ANNEXE A

TRANSFORMATION DE LAPLACE

A.1. Définition

Soit f une fonction de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$ et supposée nulle pour $t < 0$, on appelle transformée de Laplace de f, la fonction F définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t} f(t)\mathrm{d}t$$

avec p une variable réelle ou complexe.

On note :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$$

avec $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$.

Remarque : : En France, on utilise préférentiellement la variable p mais les pays anglo-saxons utilisent plutôt la variable s. Il est d''usage de noter les transformées de Laplace par une lettre majuscule.

En automatique, on n'utilise que la transformée de Laplace restreinte qui ne s'applique qu'aux fonctions causales (c'est à dire aux fonctions $f(t)$ telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$).

Pour transformer une fonction quelconque en fonction causale, on la combine avec la fonction existence ou fonction de *Heaviside* notée $\mathcal{H}(t)$ et définie par :

$$\begin{cases} t < 0 : & \mathcal{H}(t) = 0 \\ t \geq 0 : & \mathcal{H}(t) = 1 \end{cases}$$

Ainsi on ne calcule pas la transformée de Laplace de $\cos(\omega \cdot t)$ mais de $\mathcal{H}(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

A.1.1. Conditions d'éxistence

Il sort du cadre de ce cours de préciser les conditions d'existence de la transformée de Laplace.

On pourra admettre que la transformée existe si

— f est continue et bornée sur $[0, +\infty[$, alors la transformée de Laplace F existe pour tout $p > 0$. En effet, dans ce cas :

$$|f(t) \cdot e^{-pt}| \leq M \cdot e^{-pt}$$

et l'intégrale de e_{-pt} est convergente.

Une condition moins forte est que la fonction f soit continue par morceaux sur tout intervalle borné de $[0, +\infty[$ et vérifie sur $[0, +\infty[$, une majoration de la forme : $|f(t)| \leq M \cdot e^{-a\cdot t}$ où $M > 0$ est indépendant de t et a est un réel à déterminer. Alors la transformée de Laplace existera pour tout $p > a$.

A.2. Propriétés

Les trois premières propriétés sont évidentes et déduites des propriétés de l'exponentielle et de l'intégrale.

Unicité : à une fonction temporelle $f(t)$, il correspond une transformée de Laplace $F(p)$ unique et réciproquement

Additivité :

$$\mathcal{L}\left(f(t)+g(t)\right)=\mathcal{L}\left(f(t)\right)+\mathcal{L}\left(g(t)\right)=F(p)+G(p)$$

Linéarité :

$$\mathcal{L}\left(a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\right)=a\cdot\mathcal{L}\left(f(t)\right)+b\cdot\mathcal{L}\left(g(t)\right)=a\cdot F(p)+b\cdot G(p)$$

Les suivantes sont celles qui justifient l'utilisation des transformées de Laplace dans l'étude des systèmes linéaires.

Dérivation :

— dérivée première :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\right)=p\cdot F(p)-f(0)$$

— dérivée seconde :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2\,f(t)}{\mathrm{dt}^2}\right)=p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-\dot{f}(0)$$

Si le système est dans les *les conditions de Heaviside*, c'est à dire $f(0)=0$, $\dot{f}(0^+)=0$ et toutes les dérivées en 0 sont nulles, alors :

— dérivée première :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{dt}}\right)=p\cdot F(p)$$

— dérivée seconde :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2\,f(t)}{\mathrm{dt}^2}\right)=p^2\cdot F(p)$$

Dans les conditions de Heaviside, dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine symbolique (domaine de Laplace).

Intégration :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)=\frac{F(p)}{p}+\frac{A_0}{p}$$

en posant : $g(t)=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ et $g(0^+)=A_0$

Dans les conditions de Heaviside ($g(0^+)=0$) cette relation devient :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)=\frac{F(p)}{p}$$

Dans les conditions de Heaviside, intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine symbolique.

Théorème de la valeur finale

Si la fonction $f(t)$ est une fonction convergente (elle possède une limite) alors :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p \cdot F(p)$$

Théorème de la valeur initiale

Si la fonction $f(t)$ possède une limite en 0, alors :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to+\infty} p \cdot F(p)$$

Théorème du retard :

$$\mathcal{L}\left(f(t-\tau)\right) = e^{-\tau\cdot p} \cdot F(p)$$

A.3. Quelques transformées

A.3.1. Échelon

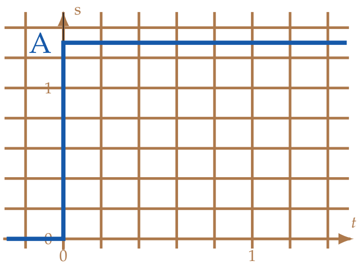

Figure A.1. – Échelon d'amplitude A

$f(t) = A \cdot \mathcal{H}(t)$: A une constante et $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t} f(t)\mathrm{d}t$$
$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t} A \cdot \mathcal{H}(t)\mathrm{d}t$$
$$F(p) = \left[\frac{-A}{p} \cdot e^{-p\cdot t}\right]_0^{+\infty} = \frac{A}{p}$$

A.3.2. Créneau

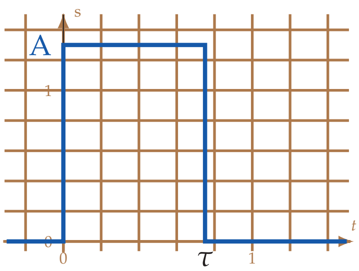

Figure A.2. – Créneau

Pour déterminer la transformée de ce signal, on le décompose en deux fonctions :

$f_1(t)$ est une fonction échelon et $f_2(t)$ est une fonction échelon retardée d'amplitude opposée à celle de $f_1(t)$, on a donc $f_2(t) = -f_1(t-\tau)$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$
$$f(t) = f_1(t) + -f_1(t-\tau)$$

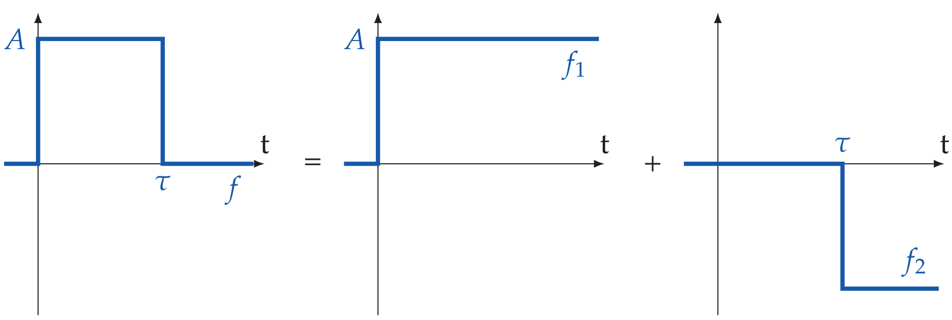

Figure A.3. – Créneau

On peut donc déduire, à partir de la transformée de Laplace d'un échelon et du théorème du retard la transformée d'un créneau :

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \mathcal{L}\left(f_1(t) - f_1(t-\tau)\right) = \mathcal{L}\left(f_1(t)\right) - \mathcal{L}\left(f_1(t-\tau)\right)$$
$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{A}{p} - \frac{A\cdot e^{-\tau\cdot p}}{p}$$
$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{A}{p}\left(1 - e^{-\tau\cdot p}\right)$$

A.3.3. Impulsion de Dirac

Pour réaliser ce calcul, on modélise la fonction de Dirac par le graphe ci-contre définie par
$\begin{cases} 0 < t < \varepsilon & ,\delta(t) = \frac{1}{\varepsilon} \\ \text{sinon,} & \delta(t) = 0 \end{cases}$

L'impulsion de Dirac est obtenue en faisant tendre ε vers 0.

On peut reprendre le calcul précédent en posant $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$ et en faisant tendre ε vers 0.

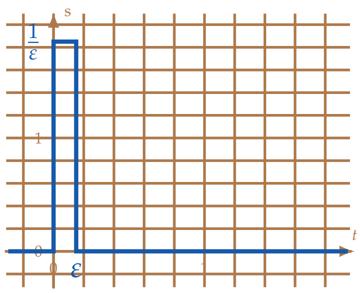

FIGURE A.4. – Implusion de Dirac

$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon\cdot p}\left(1 - e^{-\varepsilon\cdot p}\right)$$

Le développement de l'exponentielle au premier ordre s'écrit $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + o(x)$

$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon\cdot p}\left(1 - e^{-\varepsilon\cdot p}\right)$$
$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon\cdot p}\left(1 - (1 + \varepsilon\cdot p)\right)$$
$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = 1$$

A.3.4. Rampe

$f(t) = A\cdot t\cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t} f(t)\mathrm{d}t$$
$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t} A\cdot t\cdot \mathcal{H}(t)\mathrm{d}t$$

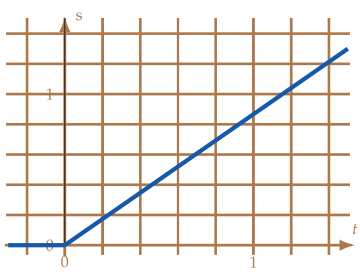

FIGURE A.5. – Échelon

Pour résoudre, il faut utiliser l'intégration par parties[1] :
$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}t = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}t$

avec ici $\begin{cases} u(t) = t, & \dot{v}(t) = e^{-p\cdot t} \\ \dot{u}(t) = 1, & v(t) = -\dfrac{e^{-p\cdot t}}{p} \end{cases}$

1. l'intégration par parties sera vue en math

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\cdot t} A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)\mathrm{d}t$$
$$F(p) = A \cdot \left[t \cdot \frac{-e^{-p\cdot t}}{p}\right]_0^{+\infty} - A \cdot \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-p\cdot t}}{p}\mathrm{d}t$$
$$F(p) = 0 + A \cdot \left[\frac{-e^{-p\cdot t}}{p^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{A}{p^2}$$

a). Tableau des transformées

Le tableau A.4 page 53 et celui de la page suivante présente les transformées des principales fonctions, il n'est pas à connaître et sera en général toujours fourni lors d'un devoir.
Ce tableau, sera aussi souvent utilisé dans le sens transformée de Laplace vers la fonction temporelle.

A.3.5. Transformées inverses

Soit $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$. On appelle transformée de Laplace inverse, ou original, de $F(p)$ la fonction $f(x)$. On note :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$$

a). Détermination analytique

Les méthodes analytiques ne sont pas au programme.

b). Détermination par l'utilisation de tables

La transformation de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une fonction $F(p)$ donnée.
Lorsque la fonction $F(p)$ est sous la forme d'une fraction rationnelle en p, la méthode à utiliser est la décomposition en éléments simples. Pour déterminer la fonction temporelle revient alors à rechercher dans la table (page 53) la transformée inverse de chaque fraction élémentaire.
La transformée inverse de $F(p)$ est la somme des fonctions temporelles élémentaires.
Tout polynôme possède et / ou :

— des racines nulles ;

— des racines réelles, simples et / ou multiples ;

— des racines complexes, simple et / ou multiples.

Ainsi un polynôme du troisième ordre $D(p) = a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p^1 + 1$, en fonction des racines pourra se mettre sous la forme suivante :

— 3 racines réelles distinctes :

$$D(p) = (1 + \lambda_1 \cdot p) \cdot (1 + \lambda_2 \cdot p) \cdot (1 + \lambda_3 \cdot p)$$

— 1 racine réelles double et un racine réelle distincte :

$$D(p) = (1 + \lambda_1 \cdot p)^2 \cdot (1 + \lambda_3 \cdot p)$$

— 1 racine réelles et deux racines complexes conjuguées :

$$D(p) = (1 + \lambda_1 \cdot p) \cdot (1 + \lambda_2 \cdot p + \lambda_3 \cdot p^2)$$

Ainsi, dans le cas général, le polynôme du dénominateur peut donc se mettre sous la forme d'un produit de fonctions du premier et du second ordre :

$$H(p) = K' \cdot \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_m \cdot p^m}{\prod_j \left(p - c_j\right)^{\alpha_j} \cdot \prod_l \left(\left(p - a_l\right)^2 + b_l^2\right)^{\alpha_l} \cdot \prod_k \left(p^2 + b_l^2\right)^{\alpha_k}}$$

avec :

	p^α :	racines nulles d'ordre α,
	$\prod_j \left(p - c_j\right)^{\alpha_j}$:	racines réelles multiples d'ordre α_j,
avec :	$\prod_l \left(\left(p - a_l\right)^2 + b_l^2\right)^{\alpha_l}$:	racines complexes multiples d'ordre α_l,
	$\prod_k \left(p^2 + b_l^2\right)^{\alpha_k}$:	racines imaginaires pures multiples d'ordre α_k.

Nous allons traiter les différents type de racines et d'ordre à partir d'exemples

c). Racines réelles simples

Si la fonction de transfert ne présente que des pôles réels simples, la décomposition s'écrit comme la somme des fractions simples de chaque pôle.

Ainsi

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2 + 15 \cdot p + 50}$$

possède deux racines simples :

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+5) \cdot (p+10)}$$

sa décomposition en fractions simples est donc de la forme suivante :

$$F(p) = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}$$

d). Racines réelles multiples

Dans le cas de racines réelles multiples, la décomposition en fractions simples de la racine multiple est la somme des fractions simples des puissances décroissantes.

Pour

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+5)^2 \cdot (p+10)}$$

la décomposition en fractions simples s'écrit :

$$F(p) = \frac{A}{(p+5)^2} + \frac{B}{(p+5)} + \frac{C}{(p+10)}$$

e). Racine complexe simple

Dans le cas d'une racine complexe, il est possible de raisonner comme dans le cas des racines réelles mais cela fait apparaitre des coefficients complexe.Il est préférable de ne travailler qu'avec des coefficients réels. Pour cela, on réalisera la décomposition en gardant les polynômes du second ordre au dénominateur.

Ainsi

$$F(p) = \frac{3}{p\cdot(p^2+2\cdot p+5)}$$

se décompose sous la forme :

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B\cdot p + C}{(p^2+2\cdot p+5)}$$

f). Détermination des coefficients

Pour déterminer les coefficients, on peut soit

— résoudre par identification,

— déterminer les coefficients en utilisation la valeur de la fonction en des points particuliers,

— déterminer les coefficients après les avoir isolés.

Par identification :

$$\begin{aligned}
\frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} &= \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}\\
\frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} &= \frac{A(p+10)+B\cdot(p+5)}{(p+5)\cdot(p+10)}\\
\frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} &= \frac{p\cdot(A+B)+10\cdot A+5\cdot B}{(p+5)\cdot(p+10)}
\end{aligned}$$

il reste à résoudre le système

$$\begin{cases} A + \quad B = 1 \\ 10\cdot A + 5\cdot B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{5} \\ B = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

$$\frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} = \frac{-3}{5\cdot(p+5)} + \frac{8}{5\cdot(p+10)}$$

À partir de la table des transformées, on détermine $f(t)$:

$$f(t) = \frac{-3}{5}\cdot e^{-5\cdot t} + \frac{8}{5}\cdot e^{-10\cdot t}$$

En isolant les coefficients : Pour cela, on multiplie la fonction de transfert des deux cotés de l'égalité par le polynôme de la racine concernée. On calcule ensuite, pour le pôle concernée la valeur de cette égalité.

Ainsi pour

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}$$

Pour déterminer A, on multiplie les deux termes de l'égalité par $(p+5)$, ce qui donne

$$\frac{p+2}{(p+10)} = A + B\cdot\frac{p+5}{p+10}$$

pour la valeur : $p = -5$, cette égalité donne directement A

$$\frac{-3}{5} = A$$

On recommence pour l'autre racine.
Cette méthode très pratique fonctionne bien pour déterminer les coefficients des racines simples et le coefficient de la fraction avec la puissance la plus élevée des racines réelles multiples.

En choisissant des valeurs particulières : Ainsi, pour

$$F(p) = \frac{3}{p\cdot(p^2+2\cdot p+5)} = \frac{A}{p} + \frac{B\cdot p + C}{(p^2+2\cdot p+5)}$$

la méthode précédente permet d'obtenir rapidement $A = \frac{3}{5}$. Pour déterminer les deux autres coefficients, il est judicieux de déterminer la fonction pour deux valeurs particulières de p par exemple : $p = 1$ et $p = -1$.

$$\frac{3}{p\cdot(p^2+2\cdot p+5)} = \frac{3}{5\cdot p} + \frac{B\cdot p + C}{(p^2+2\cdot p+5)}$$

$$\begin{array}{ll} p = 1 & \dfrac{3}{(1+2+5)} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{B+C}{(1+2+5)} \\ p = -1 & \dfrac{-3}{(1-2+5)} = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{-B+C}{(1-2+5)} \end{array}$$

soit

$$\left\{\begin{array}{l} B + C = 3 - \dfrac{24}{5} \\ -B + C = -3 + \dfrac{12}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B = -\dfrac{3}{5} \\ C = -\dfrac{6}{5} \end{array}\right.$$

A.3.6. Détermination de la solution

Pour déterminer la solution, il ne reste plus qu'à rechercher dans les tableaux des transformées inverse, la transformée inverse de chaque fraction simple.

A.4. Tableau des transformées

Les tableaux de la page suivante présentent les transformées usuelles et les transformées des systèmes du premier et du second ordre.

a). Transformées usuelles

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau\cdot p}$
$a\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p}$
$a\cdot u(t-\tau)$	$\dfrac{a}{p}\cdot e^{-\tau\cdot p}$
$a\cdot t\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p^2}$
$t^n\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-a\cdot t}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\dfrac{1-e^{-a\cdot t}}{a}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p\cdot(p+a)}$

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p(1+\tau.p)}$
$e^{-a.t}\cdot t^n\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\sin(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-a\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{\omega^2+(p+a)^2}$
$e^{-a\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{\omega^2+(p+a)^2}$
$\dfrac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\dfrac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$

b). Transformées des systèmes du 1[er] et du 2[nd] ordre

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\dfrac{1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{1+\tau\cdot p}$
$\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)}$
$\left(t-T+T\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p^2\cdot(1+\tau\cdot p)}$
$t\cdot\dfrac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{(1+\tau\cdot p)^2}$
$\left(1-(t+\tau)\cdot\dfrac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)^2}$
$\dfrac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{(1+\tau_1 p)\,(1+\tau_2 p)}$
$\left(1+\dfrac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p.\,(1+\tau_1 p)\,(1+\tau_2 p)}$
$\dfrac{1}{\omega_0\cdot\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\cdot\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{\omega_0{}^2+2\cdot z\cdot\omega_0\cdot p+p^2}$ avec $z<1$
$\dfrac{1}{\omega_0^2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\cdot\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\cdot t+\varphi\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$ et $\varphi=\arccos z$	$\dfrac{1}{p\,(\omega_0{}^2+2\cdot z\cdot\omega_0\cdot p+p^2)}$ avec $z<1$