

Exercice 4 - Cinétique Drone - Mines 2010

Extrait de Mines MP 2001

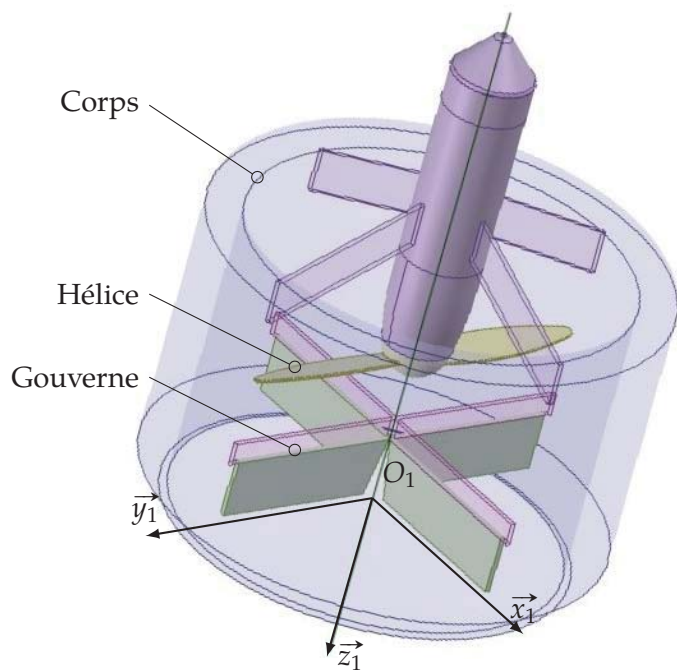
Corrigé page 21

A. Schéma, données, notation et paramétrage du drone

Le sujet étudie un drone miniature à voilure tournante (figure 1a).



(a) Drone à voilure tournante



(b) Modélisation du drone

FIGURE 1 – Drone

Lors de l'étude du mouvement nous avons besoin de déterminer les caractéristiques cinétiques de plusieurs solides.

On s'intéresse plus particulièrement aux éléments représentés ci-dessous

Pour les calculs de pré-dimensionnement, le drone, dont le centre d'inertie est noté G , est constitué de deux solides (1) et (2) :

Le corps (1) (figure 1b), constitué du corps et des gouvernes (1a), (1b), (1c) et (1d). On négligera la masse et l'inertie des gouvernes devant les masses et inerties des autres composants du drone. Le corps du drone est considéré comme étant de symétrie axiale d'axe (G_1, \vec{z}_1) et de masse $m_1 = 0,89$ kg. Le point G_1 est son centre d'inertie. On note $\overline{\mathcal{I}}_{G_1}(1)$ la matrice d'inertie du solide (1) calculée en G_1 .

$$\overline{\mathcal{I}}_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{G_1} \begin{matrix} \\ \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_1 G_1} = l_1 \cdot \vec{z}_1$$

L'axe hélice (2), constitué de l'arbre moteur et de l'hélice. Cet ensemble (2) est en liaison pivot d'axe par rapport au corps (1).

L'axe hélice (2) est considéré comme étant de symétrie axiale d'axe (G_2, \vec{z}_1) et de masse $m_2 = 0,11 \text{ kg}$. Le point G_2 est son centre d'inertie. On note $\overline{\overline{I_{G_2}(2)}}$ la matrice d'inertie du solide (2) calculée en G_2 .

$$\overline{\overline{I_{G_2}(2)}} = \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{\substack{G_2 \\ (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_1 G_2} = \ell_2 \cdot \vec{z}_1$$

B. Question

Q1. En tenant compte des symétries, simplifier les matrices d'inertie $\overline{\overline{I_{G_1}(1)}}$ et $\overline{\overline{I_{G_2}(2)}}$ des solides (1) et (2)

Q2. On pose $\overrightarrow{O_1 G} = l_G \cdot \vec{z}_1$, déterminer l_G caractérisant la position du centre d'inertie G du drone en fonction des caractéristiques cinétiques des solides (1) et (2).

Q3. En déduire les matrices d'inertie des solides (1) et (2) calculées en G en fonction des caractéristiques cinétiques des solides (1) et (2).

C. Évolution

On souhaite faire évoluer le drone en passant d'une hélice à deux pales à une hélice à trois pales.

Soit l'hélice tripale définie sur la figure 2.

Q4. Montrez que la matrice d'inertie de l'hélice tripale est aussi diagonale en tout point de l'axe pour toute base dont un des vecteurs est support de l'axe de rotation. pour cela :

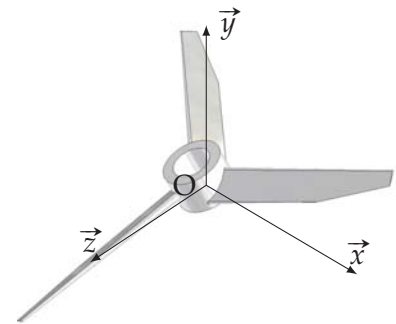
Q4a. Montrez que la matrice d'inertie de trois masses ponctuelles $(P_1, P_2, P_3$ de masse m) régulièrement réparties sur un cercle de rayon R est diagonale.

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_1 = R \cdot \cos(\theta) \\ b_1 = R \cdot \sin(\theta) \\ c_1 = z \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_2 = R \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ b_2 = R \cdot \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ c_2 = z \end{pmatrix}$$

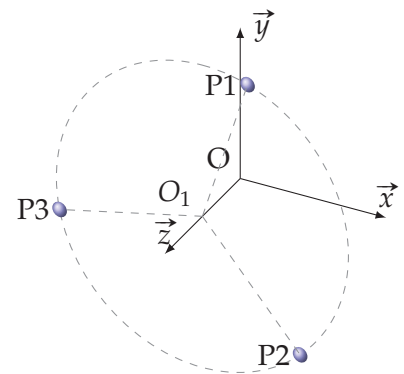
et

$$P_3 = \begin{pmatrix} a_3 = R \cdot \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ b_3 = R \cdot \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ c_3 = z \end{pmatrix}.$$

Q4b. En déduire que la matrice d'inertie d'une hélice tripale est diagonale en tout point de l'axe.



(a) Hélice



(b) Masses ponctuelles réparties

Exercice 5 - Vilebrequin

adapté du concours BTS de l'ENSAE

Corrigé page 22

On considère un coude de vilebrequin forme de 2 tourillons T_1 et T_2 identiques, de 2 bras B_3 et B_4 identiques, et d'un maneton M_5 (voir schéma ci-dessous).

Les masses respectives de ces éléments sont notées m_1, m_2, m_3, m_4 et m_5 . Leurs centres d'inertie respectifs sont notés G_1, G_2, G_3, G_4 et G_5 .

On suppose que les tourillons et le maneton sont des cylindres parfaits de section circulaire. Les bras sont des parallélépipèdes supposés parfaits. Les dimensions, points et axes sont précisés sur le schéma.

On note Σ l'ensemble $\{T_1 + T_2 + B_3 + B_4 + M_5\}$.

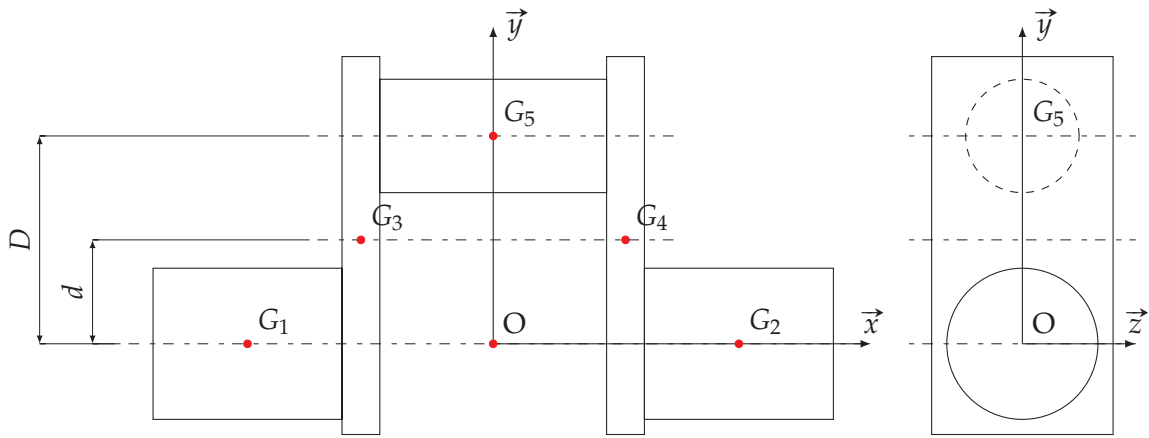


FIGURE 3 – Vilebrequin

Pour chacune des questions suivantes, confirmer ou infirmer la proposition.

Q1. La matrice d'inertie de l'ensemble Σ est de la forme : $\overline{\overline{\mathcal{I}_O(\Sigma)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$

Q2. Le maneton M_5 étant un cylindre de rayon R_5 , de hauteur h_5 , de masse m_5 , de centre d'inertie noté G_5 , son moment d'inertie par rapport à l'axe (G_5, \vec{x}) est : $I_{G_5, \vec{x}}(M_5) = \frac{m_5}{12} (3 \cdot R_5^2 + h_5^2)$.

Q3. L'axe (O, \vec{x}) est axe principal d'inertie pour l'ensemble Σ .

Q4. Le moment d'inertie du maneton M_5 par rapport à (O, \vec{x}) est : $I_{O, \vec{x}}(M_5) = \frac{M \cdot R_5^2}{2} + M_5 \cdot D^2$.

Q5. Le centre d'inertie de l'ensemble Σ est le point G tel que : $\overrightarrow{OG} = \frac{m_3 \cdot d + m_4 \cdot d + m_5 \cdot D}{m_3 + m_4 + m_5}$.

On considère maintenant un coude « allégé », où les tourillons, les bras et le maneton ont été alésés (voir schéma 4). On suppose les alésages parfaits, de rayons r_1 et r_2 pour les bras, et de rayon r_5 pour le maneton.

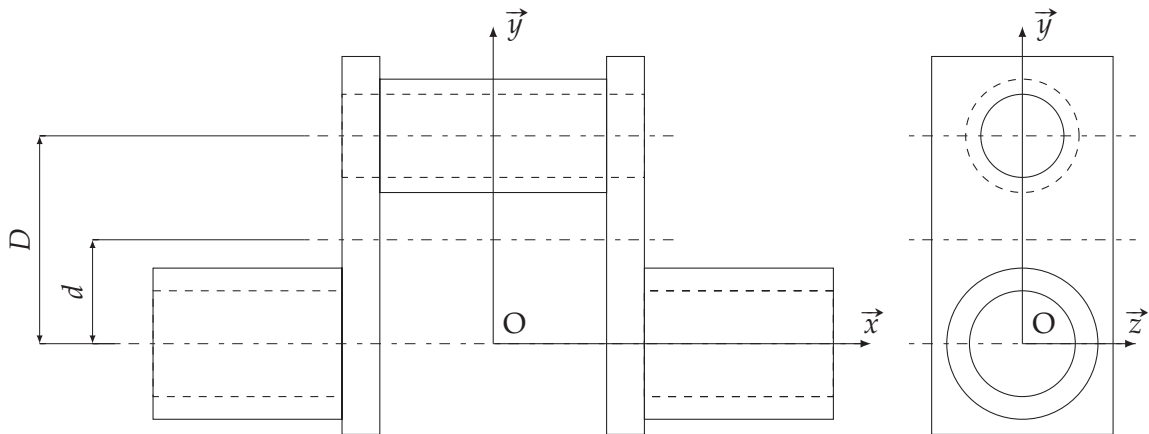


FIGURE 4 – Vilebrequin allégé

Q6. Le centre d'inertie reste inchangé pour chacun des solides.

Q7. La forme de la matrice d'inertie du coude allégé au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est modifiée par rapport à celle du coude « plein ».

Q8. Le moment d'inertie du tourillon T_1 par rapport à l'axe (G_1, \vec{x}) est maintenant : $I_{G_1} T_1 = \frac{m_1}{2} (R_1^2 - r_1^2)$.

Exercice 6 - Cinétique du carrousel

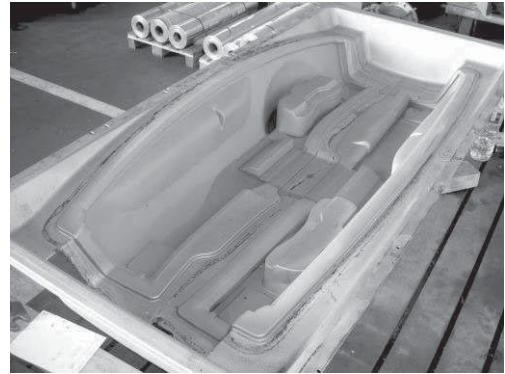
extrait d'E3A PSI 2008

Corrigé page 22

L'objet de l'étude est un carrousel installé entre les différents postes de fabrication d'une peau de tableau de bord.



(a) tableau de bord



(b) Moule avec deux empreintes

FIGURE 5 – Présentation

Les peaux de tableau de bord sont fabriquées par dépôt d'une poudre de synthèse de polychlorure de vinyle ou polyuréthane sur une empreinte chaude appelée moule.

La société SMCA produit une cellule de fabrication des peaux de tableau de bord automobile, le CASM : Cellule Autonome de Slush-Molding.

La peau est le produit fabriqué par le procédé de « slush molding ». Il consiste en la mise en forme par fusion d'une poudre sur la surface d'un moule préchauffé.

Le moule donne à la peau sa forme. Le moule fixé sur un bras est généralement double et permet ainsi de fabriquer 2 peaux (identiques ou non) au cours du même processus.

Le carrousel comporte 4 bras soutenant chacun un cadre de deux moules (figure 7). Il permet le déplacement du moule, du poste (1) où la poudre est déposée dans le moule, au poste (2) de chauffage, au poste (3) pour le démoulage et finalement au poste (4) dans lequel le moule est refroidi avant le nouveau cycle.

La matrice d'inertie du cadre (C) au point O_c , milieu du cadre se trouvant sur l'axe de rotation (O_x, \vec{x}_c) de celui-ci avec le plateau, dans la base $B_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ est la suivante :

$$\overline{\overline{I_{O_c}(C)}} = \begin{pmatrix} A_c & -F_c & -E_c \\ -F_c & B_c & -D_c \\ -E_c & -D_c & C_c \end{pmatrix}_{O_c, B_c}$$

Q1. Indiquer les termes nuls de cette matrice et préciser pourquoi.

Le cadre est équipé de deux moules identiques respectivement M1 et M2 montés en opposition (voir bases associées sur la figure).

Les matrices d'inertie des moules 1 et 2 au point O_c dans leurs bases respectives $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ sont identiques :

$$\overline{\overline{I_{O_c}(M1)}} = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{O_c, B_1} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{I_{O_c}(M2)}} = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{O_c, B_2}$$

Q2. Déterminer littéralement la matrice d'inertie du cadre équipé des deux moules au point O_c , dans la base $B_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ en fonction des termes des matrices précédentes

$$\overline{\overline{I_{O_c}(C + 2M)}} = \begin{pmatrix} A_{cm} & -F_{cm} & -E_{cm} \\ -F_{cm} & B_{cm} & -D_{cm} \\ -E_{cm} & -D_{cm} & C_{cm} \end{pmatrix}_{O_c, B_2}$$

Q3. Application numérique : $A_c = 159,22 \text{ kgm}^2$, $B_c = 426,02 \text{ kgm}^2$, $C_c = 531,77 \text{ kgm}^2$, $E_c = 0,06 \text{ kgm}^2$, $A_m = 14,38 \text{ kgm}^2$, $B_m = 15,43 \text{ kgm}^2$, $C_m = 21,44 \text{ kgm}^2$, $D_m = 5,32 \text{ kgm}^2$, $E_m = 0,36 \text{ kgm}^2$, $F_m = -0,04 \text{ kgm}^2$

On donne :

- la masse m_{cm} d'un cadre équipé de deux moule;
- le moment d'inertie C_{cm} d'un cadre équipé de deux moules autour de l'axe (O_c, \vec{z}_c) ;
- le centre de gravité d'un cadre équipé de deux moules est sur l'axe (O_c, \vec{z}_c) et situé à une distance d par rapport à l'axe de rotation $axeAz_0$ du plateau indexeur $\vec{z}_0 = \vec{z}_c$;
- le moment d'inertie C_p du plateau indexeur par rapport à l'axe (A, \vec{z}_0) .

L'inertie des « peaux fabriquées » étant négligée par rapport à celle du cadre équipé de deux moules.

Q4. Déterminer littéralement le moment d'inertie C de l'ensemble tournant plateau indexeur équipé de ses quatre cadres et huit moules par rapport à l'axe de rotation (A, \vec{z}_0) en fonction des termes précédents. L'ensemble pivote lorsque tous les cadres sont positionnés avec l'axe \vec{z}_c vertical.

Q5. Application numérique : $C_{cm} = 575 \text{ kgm}^2$; $m_{cm} = 500 \text{ kg}$; $d = 2,95 \text{ m}$; $C_p = 1500 \text{ kgm}^2$.

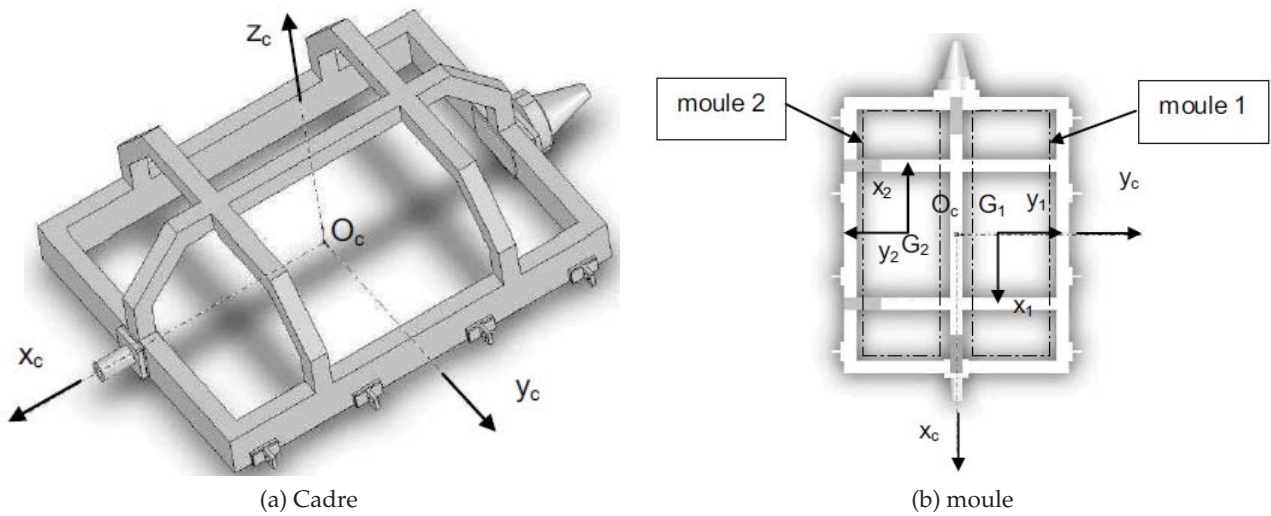


FIGURE 6 – Moules et cadre

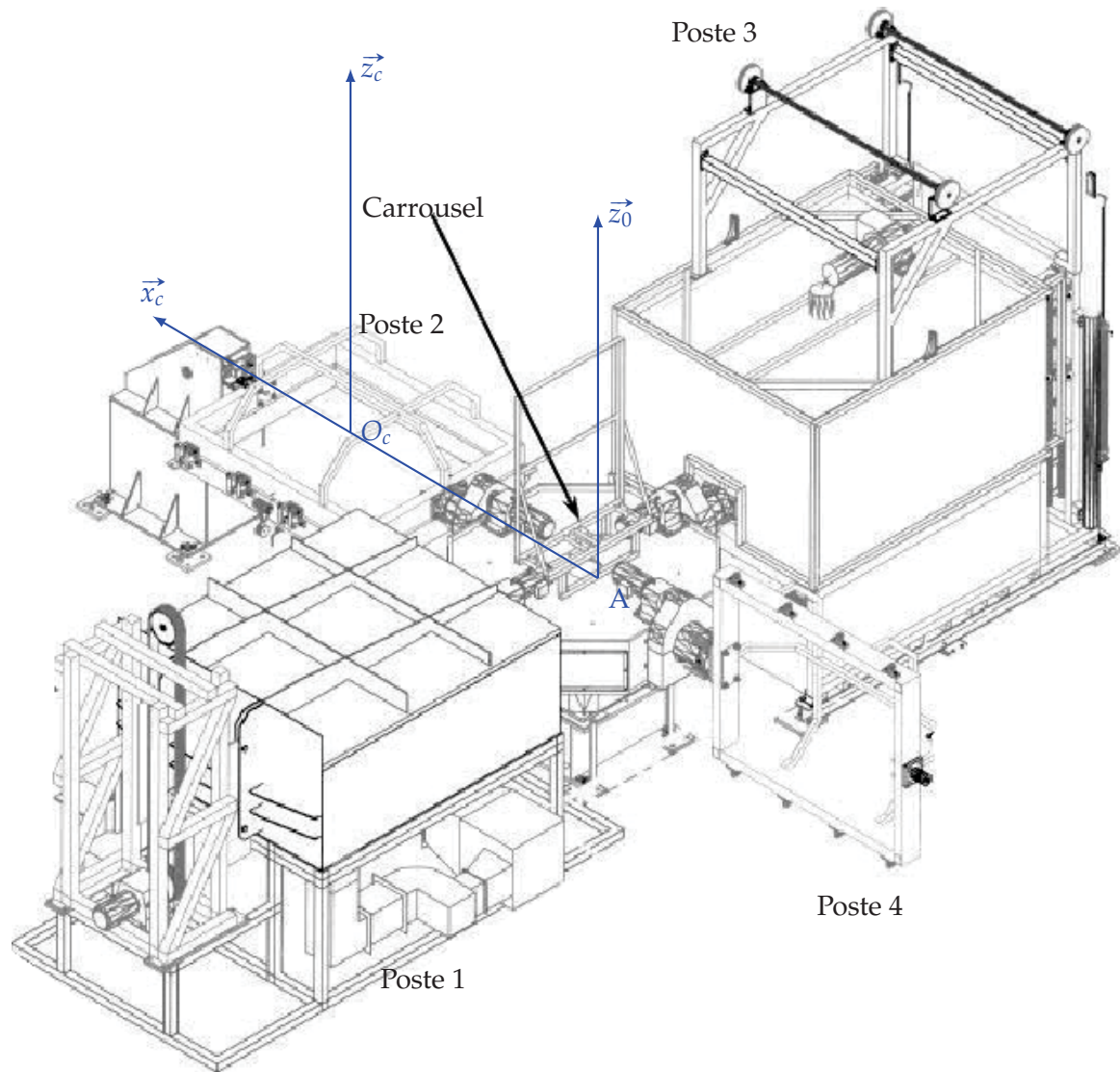


FIGURE 7 – Carrousel