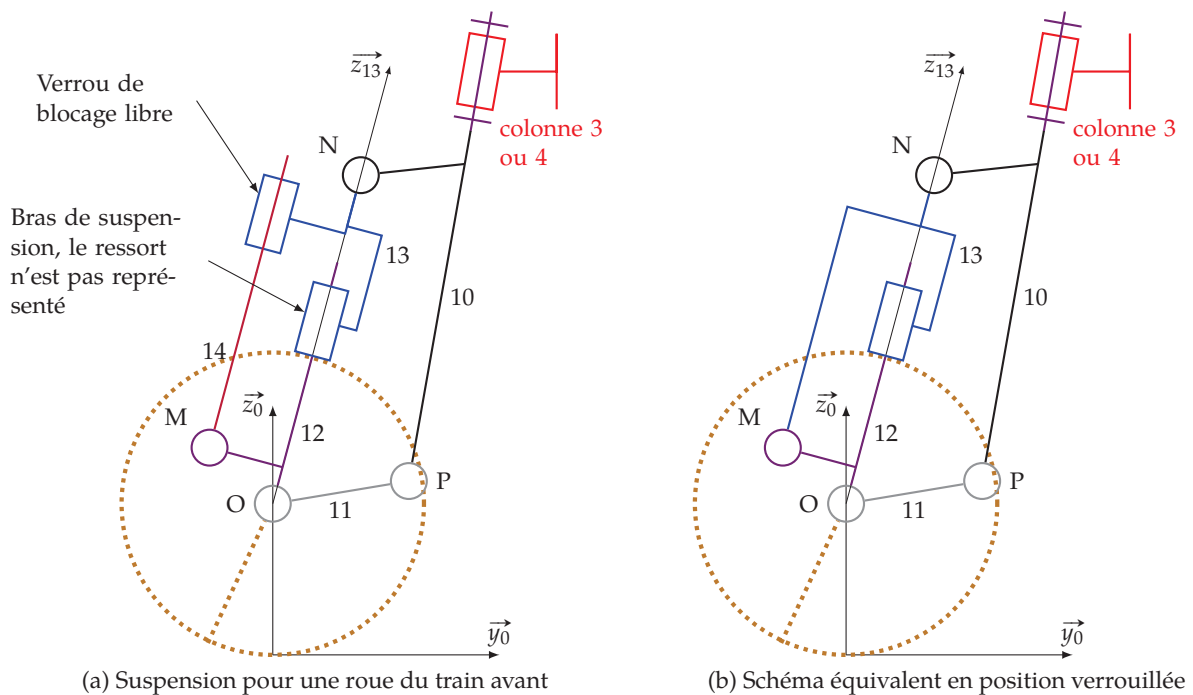


FIGURE 1 – Bras de suspension : position non verrouillée et verrouillée

Les deux figures 1a et 1b présentent le bras de suspension avant dans sa position libre et le modèle équivalent lorsqu'elle est en position verrouillée

- Q4.** Tracer le graphe des liaisons dans les deux cas limité aux solides $\{10, 11, 12, 13, 14\}$, préciser le nombre cyclomatique,

On étudie dans un premier temps, la boucle constituée des solides $\{12, 13, 14\}$ dans le premier cas puis le second

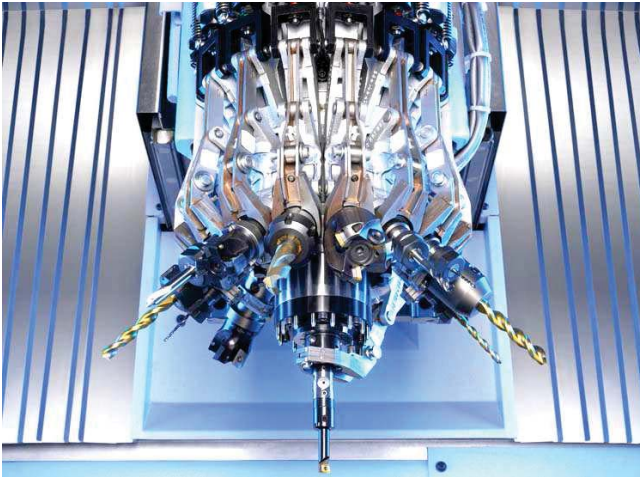
- Q5.** Écrire la fermeture cinématique, en déduire le degré de mobilité de chacune des boucles puis le degré d'hyperstaticité.
- Q6.** Préciser la liaison équivalente.
- Q7.** Tracer le schéma cinématique minimal.

Devoir 2 - Changeur d'outil

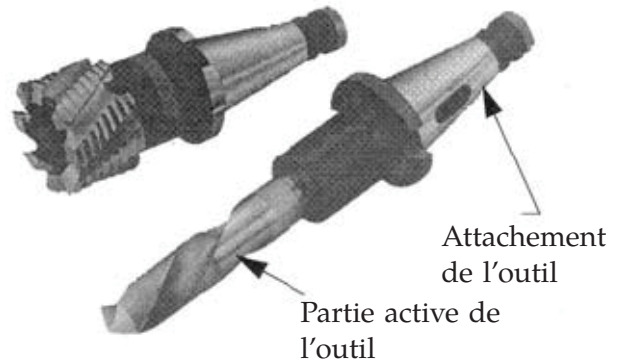
adapté du concours mines X-ENS 98

Corrigé page 18

Un centre d'usinage permet la production industrielle de pièces mécaniques. Les surfaces réalisées sur les pièces sont obtenues avec à des outils coupants. Deux exemples d'outils coupants sont présentés ci-contre : un foret et une fraise. Le centre d'usinage permet la génération successive de plusieurs surfaces sur les pièces parce qu'il permet d'une part une succession de mouvements de l'outil par rapport à la pièce, et d'autre part une possibilité de changement d'outil actif grâce à un changeur d'outils.

A. Présentation Générale

(a) Changeur d'outil autour de la broche



(b) Outils

On se propose d'étudier d'un point de vue cinématique le changeur d'outil qui équipe le centre d'usinage FZ 12 S du constructeur allemand Chiron. Pour permettre l'usinage d'une pièce nécessitant l'utilisation successive de plusieurs outils, le centre FZ 12 S est équipé d'un système de changement d'outils particulièrement rapide. Il se situe autour de la broche, et il est constitué d'un mécanisme articulé pour chaque outil. Ces systèmes articulés appelés "modules changeurs" sont fixés sur une coulisse qui se déplace verticalement le long d'un fourreau lors d'une séquence de changement d'outils (figure 2a).

La figure 4 présente le changeur d'outil en position.

Le schéma cinématique figure 2 propose une modélisation du système de changement d'outils du centre d'usinage étudié. Dans le plan du schéma seulement deux sous ensembles de changement d'outils sont représentés, et le symbole « □ » doit être considéré comme une articulation (sa nature exacte sera étudiée dans la suite du sujet).

La séquence de changement d'outils est composée de plusieurs étapes et est représentée sur la figure 3.

A partir de la position initiale ❶, lorsqu'un changement d'outils est demandé, l'ensemble formé par la coulisse et les supports de chaque outil (ensemble bleu) descend le long du fourreau, afin d'extraire de la broche le cône de l'outil appelé "attachement d'outil". Ce mouvement est animé par le vérin de coulisse. Lorsque la position ❷ est atteinte, l'outil qui était dans la broche est remonté en position de stockage par un vérin de module et un ensemble de biellettes pour atteindre la position ❸. L'outil qui doit être mis en place est ensuite descendu sous la broche par un mécanisme identique. Dans la situation ❹, le vérin de coulisse remonte l'ensemble du mécanisme en position haute, plaçant ainsi l'attachement du nouvel outil dans la broche. Le système de changement d'outils se trouve ainsi dans la position ❺.

Pour le centre FZ 12 S acceptant des outils avec un attachement de type SK 40, la séquence de changement d'outils s'effectue en 0,9 secondes pour des outils de masse inférieure ou égale à 2,5 kg. Des outils de masse allant jusqu'à 5 kg sont acceptés par le centre FZ 12 S, mais sans exiger les mêmes performances de durée de changement d'outils.

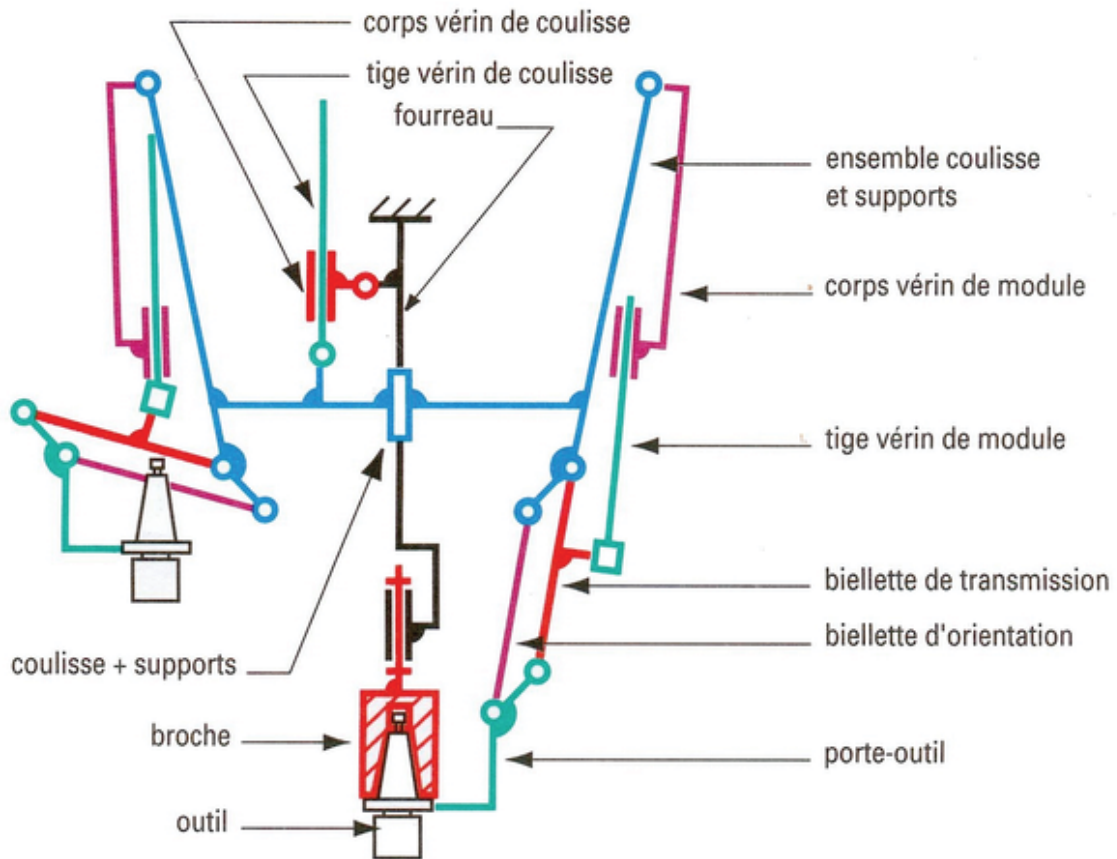


FIGURE 2 – mécanisme de changeur d'outil

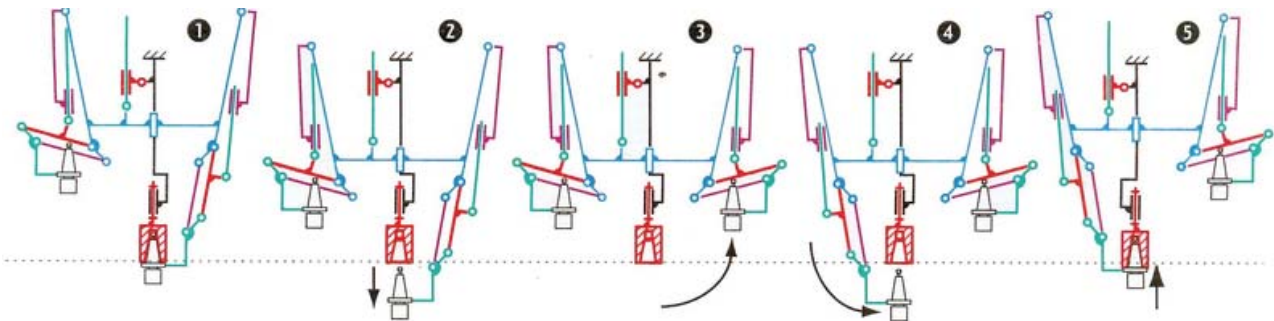


FIGURE 3 – Séquence de changement d'outil

B. Étude d'un « module changeur »

Le document de la figure 4b page 5 présente deux modules changeurs disposés symétriquement par rapport à l'axe de la broche de la machine :

- celui de gauche est « au repos » (outil rangé)
- celui de droite est « en travail » (outil utilisé)

La coulisse (repère 0), de forme générale tubulaire, est en liaison glissière sur le fourreau (partie fixe cylindrique) de la broche de la machine. Elle supporte les douze modules changeurs assemblés par liaison encastrement. Un module changeur comporte :

- un support (repère 1) en liaison encastrement avec la coulisse (repère 0),
- un vérin pneumatique double effet constitué d'un corps de vérin (repère 2) et d'une tige de vérin (repère 3),

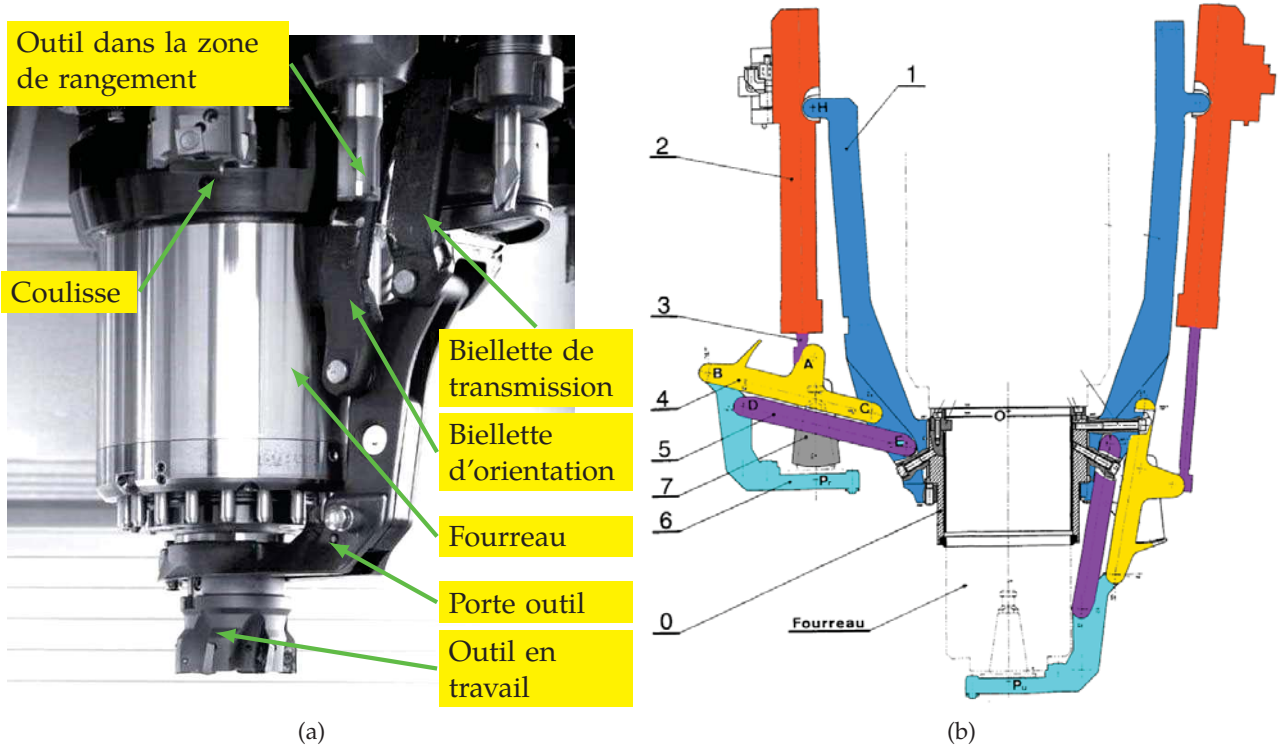


FIGURE 4 – Changeur d'outil

- une bielle de transmission du mouvement (repère 4),
- une bielle d'orientation (repère 5),
- un porte-outil (repère 6),
- un godet protecteur (repère 7)

On se propose d'analyser ce système mécanique et de vérifier certaines de ses performances.

Le modèle retenu pour cette étude et le paramétrage sont donnés sur le document pages 6 et ?? . Le système est supposé plan $(C, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Remarque : Le système est représenté dans une position intermédiaire, entre la position repos et la position travail (θ_{14} quelconque).

C. Étude géométrique et cinématique

Q1. Établir le graphe de structure du module changeur et déterminer le nombre et la composition des cycles indépendants.

Pour les questions suivantes, on s'intéresse à la chaîne de solides appelée « chaîne de mise en position », constituée du support (1), de la bielle de transmission (4), de la bielle d'orientation (5) et du porte-outil (6). Ces pièces sont deux à deux en liaison pivot d'axe nominale parallèle à \vec{x}_1 , ce qui constitue un système hyperstatique. Ce choix est justifié en particulier par la robustesse que doit posséder cette chaîne de solides.

Q2. Évaluer, par une analyse cinématique, le degré de mobilité de cette chaîne de mise en position. Calculer le degré d'hyperstaticité.

Q3. Préciser le mouvement autorisé par la liaison L_{14} entre la bielle de transmission (4) et le support (1), et écrire au point C puis au point B, l'expression littérale du torseur cinématique $\{V_{4/1}\}$ caractérisant ce mouvement, en fonction de la dérivée temporelle de θ_{14} , et des grandeurs caractéristiques du mécanisme.

Q4. Préciser le mouvement autorisé par la liaison L_{15} entre la bielle d'orientation (5) et le support (1), et écrire au point E puis au point D, l'expression littérale du torseur cinématique $\{V_{5/1}\}$ caractérisant ce mouvement, en fonction de la dérivée temporelle de θ_{15} et des grandeurs caractéristiques du mécanisme.

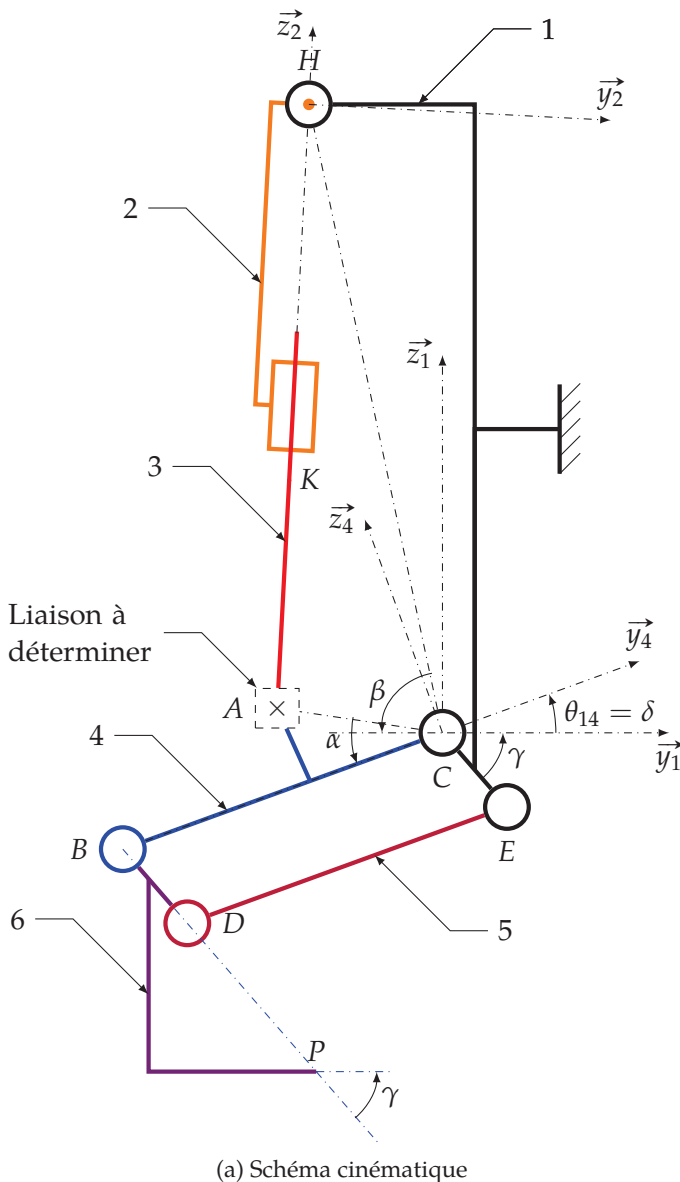


FIGURE 5 – Modèle cinématique du module Changeur

Données

Support (1) : $EC = e = 40 \cdot \sqrt{2} \text{ mm}$,
 $CH = h = 364 \text{ mm}$,
 $(\vec{CE}, \vec{y}_1) = \gamma = 45^\circ$,
 $(\vec{CH}, \vec{y}_1) = \beta = -79,4^\circ$;

Biellette de transmission (4) : $\vec{BC} = b \cdot \vec{y}_4$
 avec $b = 196,5 \text{ mm}$;

Biellette d'orientation (5) : $\vec{DE} = b \cdot \vec{y}_5$;

Porte-outil (6) : $BD = e = 40 \cdot \sqrt{2} \text{ mm}$ et
 $DP = d = 85 \cdot \sqrt{2} \text{ mm}$,
 les points B, D et P sont alignés.

Repères

$R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: lié au support (1)

$R_2 = (H, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: lié au corps de
 vérin (2)

$R_4 = (C, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$: lié à la biellette de
 transmission (4)

$R_5 = (E, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ lié à la biellette
 d'orientation (5) (non représenté ci-contre)

Liaisons

L_{12} : Pivot glissant (H, \vec{x}_1)

L_{23} : Pivot glissant (K, \vec{z}_2) avec
 $\vec{HA} = -\lambda \cdot \vec{z}_2$

L_{34} : « Articulation » de centre A ... à définir
 ultérieurement

L_{14} : Pivot (C, \vec{x}_1) avec $\theta_{14} = (\vec{y}_1, \vec{y}_4) = \delta$

L_{15} : Pivot (E, \vec{x}_1) avec $\theta_{15} = (\vec{y}_1, \vec{y}_5)$

L_{46} : Pivot (B, \vec{x}_1)

L_{56} : Pivot (D, \vec{x}_1)

Q5. La figure constituée des points E, C, B et D est un parallélogramme. Sachant que dans un parallélogramme les cotés opposés restent parallèles ($\theta_{14} = \theta_{15} = \delta$), en déduire la nature du mouvement du porte-outil (6) par rapport au support (1). Comment est le champ des vecteurs vitesses de ce mouvement ?

Q6. Écrire au point B puis au point P, l'expression littérale du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{6/1}\}$ caractérisant le mouvement du porte-outil (6) par rapport au support (1) en fonction de la dérivée temporelle de δ et des grandeurs caractéristiques du mécanisme.

Q7. Écrire au point D puis au point E l'expression littérale du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{6/5}\}$ caractérisant le mouvement du porte-outil (6) par rapport à la biellette d'orientation (5).

Q8. Écrire au point B puis au point E l'expression littérale du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{6/4}\}$ caractérisant le mouvement du porte-outil (6) par rapport à la biellette de transmission (4).

Q9. Écrire les six équations liées à la fermeture cinématique de la chaîne de solide constituée des solides (1), (4), (5) et (6).

Q10. Déterminer le rang du système obtenu à la question précédente. En déduire le degré de mobilité et le degré d'hyperstatisme de la chaîne de solide étudiée.

La figure 6 présente quelques propositions de modification des liaisons de la chaîne de mise en position

Q11. Pour chacune des propositions, vérifier si le modèle est isostatique, préciser le nombre de mobilités et s'il peut être adopté pour modifier le mécanisme actuel.

Pour les deux questions suivantes, on s'intéresse à la chaîne de solides appelée « chaîne de mise en mouvement », constituée du support (1), du corps de vérin (2), de la tige de vérin (3) et de la bielle de transmission (4).

Afin de permettre le bon fonctionnement du vérin, il est souhaitable que cette chaîne de solides soit isostatique. Les liaisons L_{12} , L_{23} et L_{14} sont définies page ??.

La liaison L_{34} entre la tige de vérin (3) et la bielle de transmission (4) doit autoriser au moins un degré de liberté en rotation autour de l'axe (A, \vec{x}_1) .

Q12. Montrer, par une analyse cinématique que, si la liaison L_{34} est une liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) , le degré d'hyperstaticité de la chaîne de mise en mouvement n'est pas nul.

Q13. Dans le cas où la liaison L_{34} est une liaison rotule de centre A, calculer le degré de mobilité de la chaîne de mise en mouvement, et montrer que ce système est isostatique. Identifier la (ou les) mobilité(s) de cette chaîne de mise en mouvement.

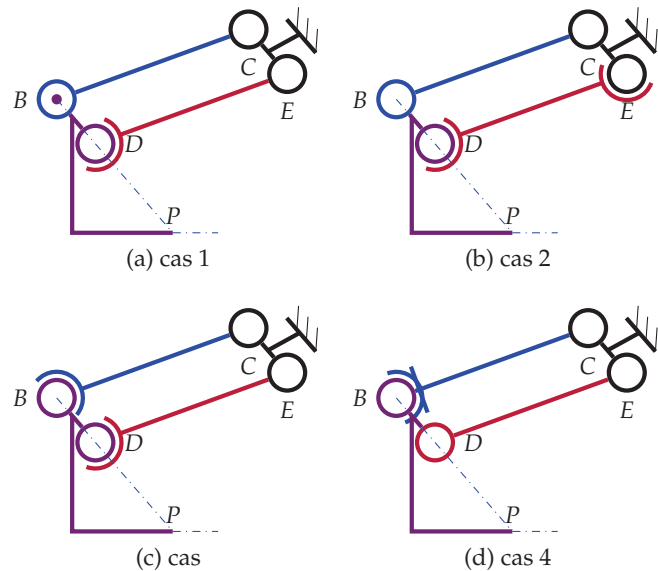


FIGURE 6 – Propositions de modification

Exercice 3 - Tête à polir le marbre

extrait TSI Centrale Supélec 2001

Corrigé page 20

Description et données

Les patins abrasifs sont :

- entraînés en rotation autour d'un axe vertical ;
- animés d'un mouvement d'oscillation autour d'un axe horizontal.

Les patins utilisés sont également des patins standards, parallélépipédiques, dont la face inférieure devient progressivement cylindrique, sous l'effet de l'usure.

Les grains d'abrasif usés ne restent pas sous les patins et sont facilement éliminés par aspersion d'eau sur la pierre à polir.

- $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ est une base liée à la pièce i ;
- $\omega_{ij} = \frac{d\theta_{ij}}{dt}$ représente la mesure algébrique de la vitesse de rotation du solide i par rapport au solide j , θ_{ij} repérant l'orientation du solide i par rapport au solide j ;
- Vitesse d'entrée : $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_e \cdot \vec{z}$, $\omega_e = 500$ tr/min.

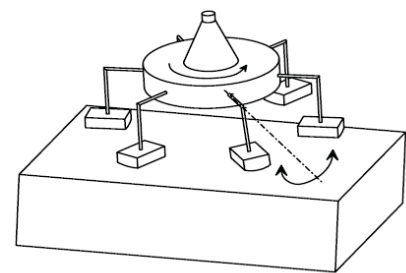


FIGURE 7 – Tête à polir

A. Étude du mécanisme de transformation de mouvement

Le mécanisme est schématisé sur la figure page suivante.

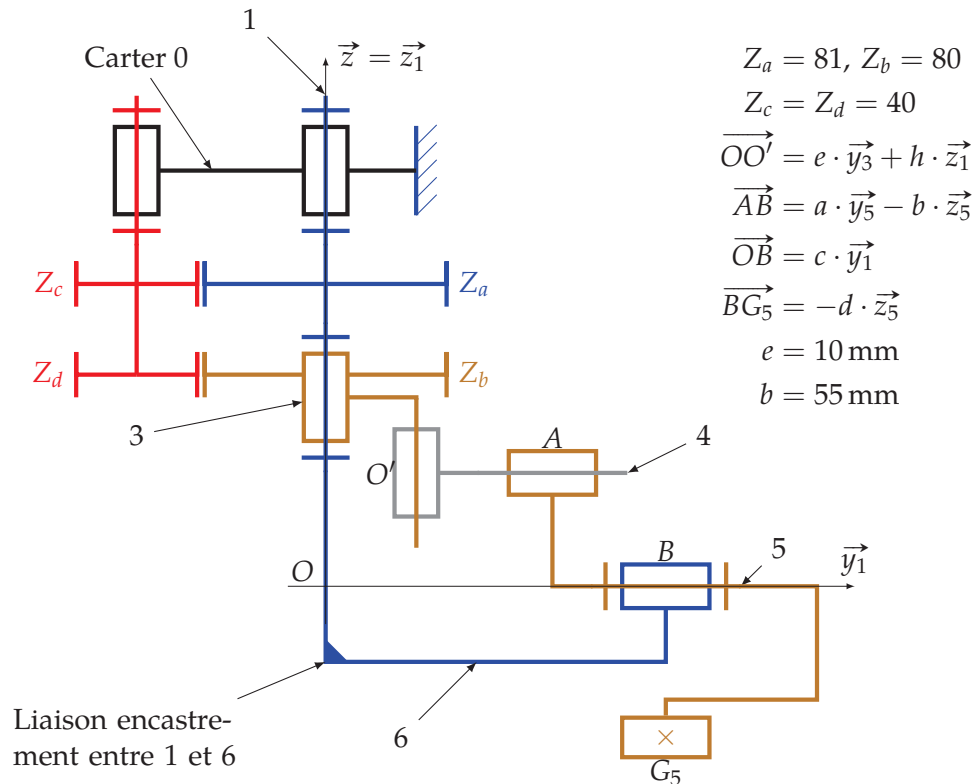


FIGURE 8 – Schéma cinématique tête à polir

Le mécanisme étudié est constitué de la chaîne fermée de solides 1 – 3 – 4 – 5 – 6 – 1 . Ce sous ensemble fait partie du système dont le schéma est présenté sur le document 2, en acceptant que la liaison 1 – 6 soit une liaison encastrement.

Le mouvement de rotation de 3 par rapport à 1 provoque un mouvement d'oscillation de la pièce 5 par rapport à 1. Ce mouvement correspond à la mobilité utile du système étudié. Les figures de rotation (figure 9) précisent les différents paramètres angulaires et les repères associés aux pièces.

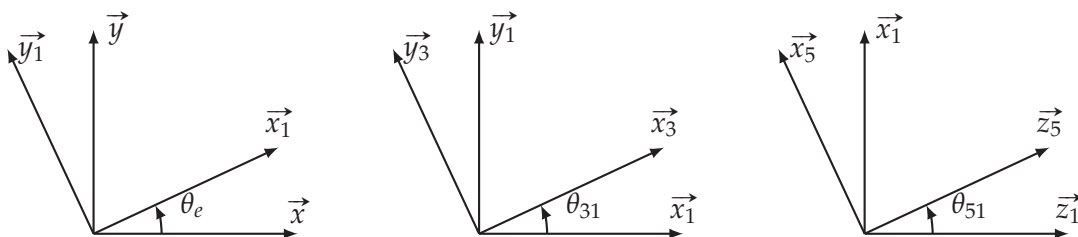


FIGURE 9 – Figures de calculs

Q1. Tracer le graphe des liaisons, en nommant les liaisons autres que la liaison 1–6 et en indiquant leurs caractéristiques géométriques.

Q2. En supposant l'absence de toute mobilité interne, calculer le degré d'hyperstatisme du système, sans écrire, pour l'instant, de fermeture de chaîne cinématique.

Q3. Exprimer les torseurs cinématiques suivant :

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/1} \right\} \text{ en } O, \left\{ \mathcal{V}_{4/3} \right\} \text{ en } O', \left\{ \mathcal{V}_{5/4} \right\} \text{ en } O' \text{ et } \left\{ \mathcal{V}_{6/5} \right\} \text{ en } O.$$

Q4. En supposant toujours la liaison 1–6 comme une liaison encastrement, écrire les équations scalaires traduisant la fermeture de la chaîne cinématique au point O' .

Q5. Retrouver le degré de mobilité et d'hyperstaticité.

Afin de rendre le mécanisme isostatique, il faut rajouter, dans les liaisons composant la chaîne cinématique étudiée, un nombre de degrés de liberté au moins égal au degré d'hyperstatisme. On peut

rajouter un nombre de degrés de liberté supérieur au degré d'hyperstatisme à condition de ne pas modifier la loi entrée – sortie du mécanisme. Apparaîtront alors une (ou plusieurs) mobilité(s) interne(s). Une possibilité de modification concerne la liaison 3 – 4.

Q6. Proposer une modification de la liaison 3 – 4 permettant de rendre le mécanisme isostatique. Écrire son torseur cinématique et montrer son incidence sur les équations de fermeture cinématique. Si cette modification entraîne l'apparition d'une (ou plusieurs) mobilité(s) interne(s), la (les) citer.

Attention : le schéma cinématique est réalisé dans la position de référence du mécanisme pour laquelle les liaisons pivot ou pivot glissant 1 – 3, 3 – 4, 4 – 5 et 5 – 6 sont coplanaires. On fera l'hypothèse que les pièces 1 et 6 sont liées par une liaison encastrement.

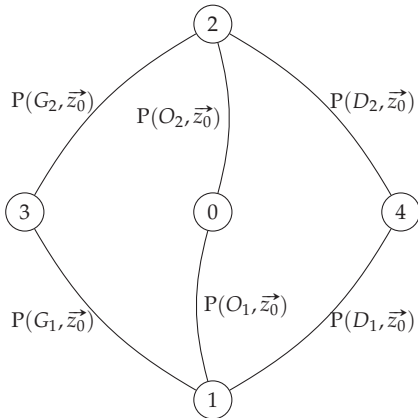
Remarque 1 : le schéma ci-dessus permet d'étudier la cinématique du mécanisme. Il est donc nécessaire d'y faire apparaître de façon rigoureuse les liaisons et leurs positions respectives, mais les formes données aux pièces n'ont aucune importance.

Remarque 2 : on réalise du déport de denture afin que les entraxes des engrenages a – c et b – d puissent être égaux bien que Z_a et Z_b soient différents.

Cor. 1 : Scooter Piaggio

Sujet page 1

Q1. Tracer le graphe des liaisons limité à l'ensemble $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, préciser le nombre cyclomatique.



$$\gamma = L - N + 1 = 2$$

Q2. Écrire la fermeture cinématique limitée à la boucle $\{0,1,2,3\}$. En déduire le degré de mobilité de l'ensemble Σ .

$$\{V_{0/2}\} + \{V_{2/4}\} + \{V_{4/1}\} + \{V_{1/0}\} = \{0\}$$

$$\{V_{0/2}\} = \left\{ \omega_{02} \cdot \vec{z}_0 \right\}_{O_1}$$

$$\{V_{2/4}\} = \left\{ \omega_{24} \cdot \vec{z}_0 \right\}_{O_2} \text{ soit en } O_1 :$$

$$\begin{aligned} \{V_{2/4}\} &= \left\{ \omega_{24} \cdot \vec{z}_0 \right\}_{O_1} = \left\{ \omega_{24} \cdot \vec{z}_0 \wedge -l_1 \cdot \vec{y}_0 \right\}_{O_1} \\ &= \left\{ \omega_{24} \cdot \vec{z}_0 \right\}_{O_1} \end{aligned}$$

$$\{V_{4/1}\} = \left\{ \omega_{41} \cdot \vec{z}_0 \right\}_{D_2} \text{ soit en } O_1 :$$

$$\begin{aligned} \{V_{4/1}\} &= \left\{ \omega_{41} \cdot \vec{z}_0 \wedge D_2 O_1 \right\}_{D_2} \\ &= \left\{ \omega_{41} \cdot \vec{z}_0 \wedge (-l_2 \cdot \vec{x}_1 - l_1 \cdot \vec{y}_0) \right\}_{D_2} \\ &= \left\{ -l_2 \cdot \omega_{41} \cdot \vec{y}_1 + l_1 \cdot \omega_{41} \cdot \vec{x}_0 \right\}_{D_2} \end{aligned}$$

$$\{V_{1/0}\} = \left\{ \omega_{10} \cdot \vec{z}_0 \right\}_{D_1} \text{ soit en } O_1 :$$

$$\{V_{1/0}\} = \left\{ -l_2 \cdot \omega_{10} \cdot \vec{y}_1 \right\}_{D_2}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \omega_{02} + \omega_{24} + \omega_{41} + \omega_{10} = 0 \\ (l_1 \cdot \omega_{24} + l_1 \cdot \omega_{41}) \cdot \vec{x}_0 = \vec{0} \\ (l_2 \cdot \omega_{41} + l_2 \cdot \omega_{10}) \cdot \vec{y}_1 = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \omega_{02} + \omega_{24} + \omega_{41} + \omega_{10} = 0 \\ (l_1 \cdot \omega_{24} + l_1 \cdot \omega_{41}) - (l_2 \cdot \omega_{41} + l_2 \cdot \omega_{10}) \cdot \sin \alpha = 0 \\ (l_2 \cdot \omega_{41} + l_2 \cdot \omega_{10}) \cdot \cos \alpha = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

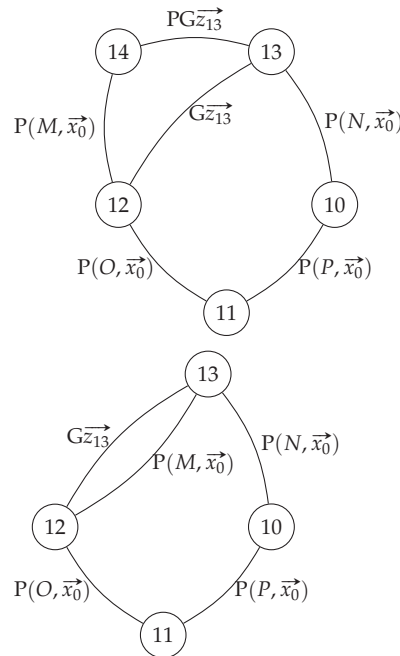
Le système est de rang 3, avec 4 inconnues, il est donc mobile d'ordre 1.

On constate aussi que le système à 3 équations supplémentaires

Q3. Déterminer le nombre d'inconnues de liaisons de l'ensemble Σ , en déduire le degré d'hyperstativité. Justifier ce degré.

le système comporte 3 équations supplémentaires, le mécanisme est donc est hyperstatique d'ordre 3.

Q4. Tracer le graphe des liaisons dans les deux cas limité aux solides $\{10, 11, 12, 13, 14\}$, préciser le nombre cyclomatique,



dans les deux cas, le nombre cyclomatique est $\gamma = 2$.

On étudie dans un premier temps, la boucle constitué des solides $\{12, 13, 14\}$ dans le premier cas puis le second

Q5. Écrire la fermeture cinématique, en déduire le degré de mobilité de chacune des boucles puis le degré d'hyperstativité.

non verrouillée

$$\{V_{12/13}\} + \{V_{13/14}\} + \{V_{14/12}\} = \{0\}$$

$$\{V_{12/13}\} = \left\{ \vec{0} \right\}_{v_P}$$

$$\{V_{13/14}\} = \left\{ \omega_{13/14} \cdot \vec{z}_{13} \right\}_{v_P \in (M, z_{13})}$$

$$\text{et } \{V_{14/12}\} = \left\{ \omega_{14/12} \cdot \vec{x}_0 \right\}_M$$

ce qui donne en projection dans $(\vec{x}_0, \vec{y}_{13}, \vec{z}_{13})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{14/12} = 0 \\ 0 = 0 \\ \omega_{13/14} = 0 \\ 0 = 0 \\ v_{12/13} + v_{13/14} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \omega_{13/14} = 0 \\ 0 = 0 \\ v_{12/13} = 0 \end{array} \right.$$

système de rang 3 avec 4 inconnues, le système est mobile d'ordre $m = 1$.

ici, il faut choisir par exemple $v_{12/13}$

La liaison équivalente entre 12 et 13 est donc une liaison glissière.

verrouillée les équations deviennent

le mécanisme est immobile $m = 0$.

La liaison équivalente entre 12 et 13 est une liaison complète (même classe cinématique).

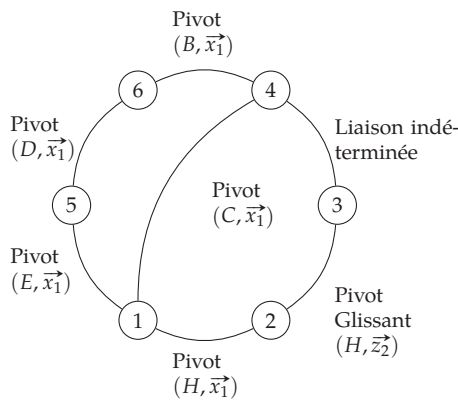
Q6. Tracer le schéma cinématique minimal.

Cor. 2 : Changeur d'outil

Sujet page 3

A. Étude géométrique et cinématique

Q1. Établir le graphe de structure du module changeur et déterminer le nombre et la composition des cycles indépendants.



$\gamma = L - N + 1 = 2$ soit deux cycles indépendants

Cycle 1 {1, 2, 3, 4}

Cycle 2 {1, 4, 6, 5}.

Q2. Évaluer, par une analyse cinématique, le degré de mobilité de cette chaîne de mise en position. Calculer le degré d'hyperstaticité.

La boucle {1, 4, 6, 5} est constituée de $N = 4$ solides, reliés par $L = 4$ liaisons pivots. On en déduit :

- $\gamma = L - N + 1 = 1$ boucle indépendante
- $I_c = 4 \times 1 = 4$ inconnues cinématiques
- $E_c = 6 \times \gamma = 6$ équations

Le rang du système ne peut être plus grand que $r_c < \min(E_c, I_c) = 4$.

Ici, nous savons que le système est mobile et possède une seule mobilité $m = 1$. Nous pouvons en déduire le degré d'hyperstaticité $m - h = I_c - E_c$ soit $h = 3$.

Q3. Préciser le mouvement autorisé par la liaison L_{14} entre la biellette de transmission (4) et le support (1), et écrire au point C puis au point B, l'expression littérale du torseur cinématique $\{V_{4/1}\}$ caractérisant ce mouvement, en fonction de la dérivée temporelle de θ_{14} , et des grandeurs caractéristiques du mécanisme.

Rotation d'axe (C, \vec{x}_1) soit :

$$\{V_{4/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{4/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{C \in 4/1} = \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

avec $\omega_{4/1} = \frac{d\theta_{14}}{dt}$

en B le torseur s'écrit :

$$\begin{aligned} \{V_{4/1}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{4/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{B \in 4/1} = \omega_{4/1} \cdot \vec{x}_1 \wedge \vec{CB} \end{array} \right\}_B \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{4/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{B \in 4/1} = -b \cdot \omega_{4/1} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_B \end{aligned}$$

Q4. Préciser le mouvement autorisé par la liaison L_{15} entre la biellette d'orientation (5) et le support (1), et écrire au point E puis au point D, l'expression littérale du torseur cinématique $\{V_{5/1}\}$ caractérisant ce mouvement, en fonction de la dérivée temporelle de θ_{15} et des grandeurs caractéristiques du mécanisme.

Rotation d'axe (E, \vec{x}_1) soit :

$$\{V_{5/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{5/1} = \omega_{5/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{E \in 5/1} = \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

avec $\omega_{5/1} = \frac{d\theta_{15}}{dt}$

en D ce torseur le torseur s'écrit :

$$\begin{aligned} \{V_{5/1}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{5/1} = \omega_{4/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{D \in 5/1} = \omega_{5/1} \cdot \vec{x}_1 \wedge \vec{ED} \end{array} \right\}_D \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{5/1} = \omega_{5/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{D \in 5/1} = -b \cdot \omega_{5/1} \cdot \vec{z}_5 \end{array} \right\}_D \end{aligned}$$

Q5. La figure constituée des points E, C, B et D est un parallélogramme. Sachant que dans un parallélogramme les cotés opposés restent parallèles ($\theta_{14} = \theta_{15} = \delta$), en déduire la nature du mouvement du porte-outil (6) par rapport au support (1). Comment est le champ des vecteurs vitesses de ce mouvement ?

Si $\theta_{14} = \theta_{15} = \delta$ alors $\vec{V}_{B \in 4/1} = \vec{V}_{D \in 5/1} = -b \cdot \frac{d\delta}{dt} \cdot \vec{z}_4$

Les points B et D sont les centres de deux liaisons pivots respectivement, entre le solide (6) et le solide (4) et entre le solide (6) et le solide (5).

On peut déterminer

$$\vec{V}_{B \in 6/1} = \vec{V}_{B \in 6/4} + \vec{V}_{B \in 4/1} = \vec{V}_{B \in 4/1} = b \cdot \frac{d\delta}{dt} \cdot \vec{z}_4$$

et

$$\begin{aligned} \vec{V}_{D \in 6/1} &= \vec{V}_{D \in 6/5} + \vec{V}_{D \in 5/1} = \vec{V}_{D \in 5/1} \\ &= b \cdot \frac{d\delta}{dt} \cdot \vec{z}_4 \end{aligned}$$

finalement

$$\vec{V}_{B \in 6/1} = \vec{V}_{D \in 6/1} = -b \cdot \frac{d\delta}{dt} \cdot \vec{z}_4$$

Deux points du solide (6) ont même vitesse, le mouvement de (6) est donc une translation circulaire.

Q6. Écrire au point B puis au point P, l'expression littérale du torseur cinématique $\{V_{6/1}\}$ caractérisant le mouvement du porte-outil (6) par rapport au support (1) en fonction de la dérivée temporelle

de δ et des grandeurs caractéristiques du mécanisme.

Le solide (6) est en translation donc $\left\{ \mathcal{V}_{6/1} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -b \cdot \frac{d\delta}{dt} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_{VP} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -b \cdot \omega_{51} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_{VP} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -b \cdot \omega_{41} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_{VP}$

Q7. Écrire au point D puis au point E l'expression littérale du torseur cinématique $\left\{ \mathcal{V}_{6/5} \right\}$ caractérisant le mouvement du porte-outil (6) par rapport à la biellette d'orientation (5).

$\left\{ \mathcal{V}_{6/5} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{6/1} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{1/5} \right\}$ en D cette égalité devient :

$$\left\{ \mathcal{V}_{6/5} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -b \cdot \omega_{51} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_{VP} - \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{5/1} = \omega_{51} \cdot \vec{x}_1 \\ V_{D \in 5/1} = -b \cdot \omega_{51} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_D$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{6/5} = -\omega_{51} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{6/5} = \omega_{65} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$$

en E $\left\{ \mathcal{V}_{6/5} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{6/5} = -\omega_{51} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{\Omega}_{6/5} \wedge \overrightarrow{DE} \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{6/5} = -\omega_{51} \cdot \vec{x}_1 \\ -b \cdot \omega_{51} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_E$

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{6/5} = \omega_{65} \cdot \vec{x}_1 \\ b \cdot \omega_{65} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_E$$

Q8. Écrire au point B puis au point E l'expression littérale du torseur cinématique $\left\{ \mathcal{V}_{6/4} \right\}$ caractérisant le mouvement du porte-outil (6) par rapport à la biellette de transmission (4).

De la même manière,

$$\left\{ \mathcal{V}_{6/4} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{6/4} = -\omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{6/4} = \omega_{64} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

$\overrightarrow{BE} = e \cdot \vec{y}_1 - e \cdot \vec{z}_1$ mais pour faciliter les calculs, on pose $\overrightarrow{BE} = f \cdot \vec{y}_4 + g \cdot \vec{z}_4$ (ces deux valeurs peuvent être déterminées si nécessaire!).

$$\overrightarrow{V_{E \in 6/4}} = \overrightarrow{V_{B \in 6/4}} + \vec{\Omega}_{6/4} \wedge \overrightarrow{BE}$$

$$= \vec{0} - \omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \wedge (f \cdot \vec{y}_4 + g \cdot \vec{z}_4)$$

$$= -b \cdot \omega_{41} \vec{z}_4 - f \cdot \omega_{41} \vec{z}_4 + g \cdot \omega_{41} \vec{y}_4$$

finalement le torseur s'écrit en E :

$$\left\{ \mathcal{V}_{6/4} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{6/4} = -\omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \\ -b \cdot \omega_{41} \vec{z}_4 - f \cdot \omega_{41} \vec{z}_4 + g \cdot \omega_{41} \vec{y}_4 \end{array} \right\}_E$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{6/4} = \omega_{64} \cdot \vec{x}_1 \\ b \cdot \omega_{64} \vec{z}_4 + f \cdot \omega_{64} \vec{z}_4 - g \cdot \omega_{64} \vec{y}_4 \end{array} \right\}_E$$

Q9. Écrire les six équations liées à la fermeture cinématique de la chaîne de solide constituée des solides (1), (4), (5) et (6).

$$\left\{ \mathcal{V}_{6/4} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{4/1} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{1/5} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{5/6} \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

On choisit d'écrire cette relation en E, il reste $\left\{ \mathcal{V}_{4/1} \right\}$ à déplacer

$$\left\{ \mathcal{V}_{4/1} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \\ \overrightarrow{V_{E \in 4/1}} = \omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \wedge (f \cdot \vec{y}_4 + g \cdot \vec{z}_4) \end{array} \right\}_E$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \\ \overrightarrow{V_{E \in 4/1}} = f \cdot \omega_{41} \cdot \vec{z}_4 - g \cdot \omega_{41} \cdot \vec{y}_4 \end{array} \right\}_E$$

d'où la fermeture cinématique

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{6/4} = \omega_{64} \cdot \vec{x}_1 \\ b \cdot \omega_{64} \vec{z}_4 + f \cdot \omega_{64} \vec{z}_4 - g \cdot \omega_{64} \vec{y}_4 \end{array} \right\}_E$$

$$+ \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \\ \overrightarrow{V_{E \in 4/1}} = f \cdot \omega_{41} \cdot \vec{z}_4 - g \cdot \omega_{41} \cdot \vec{y}_4 \end{array} \right\}_E$$

$$- \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{5/1} = \omega_{51} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C - \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{6/5} = \omega_{65} \cdot \vec{x}_1 \\ b \cdot \omega_{65} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_E = \left\{ 0 \right\}$$

d'où les 6 équations de la fermeture cinématique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{64} + \omega_{41} - \omega_{51} - \omega_{65} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ -g \cdot \omega_{64} + g \cdot \omega_{41} + 0 + 0 = 0 \\ b \cdot \omega_{64} + f \cdot \omega_{64} - f \cdot \omega_{41} - b \cdot \omega_{65} = 0 \end{array} \right.$$

Q10. Déterminer le rang du système obtenu à la question précédente. En déduire le degré de mobilité et le degré d'hyperstatisme de la chaîne de solide étudiée.

Le degré de mobilité est $m = 1$ (il faut fixer une des vitesse de rotation pour trouver les autres). Le rang est $r_c = 3$ On déduit le degré d'hyperstatisme du nombre équations supplémentaires $h = E_c - r_c = 3$

Q11. Pour chacune des propositions, vérifier si le modèle est isostatique, préciser le nombre de mobilités et s'il peut être adopté pour modifier le mécanisme actuel.

Si on reprend le système d'équation précédent on constate que pour rendre le système isostatique, il faut rajouter dans une liaison pivot (ou plusieurs), un degré de liberté en translation suivant \vec{x}_1 et deux rotations suivant \vec{z}_1 et \vec{y}_1 afin que les trois équations nulles ne le soient plus.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{64} + \omega_{41} - \omega_{51} - \omega_{65} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ -g \cdot \omega_{64} + g \cdot \omega_{41} + 0 + 0 = 0 \\ b \cdot \omega_{64} + f \cdot \omega_{64} - f \cdot \omega_{41} - b \cdot \omega_{65} = 0 \end{array} \right.$$

cas 1 : la liaison en B est une pivot glissant d'axe (B, \vec{x}_1) $\left\{ \mathcal{V}_{6/4} \right\} =$

$$\left\{ \begin{array}{cc} \omega_{64} & V_{64} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)_B}$$

et la liaison en D une liaison sphérique

$$\left\{ \mathcal{V}_{6/5} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_{65} & 0 \\ \omega_{65y} & 0 \\ \omega_{65z} & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)_D}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{64} + \omega_{41} - \omega_{51} - \omega_{65} + \omega_{65y} + \omega_{65z} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + \omega_{65y} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + \omega_{65z} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + V_{64} - b \cdot \omega_{65z} = 0 \\ -g \cdot \omega_{64} + g \cdot \omega_{41} + 0 + 0 = 0 \\ b \cdot \omega_{64} + f \cdot \omega_{64} - f \cdot \omega_{41} - b \cdot \omega_{65} = 0 \end{array} \right.$$

Le système est maintenant de rang $r_c = 6$ avec $I_c = 7$ inconnues. Les trois degrés de libertés ajoutés sont nuls et la résolution pour le reste est identique à la précédente. Le mécanisme devient donc isostatique ($h = 0$) et de mobilité inchangée ($m = 1$).

cas 4 : ici les trois mobilités sont ajoutées dans la même liaison, la liaison devient une liaison sphère-cylindre. le calcul est analogue au précédent, le mécanisme est isostatique et de mobilité $m = 1$.

cas 2 : on a remplacé deux liaisons pivots par deux liaisons sphériques, le système d'équation devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{64} + \omega_{41} - \omega_{51} - \omega_{65} + \omega_{65y} + \omega_{65z} + \omega_{51y} + \omega_{51z} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + \omega_{65y} + \omega_{51y} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + \omega_{65z} + \omega_{51z} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 - b \cdot \omega_{65z} = 0 \\ -g \cdot \omega_{64} + g \cdot \omega_{41} + 0 + 0 = 0 \\ b \cdot \omega_{64} + f \cdot \omega_{64} - f \cdot \omega_{41} - b \cdot \omega_{65} = 0 \end{array} \right.$$

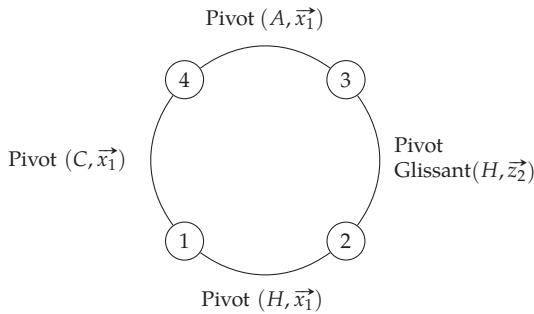
Le système est toujours de rang $r_c = 6$ mais comporte $I_c = 8$ inconnues. La mobilité utile existe toujours, $m_u = 1$ par contre une nouvelle mobilité interne se rajoute, il n'est pas possible de déterminer ω_{65y} et ω_{51y} . La barre 5 peut pivoter autour de la droite (CE) , cette rotation n'est pas gênante pour le fonctionnement, $m_i = 1$, finalement $h = 0$ et $m = 2$.

cas 3 : ce cas semble analogue au précédent, il y a aussi une mobilité interne, la rotation de la barre (BC) mais ici la rotation ne peut être autorisée, le porte outil ne serait plus correctement positionné.

on peut donc :

- soit transformer une liaison pivot en Sphère Cylindre dont l'axe est suivant \vec{x}_1 ,
- soit transformer une liaison pivot glissant et une autre en rotule.

Q12. Montrer, par une analyse cinématique que, si la liaison L_{34} est une liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) , le degré d'hyperstaticité de la chaîne de mise en mouvement n'est pas nul.



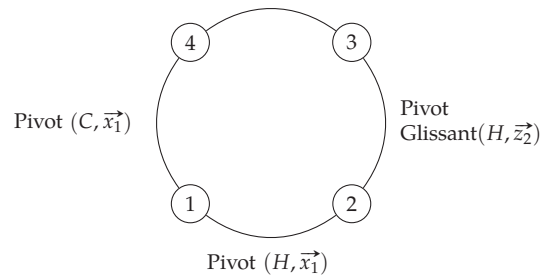
$I_c = 1 + 1 + 1 + 2$ et $E_c = 6$;

Le sous mécanisme étudié comporte donc 6 équations avec 5 inconnues, le rang ne peut être supérieur au plus petit de E_c et I_c , il est donc au maximum de $r_c \leq 5$.

On peut donc en déduire qu'il y a au moins $E_c - r_c = 1$ équation supplémentaire, le degré d'hyperstaticité est donc $h \geq 1$.

Q13. Dans le cas où la liaison L_{34} est une liaison rotule de centre A, calculer le degré de mobilité de la chaîne de mise en mouvement, et montrer que ce système est isostatique. Identifier la (ou les) mobilité(s) de cette chaîne de mise en mouvement.

Sphérique de centre A



$I_c = 1 + 1 + 3 + 2 = 7$ et $E_c = 6$;

Le sous mécanisme étudié comporte donc 6 équations avec 7 inconnues, le rang ne peut être supérieur au plus petit de E_c et I_c , il est donc au maximum de $r_c \leq 6$.

Il est au moins mobile d'ordre $m \geq 1$

On peut montrer que le mécanisme possède ici deux mobilités

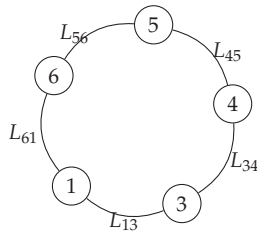
- une mobilité utile $m_u = 1$
- une mobilité interne $m_i = 1$, la rotation de 3 autour de son axe (A, \vec{x}_2) .

On peut alors écrire que $m - h = I_c - E_c$ soit $h = 0$.

Cor. 3 : Tête à polir le marbre

Sujet page 7

Q1. Graphe des liaisons
Graphe des liaisons



Liaisons

- L_{16} : Liaison encastrement (par hypothèse);
- L_{13} : Liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) ;
- L_{34} : Liaison pivot glissant d'axe (O', \vec{z}) ;
- L_{45} : Liaison pivot glissant d'axe (O', \vec{y}_1) ,
- L_{56} : Liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_1) .

Q2. Hyperstaticité

On sait que $m - h = I_c - E_c$, d'où $h = 1$ avec

- $I_c = 6$: le nombre d'inconnues cinématiques;
- $E_c = 6 \cdot \gamma = 6$: le nombre d'équations issues de l'étude cinématique (avec $\gamma = 1$);
- $m = 1$ par hypothèse.

Q3. torseurs cinématiques

$$\{V_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{31} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{VP \in (O, \vec{z}_1) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1)}}$$

$$\{V_{4/3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{43} & w_{43} \end{Bmatrix}_{\substack{VP \in (O', \vec{z}_1) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1)}}$$

$$\{V_{5/4}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{54} & v_{54} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{VP \in (O', \vec{y}_1) \\ (\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z})}}$$

$$\{V_{6/5}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{65} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{VP \in (O, \vec{y}_1) \\ (\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z})}}$$

avec pour notation $(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z})$ pour toute base comportant \vec{y}_1 .

Q4. Fermeture cinématique

On choisit d'écrire la fermeture cinématique en O' et dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Changements de point

$$\{V_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -e \cdot \gamma_{31} \cdot \cos \theta_{31} \\ 0 & -e \cdot \gamma_{31} \cdot \sin \theta_{31} \\ \gamma_{31} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{O' \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}}$$

$$\{V_{6/5}\} = \begin{Bmatrix} 0 & h \cdot \beta_{65} \\ \beta_{65} & 0 \\ 0 & e \cdot \beta_{65} \cdot \sin \theta_{31} \end{Bmatrix}_{\substack{O' \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}}$$

Équations de fermeture

$$\begin{cases} 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + \beta_{54} + \beta_{65} + 0 + 0 = 0 \\ \gamma_{31} + \gamma_{43} + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ -e \cdot \gamma_{31} \cos \theta_{31} + 0 + 0 + h \cdot \beta_{65} + 0 + 0 = 0 \\ -e \cdot \gamma_{31} \sin \theta_{31} + 0 + 0 + 0 + v_{54} + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + e \cdot \beta_{65} \cdot \sin \theta_{31} + 0 + w_{43} = 0 \end{cases}$$

Q5. Degré d'hyperstaticité

Le système ci-dessus comporte 6 équations et 6 inconnues, le

rang est au maximum de 5 en effet la première équation ($0 = 0$) diminue le rang de 1.

Le rang du système est $r_c = 5$. Pour résoudre ce système il faut poser 1 paramètre (ici il est judicieux de choisir γ_{31}) et on obtient :

$$\begin{cases} \gamma_{43} = -\gamma_{31} \\ \beta_{65} = \frac{e}{h} \gamma_{31} \cos \theta_{31} \text{ puis } \begin{cases} \beta_{54} = -\beta_{65} \\ w_{43} = -e \cdot \beta_{65} \cdot \sin \theta_{31} \end{cases} \\ v_{54} = \gamma_{31} \sin \theta_{31} \end{cases}$$

Le système est donc mobile d'ordre $m = 1$ (1 paramètre) et hyperstatique d'ordre $h = 1$ ($h = E_c - r_c$).

Q6. Modification de la liaison 3-4

Pour rendre le système isostatique, il faut ajouter une mobilité de rotation suivant \vec{x}_1 afin de remplacer l'équation supplémentaire $0 = 0$

On nous propose de modifier la liaison 3-4, rajoutons donc

une mobilité, le torseur devient : $\left\{ \mathcal{V}_{4/3} \right\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{43} & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{43} & w_{43} \end{Bmatrix}_{O'}^{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$. Ce

torseur ne correspond pas à une liaison normalisée mais se rap-

proche de la liaison sphère-cylindre de centre O' et d'axe (O', \vec{z}_1)

$$\text{soit : } \left\{ \mathcal{V}_{4/3} \right\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{43} & 0 \\ \beta_{43} & 0 \\ \gamma_{43} & w_{43} \end{Bmatrix}_{O'}^{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

La fermeture géométrique devient :

$$\begin{cases} \alpha_{43} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + \beta_{43} + 0 + 0 + \beta_{54} + \beta_{65} + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + \gamma_{31} + \gamma_{43} + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 - e \cdot \gamma_{31} \cos \theta_{31} + 0 + 0 + h \cdot \beta_{65} + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 - e \cdot \gamma_{31} \sin \theta_{31} + 0 + 0 + 0 + v_{54} + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + e \cdot \beta_{65} \cdot \sin \theta_{31} + 0 + w_{43} = 0 \end{cases}$$

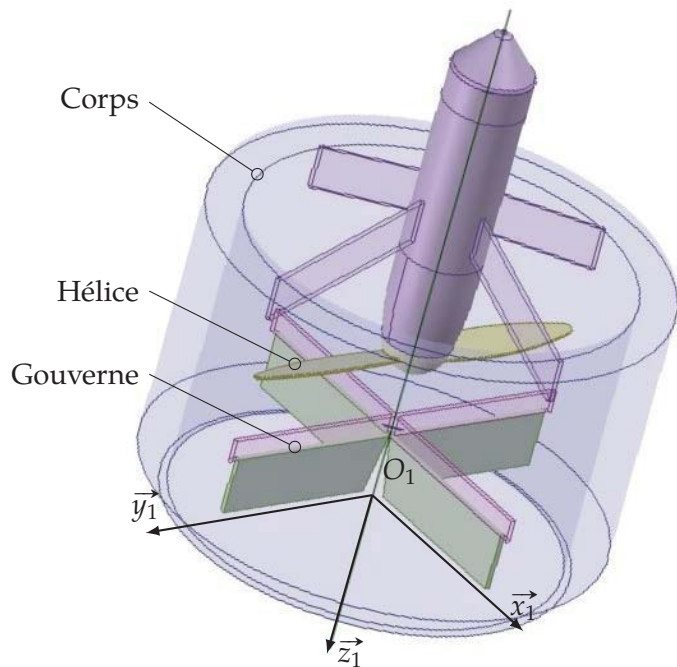
Le système à résoudre est un système 6 équations et 8 inconnues, le rang est de 6, le système est donc mobile d'ordre $m = 2$. La mobilité utile est inchangée, par contre une mobilité interne est rajoutée (équation $\beta_{43} + \beta_{54} + \beta_{65} = 0$), la rotation propre de la pièce 4 autour de l'axe (O', \vec{y}_1) .

A. Schéma, données, notation et paramétrage du drone

Le sujet étudie un drone miniature à voilure tournante (figure 1a).



(a) Drone à voilure tournante



(b) Modélisation du drone

FIGURE 1 – Drone

Lors de l'étude du mouvement nous avons besoin de déterminer les caractéristiques cinétiques de plusieurs solides.

On s'intéresse plus particulièrement aux éléments représentés ci-dessous

Pour les calculs de pré-dimensionnement, le drone, dont le centre d'inertie est noté G , est constitué de deux solides (1) et (2) :

Le corps (1) (figure 1b), constitué du corps et des gouvernes (1a), (1b), (1c) et (1d). On négligera la masse et l'inertie des gouvernes devant les masses et inerties des autres composants du drone. Le corps du drone est considéré comme étant de symétrie axiale d'axe (G_1, \vec{z}_1) et de masse $m_1 = 0,89$ kg. Le point G_1 est son centre d'inertie. On note $\overline{\mathcal{I}}_{G_1}(1)$ la matrice d'inertie du solide (1) calculée en G_1 .

$$\overline{\mathcal{I}}_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{G_1}^{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad \text{et} \quad \overline{O_1 G_1} = l_1 \cdot \vec{z}_1$$

L'axe hélice (2), constitué de l'arbre moteur et de l'hélice. Cet ensemble (2) est en liaison pivot d'axe par rapport au corps (1).

L'axe hélice (2) est considéré comme étant de symétrie axiale d'axe (G_2, \vec{z}_1) et de masse $m_2 = 0,11 \text{ kg}$. Le point G_2 est son centre d'inertie. On note $\overline{\overline{I}}_{G_2}(2)$ la matrice d'inertie du solide (2) calculée en G_2 .

$$\overline{\overline{I}}_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{G_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_1 G_2} = \ell_2 \cdot \vec{z}_1$$

$(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

B. Question

Q1. En tenant compte des symétries, simplifier les matrices d'inertie $\overline{\overline{I}}_{G_1}(1)$ et $\overline{\overline{I}}_{G_2}(2)$ des solides (1) et (2)

Q2. On pose $\overrightarrow{O_1 G} = l_G \cdot \vec{z}_1$, déterminer l_G caractérisant la position du centre d'inertie G du drone en fonction des caractéristiques cinétiques des solides (1) et (2).

Q3. En déduire les matrices d'inertie des solides (1) et (2) calculées en G en fonction des caractéristiques cinétiques des solides (1) et (2).

C. Évolution

On souhaite faire évoluer le drone en passant d'une hélice à deux pales à une hélice à trois pales.

Soit l'hélice tripale définie sur la figure 2.

Q4. Montrez que la matrice d'inertie de l'hélice tripale est aussi diagonale en tout point de l'axe pour toute base dont un des vecteurs est support de l'axe de rotation. pour cela :

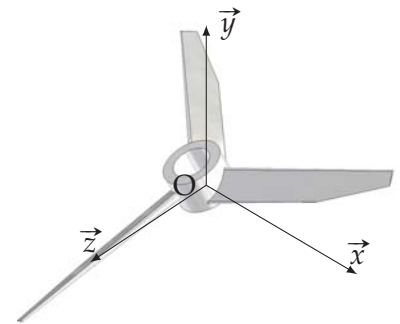
Q4a. Montrez que la matrice d'inertie de trois masses ponctuelles (P_1, P_2, P_3) de masse m régulièrement réparties sur un cercle de rayon R est diagonale.

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_1 = R \cdot \cos(\theta) \\ b_1 = R \cdot \sin(\theta) \\ c_1 = z \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_2 = R \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ b_2 = R \cdot \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ c_2 = z \end{pmatrix}$$

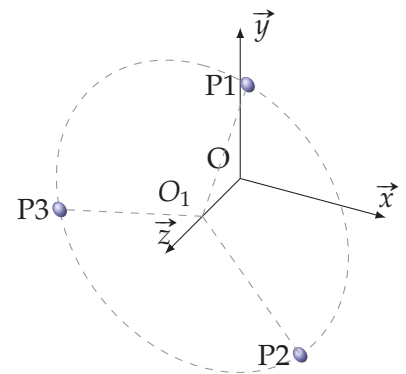
et

$$P_3 = \begin{pmatrix} a_3 = R \cdot \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ b_3 = R \cdot \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ c_3 = z \end{pmatrix}.$$

Q4b. En déduire que la matrice d'inertie d'une hélice tripale est diagonale en tout point de l'axe.



(a) Hélice



(b) Masses ponctuelles réparties

Exercice 5 - Vilebrequin

adapté du concours BTS de l'ENSAE

Corrigé page 22

On considère un coude de vilebrequin forme de 2 tourillons T_1 et T_2 identiques, de 2 bras B_3 et B_4 identiques, et d'un maneton M_5 (voir schéma ci-dessous).

Les masses respectives de ces éléments sont notées m_1, m_2, m_3, m_4 et m_5 . Leurs centres d'inertie respectifs sont notés G_1, G_2, G_3, G_4 et G_5 .

On suppose que les tourillons et le maneton sont des cylindres parfaits de section circulaire. Les bras sont des parallélépipèdes supposés parfaits. Les dimensions, points et axes sont précisés sur le schéma.

On note Σ l'ensemble $\{T_1 + T_2 + B_3 + B_4 + M_5\}$.

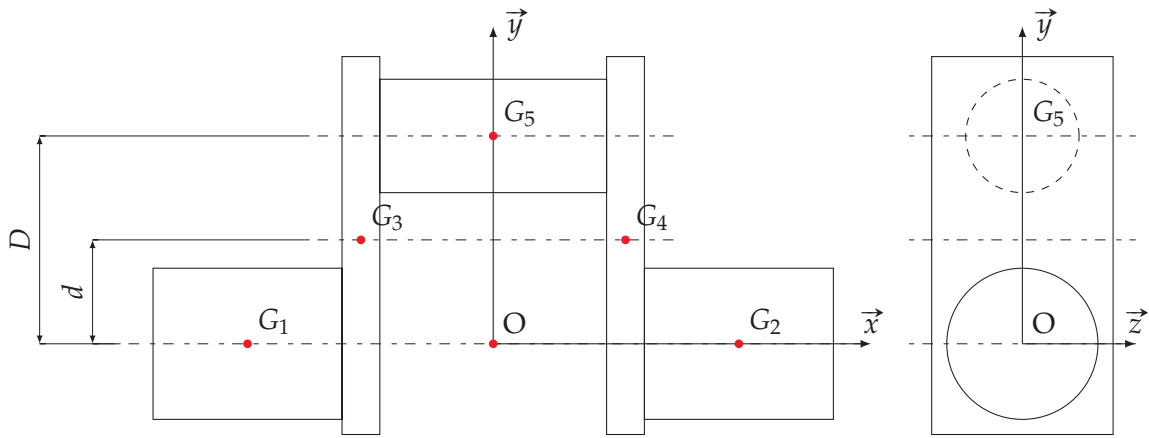


FIGURE 3 – Vilebrequin

Pour chacune des questions suivantes, confirmer ou infirmer la proposition.

Q1. La matrice d'inertie de l'ensemble Σ est de la forme : $\overline{\overline{\mathcal{I}_O(\Sigma)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$

Q2. Le maneton M_5 étant un cylindre de rayon R_5 , de hauteur h_5 , de masse m_5 , de centre d'inertie noté G_5 , son moment d'inertie par rapport à l'axe (G_5, \vec{x}) est : $I_{G_5, \vec{x}}(M_5) = \frac{m_5}{12} (3 \cdot R_5^2 + h_5^2)$.

Q3. L'axe (O, \vec{x}) est axe principal d'inertie pour l'ensemble Σ .

Q4. Le moment d'inertie du maneton M_5 par rapport à (O, \vec{x}) est : $I_{O, \vec{x}}(M_5) = \frac{M \cdot R_5^2}{2} + M_5 \cdot D^2$.

Q5. Le centre d'inertie de l'ensemble Σ est le point G tel que : $\overrightarrow{OG} = \frac{m_3 \cdot d + m_4 \cdot d + m_5 \cdot D}{m_3 + m_4 + m_5}$.

On considère maintenant un coude « allégé », où les tourillons, les bras et le maneton ont été alésés (voir schéma 4). On suppose les alésages parfaits, de rayons r_1 et r_2 pour les bras, et de rayon r_5 pour le maneton.

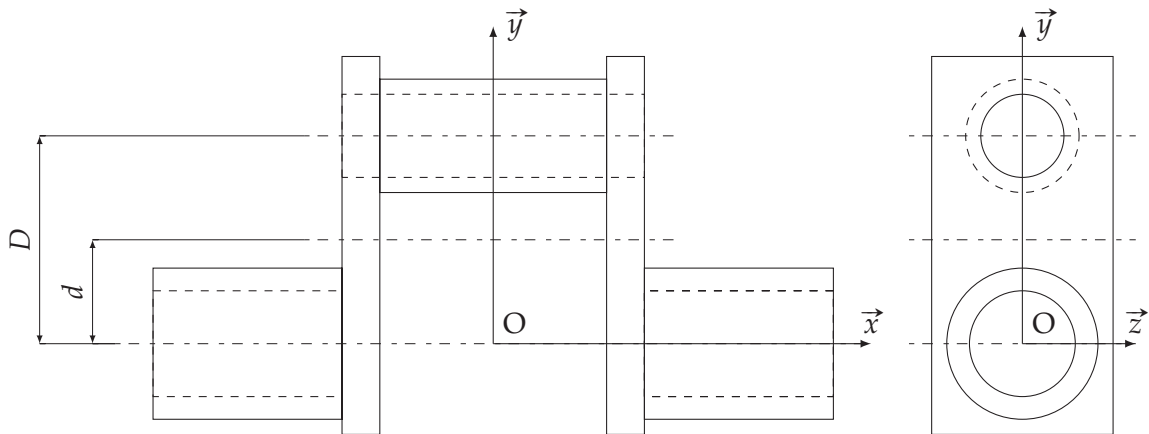


FIGURE 4 – Vilebrequin allégé

Q6. Le centre d'inertie reste inchangé pour chacun des solides.

Q7. La forme de la matrice d'inertie du coude allégé au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est modifiée par rapport à celle du coude « plein ».

Q8. Le moment d'inertie du tourillon T_1 par rapport à l'axe (G_1, \vec{x}) est maintenant : $I_{G_1} T_1 = \frac{m_1}{2} (R_1^2 - r_1^2)$.

Exercice 6 - Cinétique du carrousel

extrait d'E3A PSI 2008

Corrigé page 22

L'objet de l'étude est un carrousel installé entre les différents postes de fabrication d'une peau de tableau de bord.

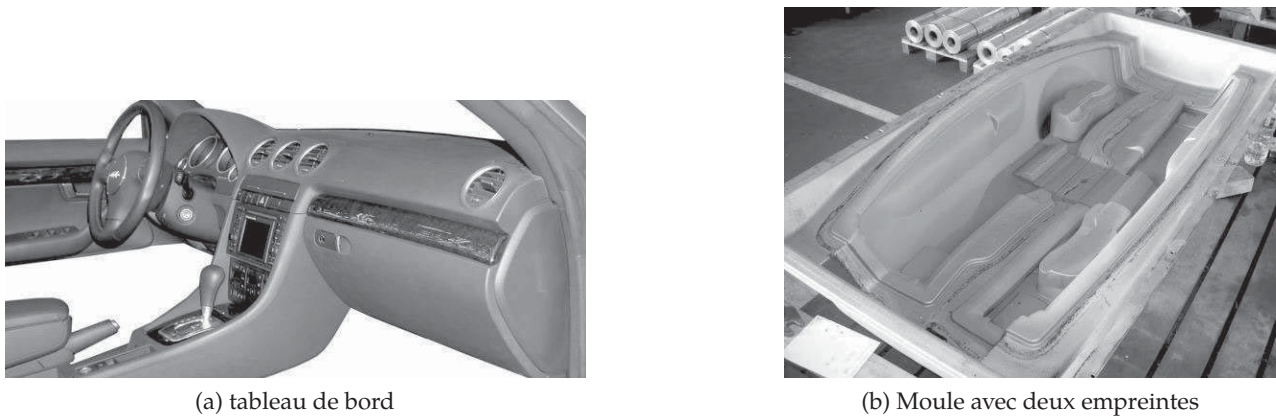


FIGURE 5 – Présentation

Les peaux de tableau de bord sont fabriquées par dépôt d'une poudre de synthèse de polychlorure de vinyle ou polyuréthane sur une empreinte chaude appelée moule.

La société SMCA produit une cellule de fabrication des peaux de tableau de bord automobile, le CASM : Cellule Autonome de Slush-Molding.

La peau est le produit fabriqué par le procédé de « slush molding ». Il consiste en la mise en forme par fusion d'une poudre sur la surface d'un moule préchauffé.

Le moule donne à la peau sa forme. Le moule fixé sur un bras est généralement double et permet ainsi de fabriquer 2 peaux (identiques ou non) au cours du même processus.

Le carrousel comporte 4 bras soutenant chacun un cadre de deux moules (figure 7). Il permet le déplacement du moule, du poste (1) où la poudre est déposée dans le moule, au poste (2) de chauffage, au poste (3) pour le démoulage et finalement au poste (4) dans lequel le moule est refroidi avant le nouveau cycle.

La matrice d'inertie du cadre (C) au point O_c , milieu du cadre se trouvant sur l'axe de rotation (O_x, \vec{x}_c) de celui-ci avec le plateau, dans la base $B_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ est la suivante :

$$\overline{\overline{I_{O_c}(C)}} = \begin{pmatrix} A_c & -F_c & -E_c \\ -F_c & B_c & -D_c \\ -E_c & -D_c & C_c \end{pmatrix}_{O_c, B_c}$$

Q1. Indiquer les termes nuls de cette matrice et préciser pourquoi.

Le cadre est équipé de deux moules identiques respectivement M1 et M2 montés en opposition (voir bases associées sur la figure).

Les matrices d'inertie des moules 1 et 2 au point O_c dans leurs bases respectives $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ sont identiques :

$$\overline{\overline{I_{O_c}(M1)}} = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{O_c, B_1} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{I_{O_c}(M2)}} = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{O_c, B_2}$$

Q2. Déterminer littéralement la matrice d'inertie du cadre équipé des deux moules au point O_c , dans la base $B_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ en fonction des termes des matrices précédentes

$$\overline{\overline{I_{O_c}(C + 2M)}} = \begin{pmatrix} A_{cm} & -F_{cm} & -E_{cm} \\ -F_{cm} & B_{cm} & -D_{cm} \\ -E_{cm} & -D_{cm} & C_{cm} \end{pmatrix}_{O_c, B_2}$$

Q3. Application numérique : $A_c = 159,22 \text{ kgm}^2$, $B_c = 426,02 \text{ kgm}^2$, $C_c = 531,77 \text{ kgm}^2$, $E_c = 0,06 \text{ kgm}^2$, $A_m = 14,38 \text{ kgm}^2$, $B_m = 15,43 \text{ kgm}^2$, $C_m = 21,44 \text{ kgm}^2$, $D_m = 5,32 \text{ kgm}^2$, $E_m = 0,36 \text{ kgm}^2$, $F_m = -0,04 \text{ kgm}^2$

On donne :

- la masse m_{cm} d'un cadre équipé de deux moule;
- le moment d'inertie C_{cm} d'un cadre équipé de deux moules autour de l'axe (O_c, \vec{z}_c) ;
- le centre de gravité d'un cadre équipé de deux moules est sur l'axe (O_c, \vec{z}_c) et situé à une distance d par rapport à l'axe de rotation $axeAz_0$ du plateau indexeur $\vec{z}_0 = \vec{z}_c$;
- le moment d'inertie C_p du plateau indexeur par rapport à l'axe (A, \vec{z}_0) .

L'inertie des « peaux fabriquées » étant négligée par rapport à celle du cadre équipé de deux moules.

Q4. Déterminer littéralement le moment d'inertie C de l'ensemble tournant plateau indexeur équipé de ses quatre cadres et huit moules par rapport à l'axe de rotation (A, \vec{z}_0) en fonction des termes précédents. L'ensemble pivote lorsque tous les cadres sont positionnés avec l'axe \vec{z}_c vertical.

Q5. Application numérique : $C_{cm} = 575 \text{ kgm}^2$; $m_{cm} = 500 \text{ kg}$; $d = 2,95 \text{ m}$; $C_p = 1500 \text{ kgm}^2$.

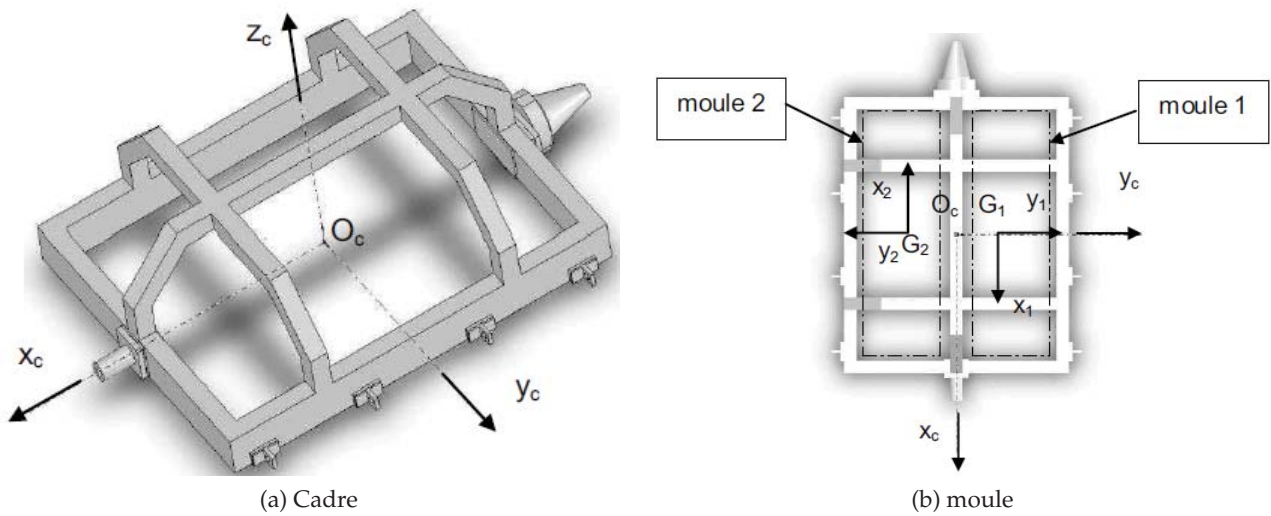


FIGURE 6 – Moules et cadre

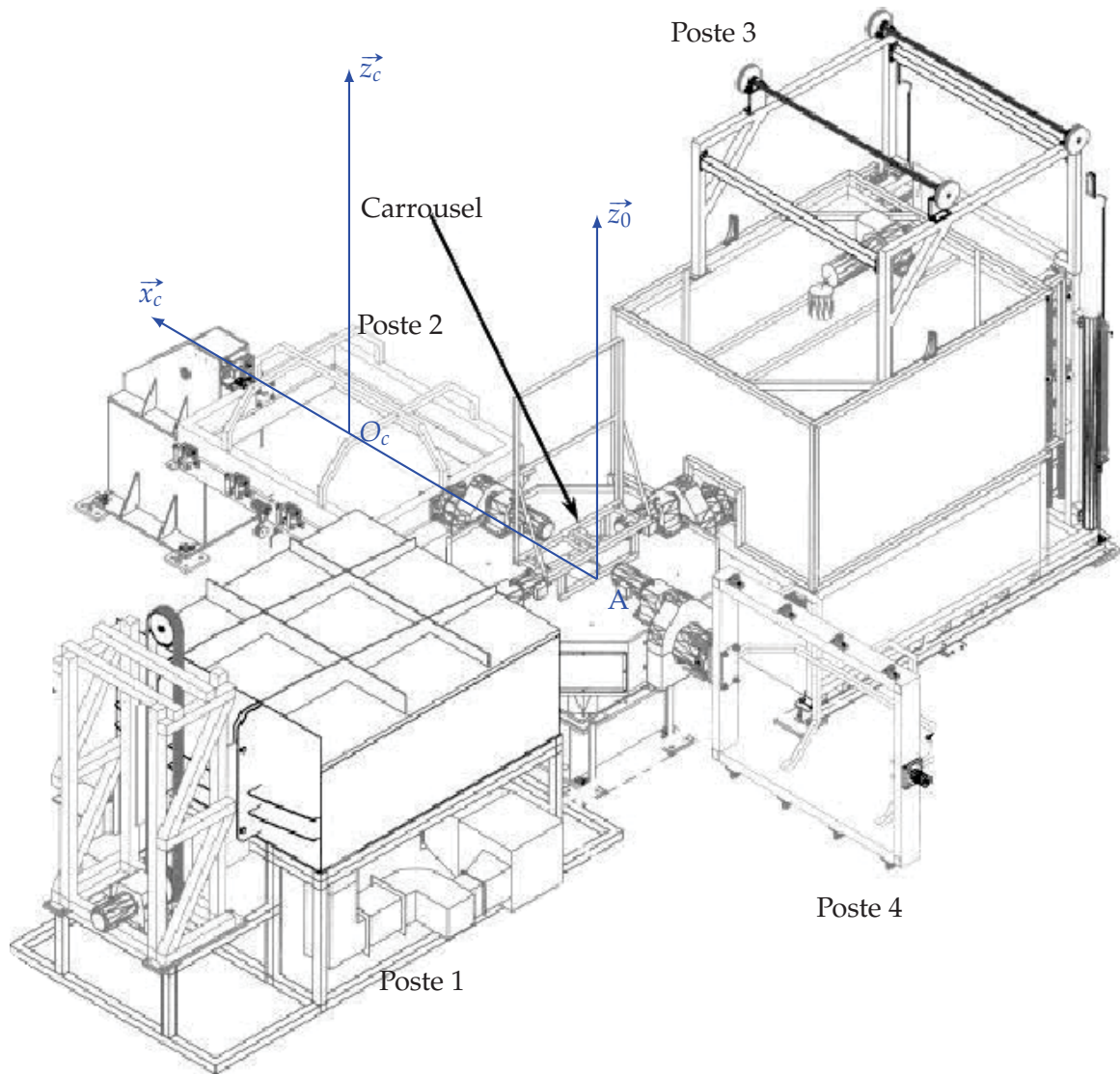


FIGURE 7 – Carrousel

Cor. 4 : Cinétique Drone - Mines 2010

Sujet page 11

Q1. En tenant compte des symétries, simplifier les matrices d'inertie $\overline{\overline{I}}_{G_1}(1)$ et $\overline{\overline{I}}_{G_2}(2)$ des solides (1) et (2)

Le corps est constitué d'une couronne (symétrie de révolution d'axe (O_1, \vec{z}_1)), d'un « noyau » central cylindrique d'axe (O_1, \vec{z}_1) et de 4 bras symétriques deux à deux (plan $(.O_1, \vec{z}_1, \vec{x}_1)$ et $(.O_1, \vec{z}_1, \vec{y}_1)$), les solide présente donc ces deux plans comme plan de symétrie, d'où :

$$\overline{\overline{I}}_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{G_1} \begin{matrix} \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_1 \end{matrix}$$

de même pour la gouverne :

$$\overline{\overline{I}}_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{G_2} \begin{matrix} \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_2 \end{matrix}$$

Q2. On pose $\overline{O_1G} = \ell_G \cdot \vec{z}_1$, déterminer ℓ_G caractérisant la position du centre d'inertie G du drone en fonction des caractéristiques cinétiques des solides (1) et (2).

$$(m_1 + m_2) \cdot \overline{O_1G} \cdot \vec{z}_1 = (m_1 \cdot \overline{O_1G_1} + m_2 \cdot \overline{O_1G_2}) \cdot \vec{z}_1$$

$$\ell_G = \frac{m_1 \cdot \ell_1 + m_2 \cdot \ell_2}{m_1 + m_2}$$

Q3. En déduire les matrices d'inertie des solides (1) et (2) calculées en G en fonction des caractéristiques cinétiques des solides (1) et (2).

on applique le théorème de Huygens avec $\overline{G_1G} = (\ell_G - \ell_1) \cdot \vec{z}_1$ et $\overline{G_2G} = (\ell_G - \ell_2) \cdot \vec{z}_1$

$$\overline{\overline{I}}_{O_1}(1) = \overline{\overline{I}}_{G_1}(1) + m_1 \begin{pmatrix} (\ell_G - \ell_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\ell_G - \ell_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$\overline{\overline{I}}_{O_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 + m_1 (\ell_G - \ell_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 + m_1 (\ell_G - \ell_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}$$

et

$$\overline{\overline{I}}_2(2) = \begin{pmatrix} A_2 + m_2 (\ell_G - \ell_2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 + m_2 (\ell_G - \ell_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

Q4a. À partir du théorème de Huygens on cherche la matrice d'inertie de ces trois masses ponctuelles en O, pour P_1 , la matrice s'écrit :

$$\overline{\overline{I}}_{O}(P_1) = m \cdot \begin{pmatrix} b_1^2 + c_1^2 & -a_1 \cdot b_1 & -a_1 \cdot c_1 \\ -a_1 \cdot b_1 & a_1^2 + c_1^2 & -b_1 \cdot c_1 \\ -a_1 \cdot c_1 & -b_1 \cdot c_1 & a_1^2 + b_1^2 \end{pmatrix}_{O_B}$$

de l'ensemble Σ des trois masses.

$$\overline{\overline{I}}_{O}(\Sigma) = m \cdot \begin{pmatrix} A_\Sigma & F_\Sigma & E_\Sigma \\ F_\Sigma & B_\Sigma & D_\Sigma \\ E_\Sigma & D_\Sigma & C_\Sigma \end{pmatrix}_{O_B}$$

$$A_\Sigma = (b_1^2 + c_1^2) + (b_2^2 + c_2^2) + (b_3^2 + c_3^2)$$

$$B_\Sigma = (a_1^2 + c_1^2) + (a_2^2 + c_2^2) + (a_3^2 + c_3^2)$$

$$C_\Sigma = (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2)$$

$$D_\Sigma = (-b_1 \cdot c_1) + (-b_2 \cdot c_2) + (-b_3 \cdot c_3)$$

$$E_\Sigma = (-a_1 \cdot c_1) + (-a_2 \cdot c_2) + (-a_3 \cdot c_3)$$

$$F_\Sigma = (-a_1 \cdot b_1) + (-a_2 \cdot b_2) + (-a_3 \cdot b_3)$$

Il faut que les produits d'inertie soient nuls pour que la matrice soit diagonale.

$$D_\Sigma = (-b_1 \cdot c_1) + (-b_2 \cdot c_2) + (-b_3 \cdot c_3)$$

$$= (-R \cdot \sin(\theta) \cdot z) + \left(-R \cdot \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot z\right)$$

$$+ \left(-R \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot z\right)$$

$$= -R \cdot z \left(\sin(\theta) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \sin(\theta)\right)\right)$$

$$+ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \sin(\theta)\right)$$

$$= 0$$

On montre de même que $E_\Sigma = 0$ et $F_\Sigma = 0$. La matrice d'inertie des trois masses est donc diagonale.

Q4b. Il est donc évident, à partir du résultat précédent que la matrice d'inertie de l'hélice tripale est diagonale. En effet, il est toujours possible pour chaque point P_1 appartenant à la pale 1 pale d'associer les points P_2 et P_3 des pales 2 et 3 respectant les conditions du calcul précédent.

Ce résultat se généralise à toute hélice de n pales identiques réparties régulièrement.

Cor. 5 : Vilebrequin

Sujet page 12

Q1. Oui, le solide Σ présente deux plans de symétrie et O appartient à la droite d'intersection.

Q2. Non c'est $I_{G_5, \vec{x}}(M_5) = \frac{m_5}{2} \cdot R_5^2$.

Q3. Oui, la matrice est diagonale.

Q4. Oui (application du théorème de Huygens pour déplacer le moment d'inertie) $I_{O, \vec{x}}(M_5) = \frac{M \cdot R_5^2}{2} + M_5 \cdot D^2$.

Q5. Non : $\overline{OG} = \frac{m_3 \cdot d + m_4 \cdot d + m_5 \cdot D}{m_1 + m - 2 + m_3 + m_4 + m_5}$.

Q6. Non, il est inchangé pour les tourillons mais pas pour les bras (la matière supprimée n'est répartie pas symétriquement par rapport à l'axe de symétrie initial).

Q7. Non, même plans de symétrie.

Q8. Non c'est $I_{G_1} T_1 = \frac{m_1}{2} (R_1^2 + r_1^2)$.

Cor. 6 : Cinétique du carrousel

Sujet page 14

Q1. Indiquer les termes nuls de cette matrice et préciser pourquoi.

$$\overline{\overline{I}}_{O_c}(C) = \begin{pmatrix} A_c & 0 & -E_c \\ 0 & B_c & 0 \\ -E_c & 0 & C_c \end{pmatrix}_{O_c B_c}$$

Seul le plan $(O_c, \vec{x}_c, \vec{z}_c)$ de normale \vec{y}_c est plan de symétrie, seuls les produits contenant y sont nuls : $F_c = P_{xy} = 0$ et $D_c = P_{yz} = 0$.

Q2. Déterminer littéralement la matrice d'inertie du cadre équipé des deux moules au point O_c , dans la base $B_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ en fonc-

tion des termes des matrices précédentes

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{O_c}(C+2M)}} = \begin{pmatrix} A_{cm} & -F_{cm} & -E_{cm} \\ -F_{cm} & B_{cm} & -D_{cm} \\ -E_{cm} & -D_{cm} & C_{cm} \end{pmatrix}_{O_c, B_c}$$

Les trois matrices sont données en O_C , il n'est donc pas nécessaire de faire un changement de point. Par contre les deux bases ne sont pas identiques. d'après le schéma :

$$- B_1 = B_c$$

$$- B_2 \neq B_c, \text{ pour cette base } \vec{x}_2 = -\vec{x}_c \text{ et } \vec{y}_2 = -\vec{y}_c$$

Il suffit donc d'inverser dans la matrice $x \rightarrow -x$ et $y \rightarrow -y$. finalement seuls les produits d'inertie $P_{xz} = E_m$ et $P_{yz} = D_m$ change de signe.

les deux matrices s'écrivent donc en O_c dans la base B_c :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{O_c}(M1)}} = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{O_c, B_c} \text{ et}$$

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{O_c}(M2)}} = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & E_m \\ -F_m & B_m & D_m \\ E_m & D_m & C_m \end{pmatrix}_{O_c, B_c}$$

d'où la matrice recherchée :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{O_c}(C+2M)}} = \begin{pmatrix} A_{cm} & -F_{cm} & -E_{cm} \\ -F_{cm} & B_{cm} & -D_{cm} \\ -E_{cm} & -D_{cm} & C_{cm} \end{pmatrix}_{O_c, B_c}$$

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{O_c}(C+2M)}} = \begin{pmatrix} A_c + 2 \cdot A_m & -2 \cdot F_{cm} & -E_c \\ -2 \cdot F_{cm} & B_c + 2 \cdot B_m & 0 \\ -E_c & 0 & C_c + 2 \cdot C_m \end{pmatrix}_{O_c, B_c}$$

Q3. Application numérique :

on trouve :

$$A_{cm} = 187,88 \text{ kgm}^2, B_{cm} = 456,88 \text{ kgm}^2,$$

$$C_{cm} = 574,65 \text{ kgm}^2, F_{cm} = 0,08 \text{ kgm}^2,$$

$$E_{cm} = 0,06 \text{ kgm}^2.$$

Q4. Déterminer littéralement le moment d'inertie C de l'ensemble tournant plateau indexeur équipé de ses quatre cadres et huit moules par rapport à l'axe de rotation (A, \vec{z}_0) en fonction des termes précédents.

On applique le théorème de Huygens afin de ramener le moment d'inertie autour de l'axe (O_c, \vec{z}_c) autour de l'axe (A, \vec{z}_0) .

On a donc

$$C = C_p + 4 \cdot (C_{cm} + m_{cm} \cdot d^2)$$

Q5. Application numérique :

$$C = 21\,205 \text{ kgm}^2.$$