

Étude temporelle des systèmes linéaires

5.1 Systèmes du 1^{er} ordre

5.1.1 Définition

Un système du premier ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre :

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \tau : \text{constante de temps} \\ K : \text{gain statique} \end{array}$$

5.1.2 Fonction de transfert

On pose : $e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p)$ et $s(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} S(p)$. On se place dans les conditions de Heaviside. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation précédente, on obtient :

$$\tau \cdot p \cdot S(p) + S(p) = K \cdot E(p)$$

on en déduit la fonction de transfert sous sa forme canonique et le schéma-bloc d'un système du premier ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \quad \begin{array}{c} E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{1 + \tau \cdot p}} \longrightarrow S(p) \end{array}$$

5.1.3 Étude temporelle - Réponse à un échelon

On se propose d'étudier la réponse temporelle de la sortie $s(t)$ pour une entrée de type échelon $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$.

Pour déterminer la réponse temporelle de la sortie $s(t)$, il est nécessaire de résoudre l'équation différentielle. On peut pour cela, soit utiliser les outils mathématiques classiques, soit utiliser les propriétés de la transformées de Laplace.

Pour résoudre complètement il est nécessaire de préciser les conditions initiales, nous les supposons nulles (conditions de Heaviside).

La résolution ne pose pas de problème, on connaît la forme de l'équation différentielle à résoudre,

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

et la solution est, pour un système partant du repos, de la forme :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Nous allons retrouver ce résultat à partir de la transformation de Laplace.

On détermine dans un premier temps la sortie dans le domaine symbolique :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{E_0}{p} \quad \text{avec} \quad e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{E_0}{p}$$

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau \cdot p} \quad (\text{décomposition en fractions simples})$$

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0}{p} - \frac{K \cdot E_0 \cdot \tau}{1 + \tau \cdot p} \quad (\text{par identification})$$

À partir du tableau des transformées page 58;

$$\frac{K \cdot E_0}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K \cdot E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$$

$$\frac{K \cdot E_0 \cdot \tau}{1 + \tau \cdot p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K \cdot E_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \mathcal{H}(t)$$

On retrouve bien la réponse temporelle.

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \mathcal{H}(t)$$

a) Étude et propriétés de s(t)

L'étude de cette fonction ne pose aucun problème particulier mais nous allons utiliser les outils de la transformation de Laplace pour retrouver quelques propriétés.

Asymptote finale : À partir du théorème de la valeur finale¹, nous allons vérifier que la réponse possède une asymptote horizontale. Le théorème de la valeur finale s'écrit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{E_0}{p} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K \cdot E_0$$

La sortie tend asymptotiquement vers une valeur finie $K \cdot E_0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Valeur initiale : Le théorème de la valeur initiale appliqué à $s(t)$ permet d'obtenir la valeur à l'instant $t = 0$ de la sortie.

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot S(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{E_0}{p} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$$

Tangente à l'origine : Pour déterminer la tangente à l'origine, il faut déterminer la dérivée de $s(t)$ pour $t = 0$. On peut utiliser le théorème de la valeur initiale appliqué à la dérivée pour obtenir cette valeur.

Nous savons que pour une fonction temporelle $f(t)$ dont la transformée de Laplace est $F(p)$, on

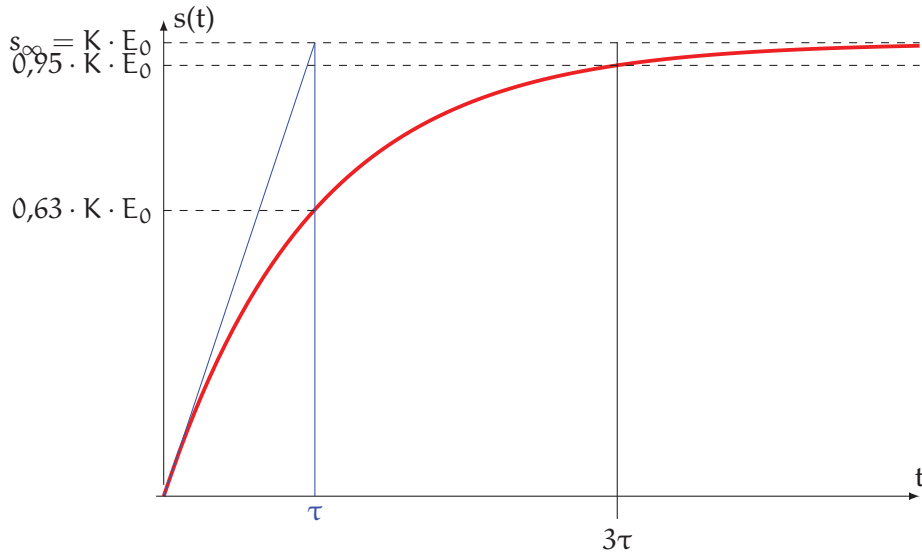
1. Le théorème de la valeur finale n'est utilisable que si la fonction est convergente.

peut écrire :

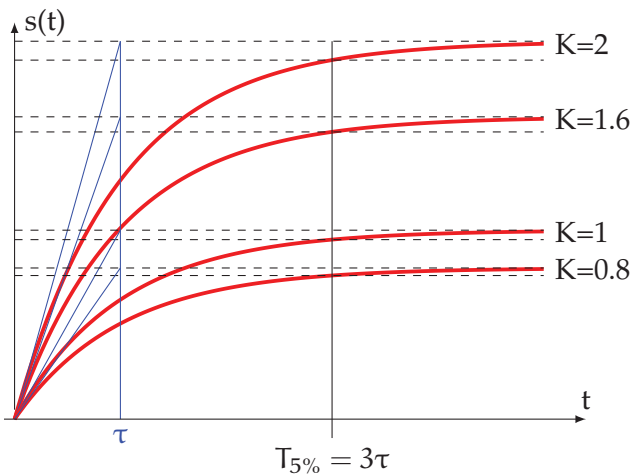
$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p) \quad \text{si les conditions initiales sont nulles.}$$

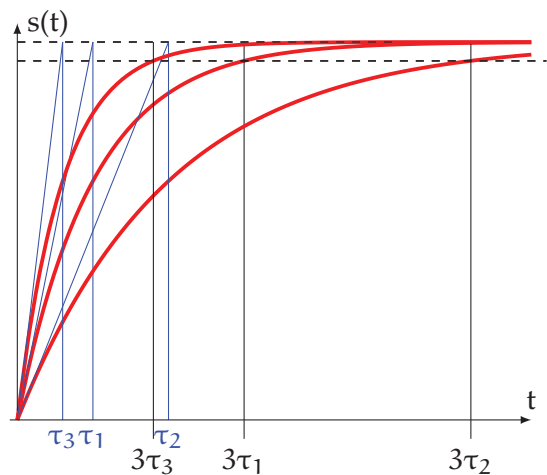
En appliquant le théorème de la valeur initiale à $\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt}$



(a) Caractéristiques graphiques d'un 1^{er} ordre



(b) Réponse à un échelon unitaire d'un 1^{er} ordre pour différentes valeurs du gain K



(c) Réponse à un échelon d'un 1^{er} ordre pour différentes valeurs de la constante de temps τ

FIGURE 5.1 – Réponse d'un système du 1^{er} ordre

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p^2 \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{E_0}{p} \right) = \frac{K}{\tau} \cdot E_0$$

La pente à l'origine est non nulle et égale à $\frac{K \cdot E_0}{\tau} = \frac{s_\infty}{\tau}$. On constate que la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale ($K \cdot E_0$) au bout du temps τ (voir figure 5.1b).

Temps de réponse : On appelle temps de réponse à 5% ($T_{5\%}$), le temps mis pour que la sortie atteigne la valeur finale à $\pm 5\%$ près soit :

$$\frac{s(\infty) - s(T_{5\%})}{s(\infty)} = 0,05$$

$$\frac{K \cdot E_0 - K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_{5\%}}{\tau}}\right)}{K \cdot E_0} = 0,05$$

$$e^{-\frac{T_{5\%}}{\tau}} = 0,05$$

On en déduit

$$T_{5\%} \approx 3 \cdot \tau$$

On note que le temps de réponse ne dépend pas de la consigne d'entrée ni du gain mais uniquement de la constante de temps τ , plus la constante de temps est importante, plus le temps de réponse est important (figures 5.1).

5.1.4 Réponse à une impulsion de Dirac

Pour une impulsion de Dirac (figure 5.2) :
 $e(t) = \delta(t)$ alors

$$S(p) = H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \Rightarrow s(t) = \frac{K}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Remarque : Compte tenu de la discontinuité de l'impulsion de Dirac, le théorème de la valeur initiale n'est pas applicable.

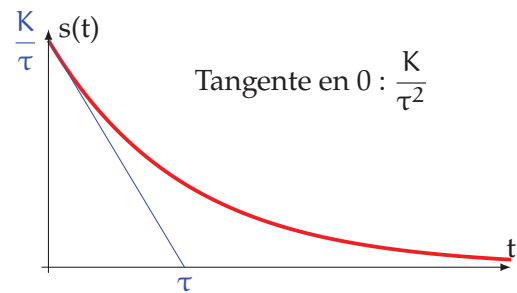


FIGURE 5.2 – Réponse à une impulsion de Dirac

5.1.5 Réponse à une rampe

Réponse à une rampe $e(t) = a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ (figure 5.3) alors

$$S(p) = H_1(p) \cdot E(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{a}{p^2}$$

$$s(t) = K \cdot a \cdot \left(t - \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right)$$

L'asymptote de pente $K \cdot a$ coupe l'axe des abscisses en $(\tau, 0)$.

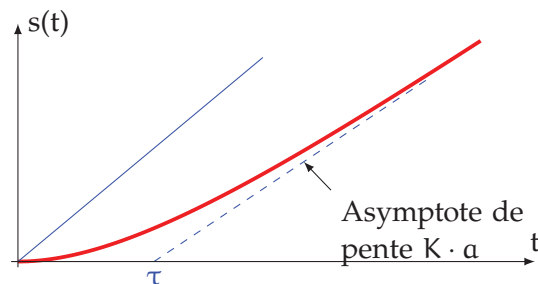


FIGURE 5.3 – Réponse à une rampe de pente a

5.2 Systèmes du 2^d ordre

5.2.1 Définition

Un système du second ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre :

$$a_2 \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = b_0 \cdot e(t)$$

Lorsque tous les coefficients sont de même signe, on préfère l'écrire sous sa forme canonique :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \omega_n > 0 : \text{pulsation propre, en rad s}^{-1} \\ \xi > 0 : \text{facteur d'amortissement, sans dimension} \\ K : \text{gain statique} \end{array}$$

Remarque : En physique, vous utiliserez une autre représentation canonique :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{1}{Q \cdot \omega_n} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \omega_n > 0 : \text{pulsation propre} \\ Q = \frac{1}{2 \cdot \xi} : \text{facteur de qualité, sans dimension} \\ K : \text{gain statique} \end{array}$$

5.2.2 Fonction de transfert

On pose : $e(t) \xrightarrow{L} E(p)$ et $s(t) \xrightarrow{L} S(p)$. On se place dans les conditions de Heaviside.

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{\omega_n^2} \cdot S(p) + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p \cdot S(p) + S(p) &= K \cdot E(p) \\ \left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + 1 \right) \cdot S(p) &= K \cdot E(p) \end{aligned}$$

On en déduit la fonction de transfert sous sa forme canonique et le schéma-bloc d'un système du second ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \quad \begin{array}{c} E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}} \longrightarrow S(p) \end{array}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert admet soit des racines réelles, soit une racine réelle double, soit deux racines complexes conjuguées.

$$\Delta = \frac{4 \cdot \xi^2}{\omega_n^2} - \frac{4}{\omega_n^2} = \frac{4}{\omega_n^2} \cdot (\xi^2 - 1)$$

On constate que le signe de Δ ne dépend que de ξ :

Cas $\xi > 1$ alors $\Delta > 0$: le dénominateur admet alors deux racines réelles,

$$r_1 = \omega_n \cdot \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \quad \text{et} \quad r_2 = \omega_n \cdot \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

On pose :

$$\tau_1 = -\frac{1}{r_1} = -\frac{1}{\omega_n \cdot (-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \quad \text{et} \quad \tau_2 = -\frac{1}{r_2} = -\frac{1}{\omega_n \cdot (-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

soit :

$$\xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2 \cdot \sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2}} \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2}}$$

Il est alors préférable d'écrire la fonction de transfert sous la forme d'un produit de deux fonctions du premier ordre :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

Cas $\xi = 1$ alors $\Delta = 0$: le dénominateur admet alors une racine réelle double,

$$r = -\omega_n$$

La fonction de transfert peut alors se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{\omega_n}\right)^2} = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)^2}$$

Cas $0 < \xi < 1$ alors $\Delta < 0$: le dénominateur admet alors deux racines complexes conjuguées.

$$r_1 = \omega_n \cdot (-\xi - j \cdot \sqrt{1 - \xi^2}) \quad \text{et} \quad r_2 = \omega_n \cdot (-\xi + j \cdot \sqrt{1 - \xi^2})$$

Il est d'usage de laisser la fonction de transfert dans ce cas, sous la forme d'un polynôme du second degré afin de ne pas faire apparaître les termes imaginaires :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

5.2.3 Réponse temporelle à une entrée en échelon

L'allure de la réponse temporelle va donc dépendre du coefficient d'amortissement ξ .

Soit $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside alors :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{E_0}{p}$$

On considère que $\xi > 0$ et $\omega_n > 0$.

Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{E_0}{p} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K \cdot E_0$$

La valeur finale ne dépend que du gain statique K et de l'amplitude de l'échelon.

Valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{E_0}{p} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$$

Tangente à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p^2 \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{E_0}{p} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}(t) = 0$$

La courbe de réponse pour une entrée en échelon débute en 0, avec une tangente horizontale.

Les valeurs initiale et finale ne dépendent pas de ξ ni de ω_n si $\xi > 0$ et $\omega_n > 0$.

L'allure de la réponse temporelle dépend par contre de la nature des racines du dénominateur de la fonction de transfert et de la nature des racines réelles ou complexes du dénominateur.

a) Cas $\xi > 1$: deux racines réelles

La fonction de transfert a donc la forme suivante :

$$S(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{E_0}{p}$$

La décomposition en fraction simple s'écrit :

$$S(p) = K \cdot E_0 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot p} - \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 \cdot p} \right)$$

Du tableau des transformées inverses, on déduit :

$$s(t) = K \cdot E_0 \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \cdot \mathcal{H}(t) \right)$$

On constate sur la figure 5.5 l'influence de $\xi > 1$, plus $\xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2 \cdot \sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2}}$ est grand, plus le temps de réponse est important pour ω_n constant.

La tangente à l'origine est horizontale et la réponse ne présente pas d'oscillation.

b) cas $z = 1$: une racine double

$$S(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

Décomposition en fraction simple :

$$S(p) = K \cdot E_0 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{(1 + \tau \cdot p)^2} - \frac{\tau}{(1 + \tau \cdot p)} \right)$$

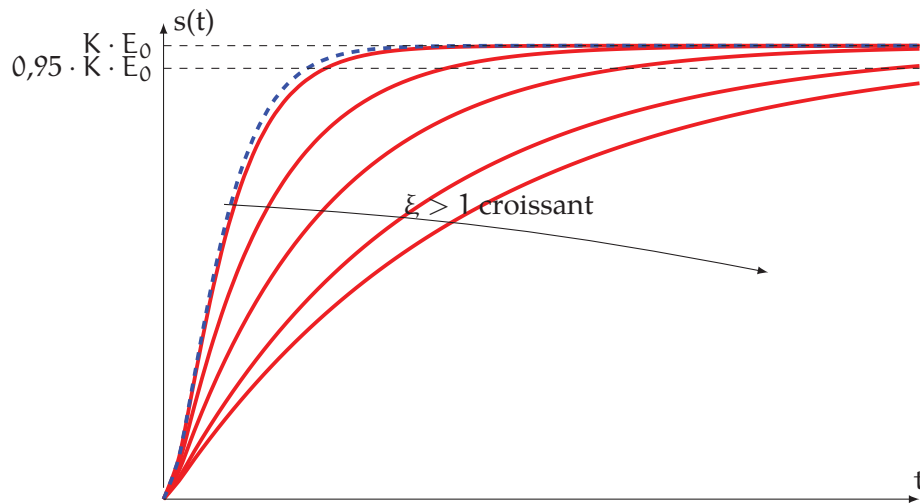


FIGURE 5.4 – Réponse temporelle d'un second ordre pour $\xi > 1$ à une entrée en échelon (tracés continus) et $\xi = 1$ (tracé en pointillé)

D'où la réponse temporelle :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - \frac{t + \tau}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot \mathcal{H}(t)$$

en revenant à ξ et ω_n , la réponse temporelle s'écrit :

$$s(t) = K \cdot (1 - (1 + \omega_n \cdot t) \cdot e^{-\omega_n \cdot t}) \cdot \mathcal{H}(t)$$

c) Cas $0 < \xi < 1$: deux racines complexes conjuguées

$$S(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{E_0}{p}$$

La réponse temporelle s'écrit alors :

$$s(t) = K \cdot E_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-z \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \varphi) \right) \cdot \mathcal{H}(t) \quad \text{avec} \quad \varphi = \arccos \xi$$

On pose en général ω_p la pseudo pulsation avec

$$\omega_p = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

La réponse temporelle devient :

$$s(t) = K \cdot E_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-z \omega_n t} \cdot \sin(\omega_p \cdot t + \varphi) \right) \cdot \mathcal{H}(t)$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$s(t) = K \cdot E_0 \left(1 - \left(\cos(\omega_p \cdot t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin(\omega_p \cdot t) \right) \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \right) \cdot \mathcal{H}(t)$$

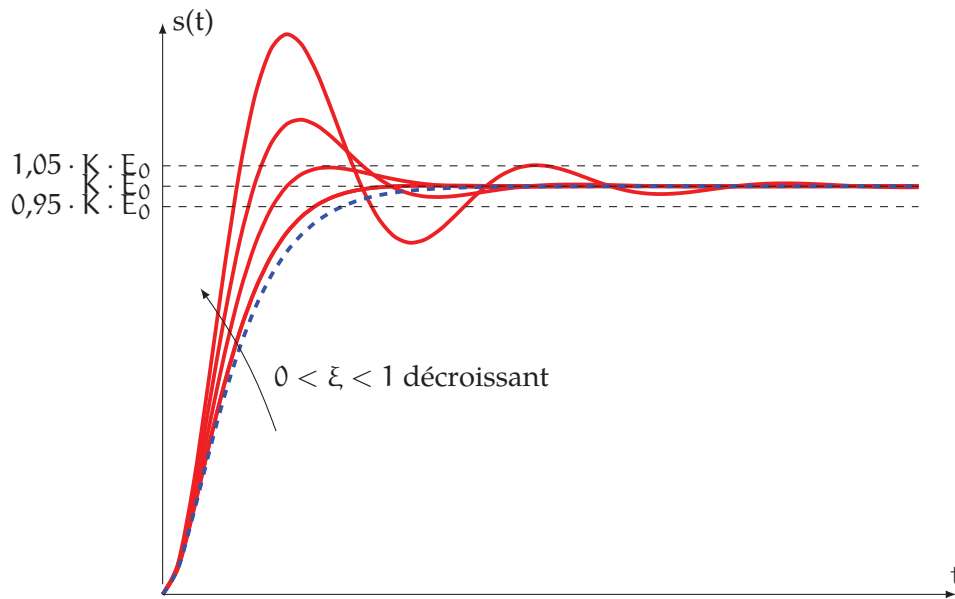


FIGURE 5.5 – Réponse temporelle d'un second ordre pour $0 < \xi < 1$ à une entrée en échelon (tracés continus) et $\xi = 1$ (tracé en pointillé)

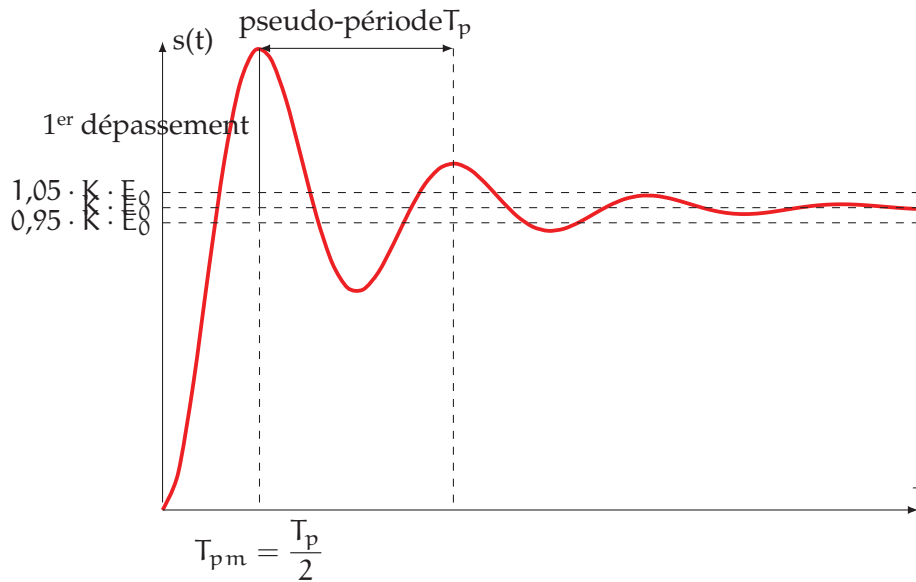


FIGURE 5.6 – Réponse temporelle d'un second ordre pour $0 < \xi < 1$ à une entrée en échelon

Les caractéristiques de cette réponse temporelle pseudo oscillatoire sont :

- La pseudo-période : $T_p = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$.
- La pseudo-pulsation : $\omega_p = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$.
- L'instant du premier maximum : $T_{pm} = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$.
- L'amplitude relative du premier dépassement : $D_{1\%} = e^{\frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$.

Dépassements L'amplitude des dépassements augmente d'autant plus fortement que le coefficient d'amortissement ξ diminue. Le nombre d'oscillation augmente lui aussi avec la diminution de ξ . L'abaque page suivante (figure 5.7) permet de déterminer l'amplitude relative de chaque dépassement en fonction du coefficient d'amortissement.

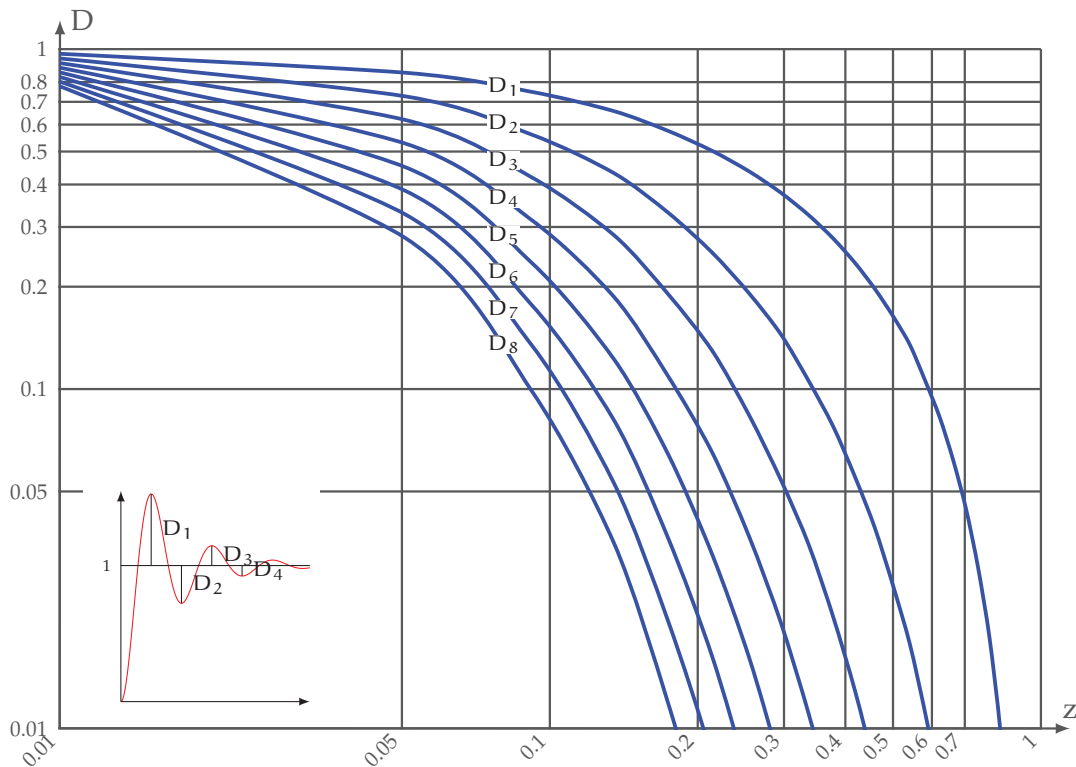


FIGURE 5.7 – Abaque des dépassements

Temps de réponse : Le temps de réponse à 5% évolue lui aussi de manière notable en fonction du coefficient d'amortissement ξ .

L'abaque de la figure 5.9 donne le temps de réponse à 5% (en fait $T_{5\%} \cdot \omega_n$) pour un système du second ordre.

On constate sur cette abaque deux parties :

- pour $\xi > 0,7$, le temps de réponse augmente lorsque ξ augmente;
- pour $\xi < 0,7$, le temps de réponse augmente lorsque ξ diminue.

Le temps de réponse est minimal pour $\xi \approx 0,7$. Le temps de réponse sans dépassement lui est minimal pour $\xi = 1$.

$$\xi = 0,7 \text{ est la solution de } D_{1\%} = e^{\frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,05.$$

La courbe réponse est alors tangente à la limite supérieure de détermination de $T_{5\%}$.

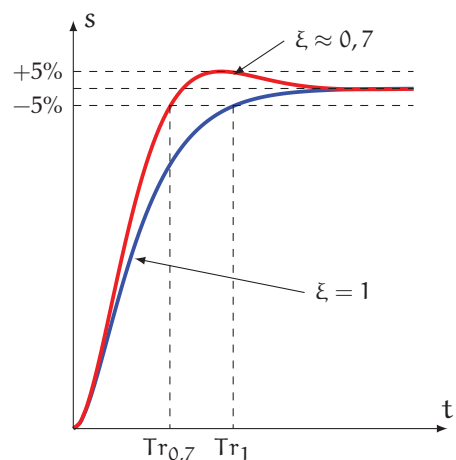


FIGURE 5.8 – Temps de réponse minimal

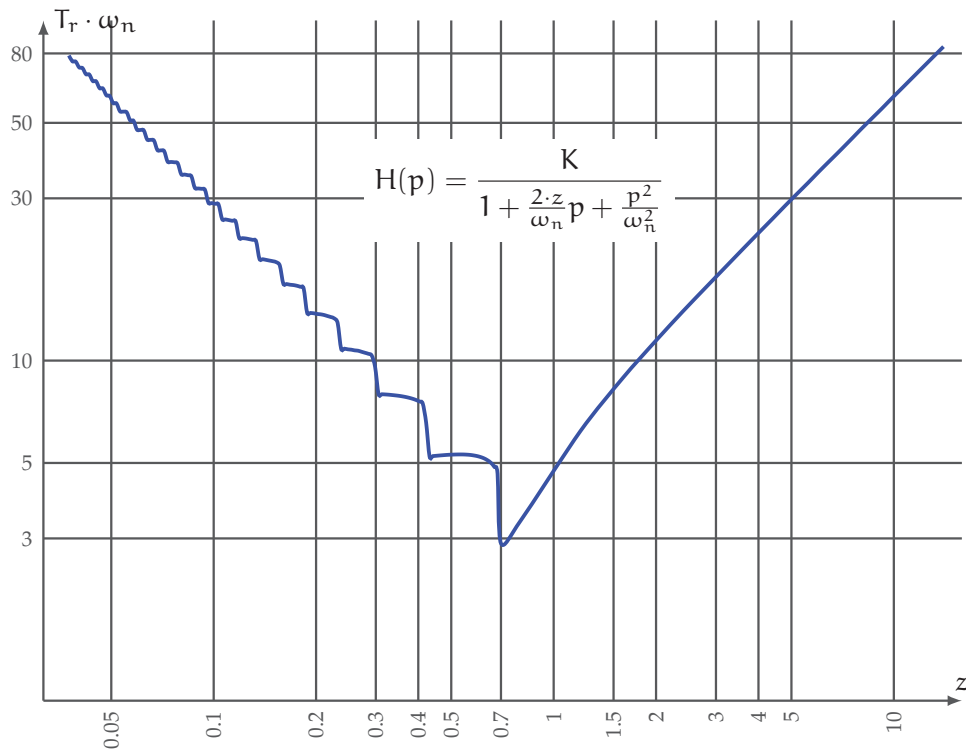


FIGURE 5.9 – Abaque des temps de réponse d'un second ordre

5.3 Intégrateur

On appelle système intégrateur, un système décrit par l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{ds(t)}{dt} = K \cdot e(t)$$

$$s(t) = \int_0^{+\infty} K \cdot e(u) du$$

La sortie est l'intégrale de l'entrée.

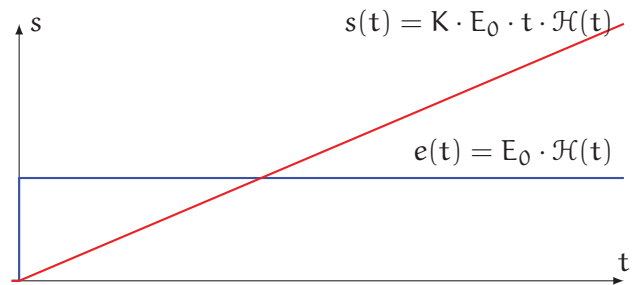
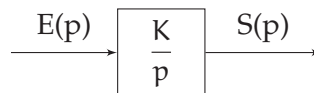


FIGURE 5.10 – Réponse temporelle d'un intégrateur

Dans les conditions de Heaviside :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$



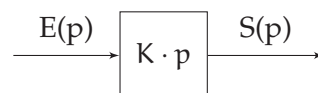
5.4 Dérivateur

On appelle système dérivateur, un système décrit par l'équation différentielle du premier ordre :

$$s(t) = K \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

Dans les conditions de Heaviside :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \cdot p$$



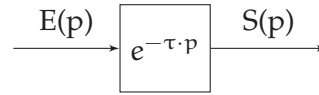
5.5 Retard

On appelle système retard, un système décrit par l'équation différentielle :

$$s(t) = e(t - \tau)$$

Dans les conditions de Heaviside :

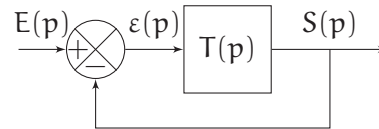
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = e^{-\tau \cdot p}$$



5.6 Influence de la boucle fermée

On se propose dans cette partie d'évaluer l'influence du bouclage sur les caractéristiques temporelles des systèmes du premier et du second ordre.

Soit un système bouclé à retour unitaire défini par le schéma-bloc ci-contre :



La formule de Black, nous permet de déterminer rapidement la fonction de transfert en boucle fermée :

$$BF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

5.6.1 1^{er} ordre

$$T(p) = \frac{K_o}{1 + \tau_o \cdot p}$$

avec K_o le gain en boucle ouverte et τ_o la constante de temps en boucle ouverte.

Alors

$$BF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{K_o}{1 + \tau_o \cdot p}}{1 + \frac{K_o}{1 + \tau_o \cdot p}} = \frac{K_o}{1 + K_o + \tau_o \cdot p}$$

$$BF(p) = \frac{\frac{K_o}{1 + K_o}}{1 + \frac{\tau_o}{1 + K_o} \cdot p}$$

On constate qu'un système du premier ordre bouclé est aussi un système du premier ordre avec les caractéristiques suivantes :

- gain en boucle fermée : $K_f = \frac{K_o}{1 + K_o}$
- constante de temps en boucle fermée : $\tau_f = \frac{\tau_o}{1 + K_o}$

Le système bouclé est toujours plus rapide que le système en boucle ouverte, et d'autant plus rapide que le gain en boucle ouverte est important et le gain tend vers 1 si $K_o \rightarrow \infty$

Pour une entrée en échelon $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$, la sortie tend vers

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{K_f}{1 + \tau_f \cdot p} \cdot \frac{E_0}{p} \right) = K_f \cdot E_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \frac{K_o}{1 + K_o} \cdot E_0$$

et l'erreur indicielle ε_i

$$\varepsilon_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot (E(p) - S(p)))$$

$$\varepsilon_i = \left(1 - \frac{K_o}{1 + K_o} \right) \cdot E_0 = \frac{1}{1 + K_o} \cdot E_0$$

La précision du système s'améliore donc lorsque $K_o \rightarrow \infty$.

5.6.2 2^d ordre

$$T(p) = \frac{K_o}{1 + \frac{2 \cdot \xi_o}{\omega_{n0}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{n0}^2}}$$

avec K_o le gain en boucle ouverte, ξ_o le coefficient d'amortissement en boucle ouverte et ω_{n0} la pulsation propre.

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit sous sa forme canonique :

$$BF(p) = \frac{\frac{K_o}{1 + K_o}}{1 + \frac{2\xi_o}{(1 + K_o) \cdot \omega_{n0}} \cdot p + \frac{p^2}{(1 + K_o) \cdot \omega_{n0}^2}}$$

Le bouclage ne change pas l'ordre du système.

Par identification, on obtient les caractéristiques du second ordre en boucle fermée :

- gain statique en boucle fermée : $K_f = \frac{K_o}{1 + K_o}$
- pulsation propre en boucle fermée : $\omega_{nf} = \omega_{n0} \cdot \sqrt{1 + K_o} > \omega_{n0}$
- coefficient d'amortissement en boucle fermée : $\xi_f = \frac{\xi_o}{\sqrt{1 + K_o}} < \xi_o$

Comme pour le système du premier ordre, le gain statique tend vers 1 lorsque K_o augmente.

On constate aussi que le facteur d'amortissement diminue et que la pulsation propre augmente. Cela implique qu'un système qui n'était pas oscillant en boucle ouverte peut le devenir en boucle fermée et s'il était oscillant, l'amplitude des oscillations et leur fréquence augmentent.

En conclusion, le bouclage d'un système modifie ses caractéristiques, il permet d'améliorer la rapidité et la précision mais peut rendre le système instable.

5.7 Systèmes complexes

5.7.1 Systèmes d'ordre supérieur à 2

Soit

$$H(p) = \frac{K}{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n}$$

Un système d'ordre élevé comporte un grand nombre de paramètres et étudier ses réponses temporelles peut se révéler fastidieux.

L'objectif est de pouvoir déterminer le comportement d'un système en fonction de ses réponses temporelles tout en considérant un nombre restreint de paramètres en le ramenant à un système relativement simple.

Un système d'ordre élevé comporte un grand nombre de pôles (réels ou complexes conjugués) et tous ne possèdent pas la même influence sur les réponses temporelles.

Soit une fonction de transfert d'ordre supérieur à 2.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{(1+p) \cdot \left(1 + \frac{p}{6}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{20}\right)}$$

la réponse temporelle s'écrit

$$s(t) = 1 - \frac{25}{19} \cdot e^{-t} - \frac{1}{57} \cdot e^{-20 \cdot t} + \frac{1}{3} \cdot e^{-5 \cdot t}$$

Dans cette réponse temporelle, tous les éléments non pas le même poids, le terme $e^{20 \cdot t}$ tend beaucoup plus rapidement vers zéro que e^{-t} et $e^{-5 \cdot t}$, il peut donc être négligé par rapport aux deux autres.

Sur la figure 5.11 on a tracé les réponses temporelles pour un échelon unitaire des fonctions de transfert

$$H_2(p) = \frac{1}{(1+p) \cdot \left(1 + \frac{p}{6}\right)} \text{ et } H_1(p) = \frac{1}{(1+p)}$$

on remarque qu'il n'y a peu de différence en régime permanent. Par contre l'erreur peut être notable au début.

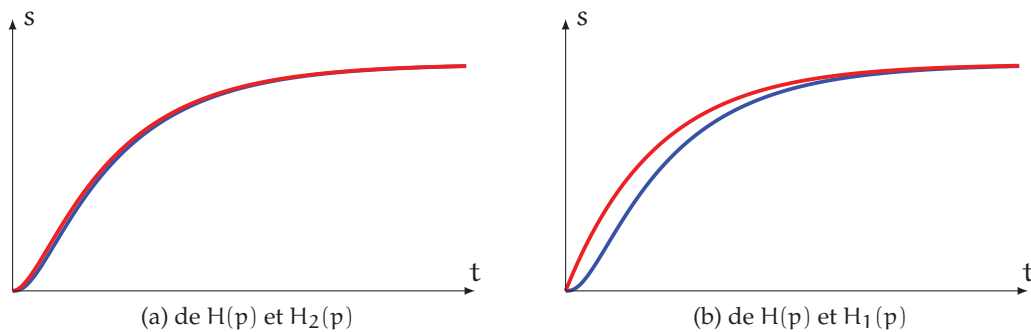


FIGURE 5.11 – Comparaison des réponses temporelles

On peut déduire de cet exemple.

- Un système d'ordre élevé possède, la plupart du temps, 1 ou 2 pôles dominants et se « comporte » donc comme un système du premier ou du deuxième ordre.
- On peut simplifier la fonction de transfert d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le (ou les) pôle(s) dominant(s) (approximation par un système du premier ou du deuxième ordre).
- En pratique, un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 à 4 fois supérieur au précédent

Cet exemple ne traite que de la simplification d'un système non oscillatoire mais les conclusions sont généralisables aux systèmes avec un comportement oscillatoire amorti.

5.7.2 Influence d'un zéro

Soit la fonction de transfert possédant un zéro² réel :

$$H(p) = K \cdot \frac{1 + a \cdot p}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2}$$

Cette fonction peut s'écrire :

$$H(p) = K \cdot \left(\frac{1}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} + a \cdot \frac{p}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \right)$$

elle se construit donc comme la somme de deux fonctions de transfert : la fonction sans le numérateur à laquelle on ajoute la dérivée de cette fonction affectée du coefficient a .

La réponse temporelle à un échelon unitaire est donc :

$$S(p) = K \cdot \left(\frac{1}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p} + a \cdot \frac{p}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p} \right)$$

On pose $s_1(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p} \right)$, alors

$$s(t) = K \cdot \left(s_1(t) + a \cdot \frac{d s_1(t)}{dt} \right)$$

À partir du théorème de la valeur finale, on constate que le terme dérivé ne modifie pas la valeur finale.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot K \cdot \left(\frac{1}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p} + a \cdot \frac{p}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p} \right) \right) = K \end{aligned}$$

Le zéro a surtout un effet pendant le régime transitoire.

a) Cas d'un zéro négatif

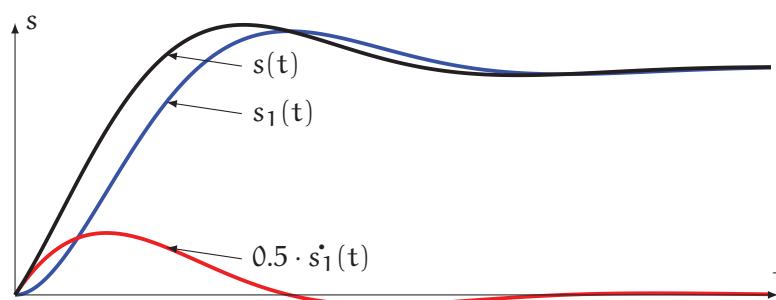


FIGURE 5.12 – Influence d'un zéro négatif

Sur la figure 5.12 on a tracé la réponse temporelle à un échelon de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1 + 0.5 \cdot p}{1 + p + p^2} = \frac{1}{1 + p + p^2} + \frac{0.5 \cdot p}{1 + p + p^2}$$

On retrouve la réponse temporelle $s(t) = s_1(t) + 0.5 \cdot s_1'(t)$.

2. Un zéro est une racine du numérateur.

On constate sur ce graphe que l'effet du numérateur avec un zéro négatif est d'accélérer la réponse temporelle mais aussi d'amplifier les dépassements.

b) as d'un zéro positif

Sur la figure 5.13 on a tracé la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1 - 0.5 \cdot p}{1 + p + p^2} = \frac{1}{1 + p + p^2} + \frac{0.5 \cdot p}{1 + p + p^2}$$

présentant un pôle positif.

On constate que la réponse temporelle $s(t)$ présente un « undershot » c'est-à-dire un dépassement vers le bas au démarrage.

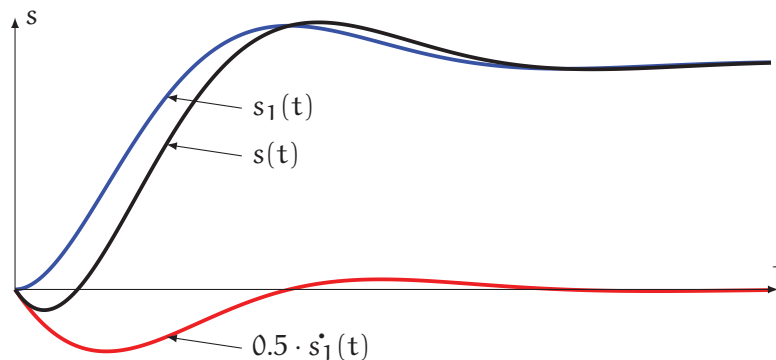


FIGURE 5.13 – Influence d'un zéro positif

5.7.3 Pôles positifs

Jusqu'ici, nous n'avons traité que le cas de pôles réels négatifs ou de pôles complexes à partie réelle négative. Quel est l'effet d'un pôle réel positif sur le comportement du système?

Soit

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p) \cdot (1 - \tau \cdot p)} \quad \text{avec } \tau > 0$$

Étudions la réponse temporelle à une échelon :

$$e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t).$$

$$S(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p) \cdot (1 - \tau \cdot p)} \cdot \frac{E_0}{p}$$

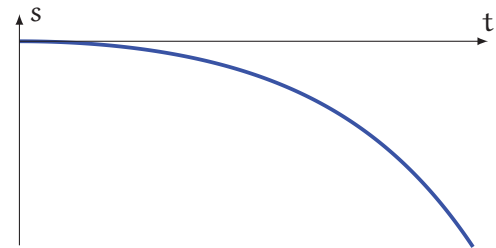


FIGURE 5.14 – Influence d'un pôle réel positif

d'où la décomposition en fractions simples :

$$S(p) = K \cdot E_0 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{2 \cdot (1 + \tau \cdot p)} + \frac{\tau}{2 \cdot (1 - \tau \cdot p)} \right)$$

et la réponse temporelle

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(e^{\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \mathcal{H}(t)$$

Cette fonction temporelle diverge (figure 5.14), elle tend $-\infty$.

De la même manière, un système possédant deux pôles complexes conjugués à partie réelle positive diverge aussi mais en oscillant. Le graphe 5.15 présente l'allure de la réponse temporelle à un échelon unitaire de :

$$H(p) = \frac{1}{1 - p + 10 \cdot p^2}$$

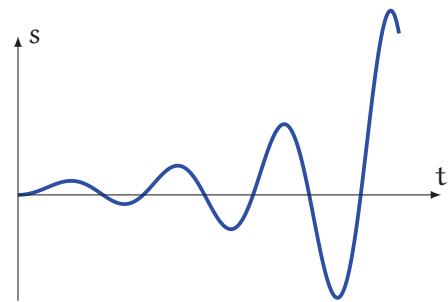


FIGURE 5.15 – Influence de pôles complexes conjugués à partie réelle positive]

5.7.4 Réponse temporelle et position des pôles

On peut regrouper les différents résultats sur la figure 5.16 sur laquelle est représentée la réponse impulsionnelle en fonction de la nature des pôles de la fonction de transfert.

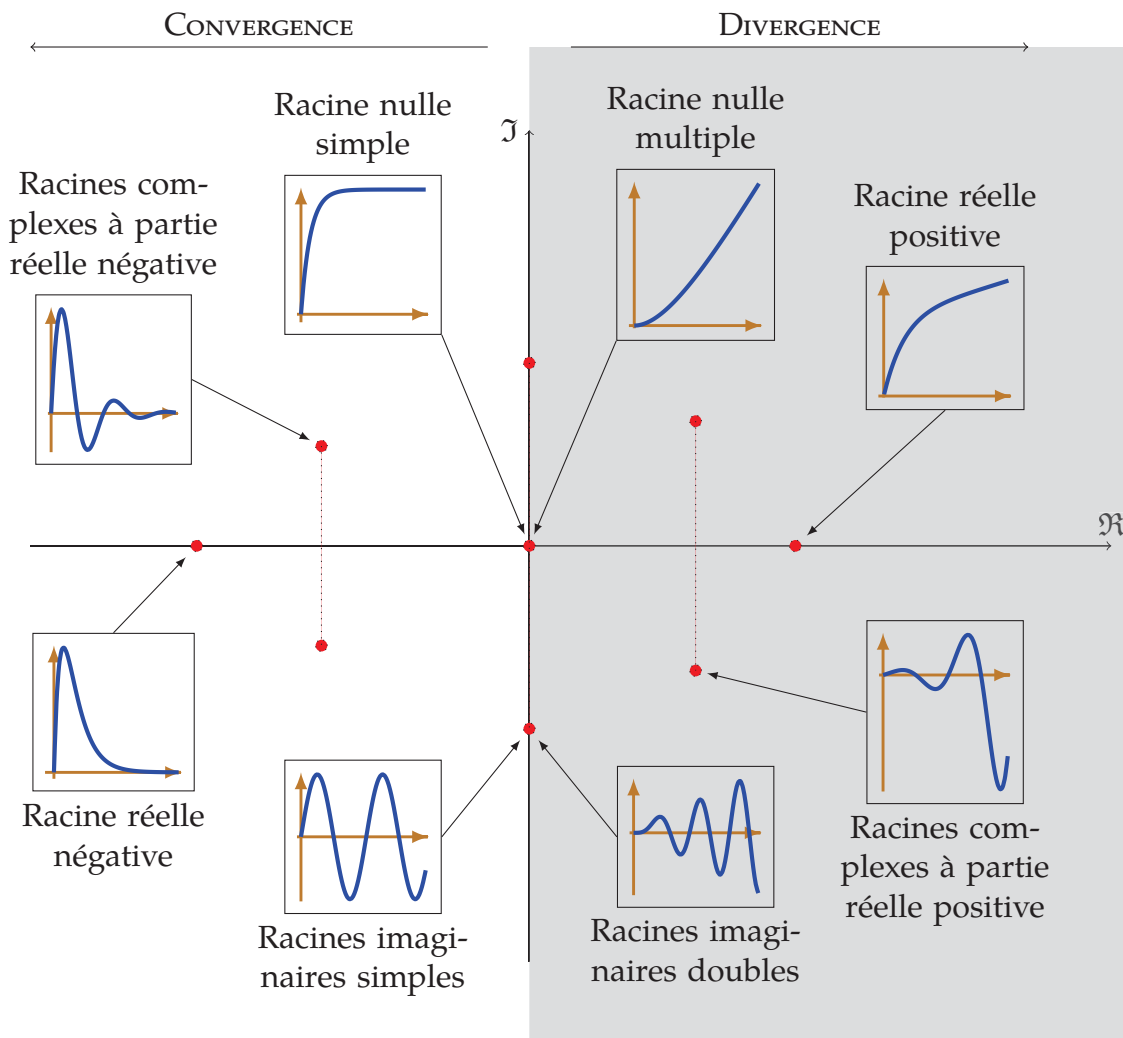


FIGURE 5.16 – Réponse temporelle en fonction de la position des pôles

Un critère important de réglage de fonction de transfert d'un système asservi est de s'assurer que tous les pôles de la fonctions de transfert en boucle fermée sont à partie réelle négative.

5.8 Feuille de travaux dirigés n°5

Exercice 13 - Réponse temporelle 1^{er} ordre

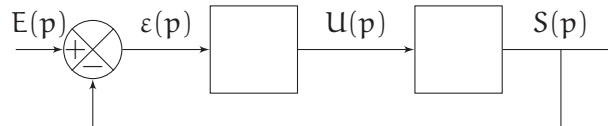
Corrigé page 120

Soit un système décrit par les équations différentielles :

$$\frac{ds(t)}{dt} + 10 \cdot s(t) = 3 \cdot u(t)$$

$$u(t) = K \cdot (e(t) - s(t))$$

Q1. Compléter le schéma-bloc.



Q2. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

Q2a. Mettre sous forme canonique

Q2b. Identifier les paramètres caractéristiques.

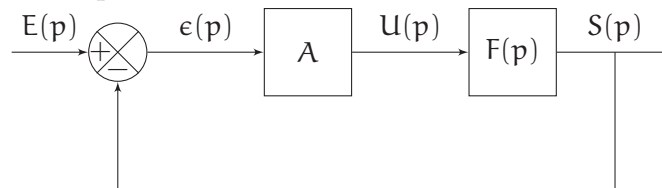
Q3. Déterminer K pour que l'erreur indicielle relative $\epsilon_{i\%}$ soit inférieure à 5%.

Q4. Tracer la réponse temporelle pour $e(t) = 2 \cdot \mathcal{H}(t)$, déterminer le temps de réponse à 5%.

Exercice 14 - Détermination fonction de transfert par identification

Corrigé page 120

Un système asservi est décrit par le schéma-bloc :



— Le gain A est un gain proportionnel réglé à $A = 10$.

— $F(p)$ est la fonction de transfert de l'actionneur du système. Cette fonction n'est pas connue.

Un essai à partir d'un échelon de consigne $e(t) = E_0 \mathcal{H}(t)$ avec $E_0 = 5$ a permis d'obtenir la réponse temporelle de la figure 5.17 sur le document réponse.

Cahier de charges : On souhaite obtenir une erreur indicielle relative inférieure à 3% et un temps de réponse à 5% inférieur à 0,08 s.

Q1. Déterminer à partir de la réponse temporelle, le temps de réponse à 5%, l'erreur indicielle relative, le dépassement. Conclure.

Compte tenu de l'allure de la réponse temporelle, on présume que $F(p)$ peut être modélisée par la fonction de transfert $F(p)$ avec :

$$F(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Q2. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $T(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ en fonction de K, τ et A
on pose :

$$T(p) = \frac{G}{1 + T \cdot p}$$

Q3. Déterminer G et T en fonction des différentes paramètres.

Q4. Sachant que $e(t) = E_0 \mathcal{H}(t)$ déterminer la transformée de Laplace $E(p)$ de $e(t)$, en déduire $S(p)$.

Q5. À partir du théorème de la valeur finale et de la représentation temporelle, déterminer G.

Q6. À partir du théorème de la valeur initiale et de la représentation temporelle, déterminer la tangente à l'origine de $s(t)$, en déduire T .

Q7. À partir de la table des transformées inverses, déterminer $s(t)$. Tracer $s(t)$ sur la courbe temporelle.

Q8. Sachant que $A = 10$, déterminer τ et K de $F(p)$.

Q9. Déterminer la valeur que doit prendre A pour respecter le cahier des charges.

Q10. Tracer la réponse temporelle correspondante sur la courbe.

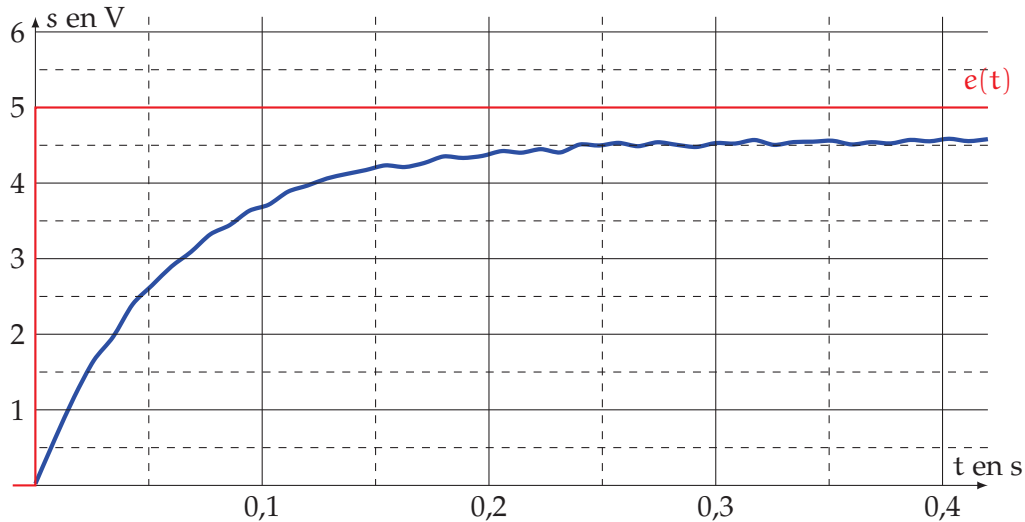


FIGURE 5.17 – Réponse temporelle du système

Exercice 15 - Système de distribution de barres

Adapté (fortement) de TPE 1997

Corrigé page 122

A. Présentation générale

Le dispositif étudié est un système de distribution automatique de barres. Son rôle est de stocker, séparer et distribuer en familles de pièces des barres ou des tubes entrant dans la fabrication de radiateurs de chauffage central. Ces barres ou tubes, de divers matériaux, sont de diamètre compris entre 10 mm et 60 mm et de longueur comprise entre 200 mm et 1 200 mm.

L'objet de l'étude est le module de chargement.

A.1. Module de chargement (figure 5.18a)

Les barres arrivent de l'unité de débit et sont consommées par l'unité de production de manière très irrégulière. De ce fait, le nombre de barres stockées dans le bac est très variable.

Le manipulateur qui transporte les barres depuis le bac jusque sur le module de transfert ne pouvant saisir les barres situées dans le bac qu'à une altitude fixe y_0 , il faut s'assurer que quelque soit le degré de remplissage du bac, les barres situées au-dessus soient constamment à la hauteur y_0 .

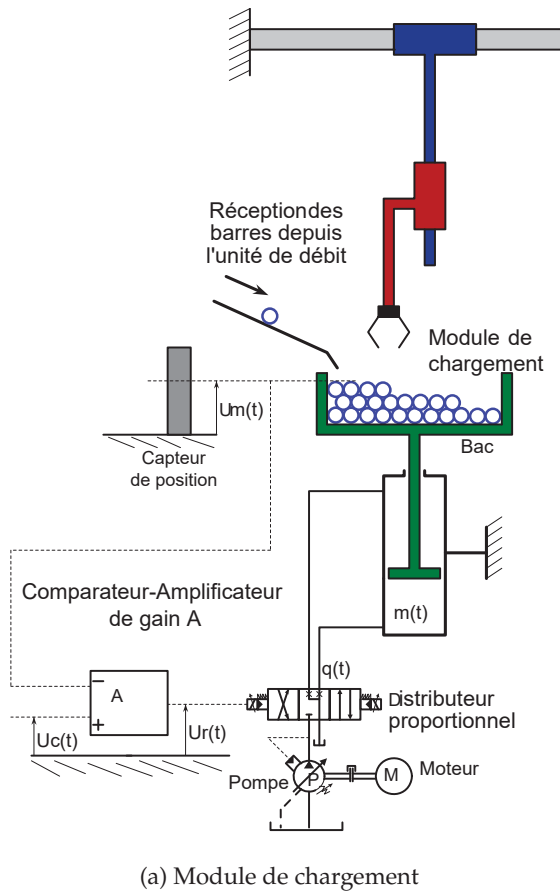
A.2. Exigences

Les principales exigences du poste de chargement sont résumées dans le tableau 5.18b.

A.3. Modélisation du module de chargement

Le système étudié est représenté schématiquement sur la figure 5.18a. L'altitude des barres dans le bac est asservie en position afin que le manipulateur puisse les saisir et les transporter sur le poste suivant.

Le mécanisme est constitué d'un vérin hydraulique qui assure le déplacement du bac contenant les barres, d'un distributeur hydraulique à commande proportionnelle qui module le débit hydraulique, d'un capteur analogique à ultra sons qui mesure la cote $y(t)$ de la barre la plus haute. La mesure, convertie à l'aide d'un convertisseur analogique numérique (CAN), est comparée avec la consigne de hauteur $y_c(t)$ par un calculateur. Un correcteur proportionnel programmé dans le calculateur permet



(a) Module de chargement

id	Désignation	Description
1.1	Précision	la mise en position doit être précise pour une entrée en échelon : $\varepsilon_i = 0$ avec $\varepsilon_i = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_c(t))$ l'erreur indicielle (réponse à un échelon)
1.2	Temps de réponse	le temps de réponse du système ne doit pas dépasser $T_{5\%} \leq 5 \text{ s}$
1.3	Oscillations	l'amplitude relative de la première oscillation ne doit pas dépasser $d_1 < 5\%$ avec $d_1 = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}}$ l'amplitude relative du premier dépassement

(b) tableau des exigences du module de chargement

FIGURE 5.18 – Descriptif du module de chargement

de déterminer la tension de commande envoyée au distributeur hydraulique au travers d'un convertisseur numérique analogique (CNA).

L'énergie hydraulique nécessaire au fonctionnement est fournie par une pompe hydraulique entraînée par un moteur électrique.

Q1. Compléter les chaînes d'énergie et d'information de la figure 5.19. Détailler si nécessaire les blocs, préciser la nature des informations (analogique, numérique), la nature de l'énergie (mécanique, hydraulique, électrique).

On note de manière générale, $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$. Ainsi, $Y(p)$ est la transformée de Laplace de $y(t)$. Les conditions initiales sont nulles.

L'ensemble formé du bac, de sa charge variable, de la tige et du piston du vérin est appelé "équipage mobile". Sa position notée $y(t)$ est fonction de la masse d'huile, notée $m(t)$, contenue dans la chambre d'admission du vérin. On fera l'hypothèse que la fonction de transfert de l'équipage mobile est de la forme :

$$H_m(p) = \frac{Y(p)}{M(p)} = \frac{K_m}{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}$$

$$q_m(t) = \frac{d m(t)}{dt}$$

avec : $a_1 = 0,7 \text{ s}$, $a_2 = 45,9 \times 10^{-3} \text{ s}^{-2}$ et $K_m = 2 \text{ m kg}^{-1}$

La pompe hydraulique à cylindrée auto-réglable alimente le distributeur proportionnel qui délivre un débit massique d'huile noté $q_m(t)$ proportionnel à sa tension de commande $u_r(t)$.

$$H_d(p) = \frac{Q_m(p)}{U_r(p)} = K_d = 0,2 \text{ kg s}^{-1} \text{ V}^{-1}$$

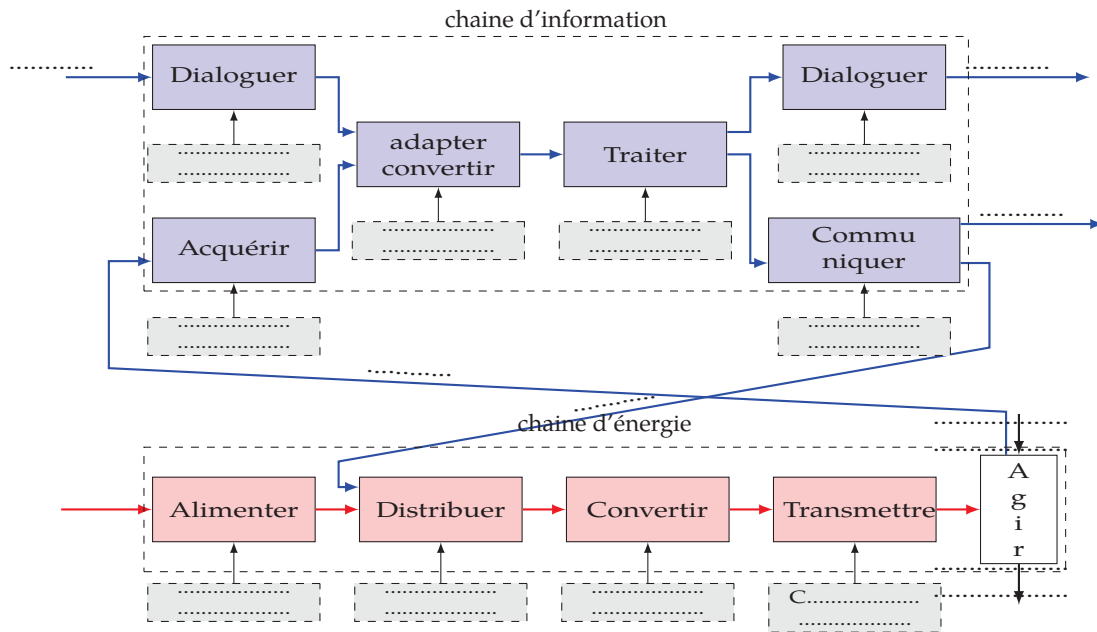


FIGURE 5.19 – Chaînes d'information et d'énergie

Le capteur de position délivre une tension notée $u_m(t)$ proportionnelle à l'altitude $y(t)$ des barres. Le signal d'écart $\varepsilon(t) = u_c(t) - u_m(t)$ est amplifié grâce à un amplificateur de gain A non connu avec $u_c(t)$ l'image de la consigne $y_c(t)$.

$$H_c(p) = \frac{U_m(p)}{Y(p)} = K_c = 10 \text{ V m}^{-1}$$

$$U_c(p) = G \cdot Y_c(p)$$

La modélisation de cet asservissement est représenté sur la figure 5.20 :

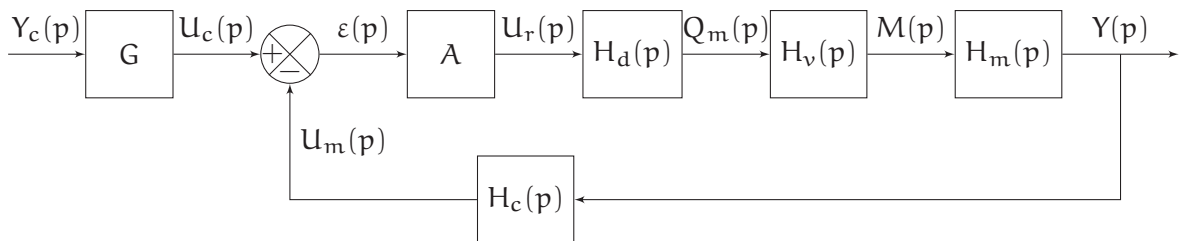


FIGURE 5.20 – Modélisation de l'asservissement de position

Q2. Justifier que $G = K_c$ et que $H_v(p) = \frac{1}{p}$

Q3. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)}$.

Q3a. Mettre $H_{BO}(p)$ sous la forme $H_{BO}(p) = \frac{K}{p \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$.

Q3b. Déterminer les expressions littérales de K , ξ , ω_0 , effectuer les applications numériques.

Q3c. Préciser l'ordre et la classe de la FTBO.

Q4. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)}$:

Q4a. Mettre sous la forme $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + b_3 \cdot p^3}$, effectuer les applications numériques.

Q4b. Préciser l'ordre et la classe de la FTBF.