

# Analyse fréquentielle des systèmes linéaires

## 6.1 De la réponse temporelle à la réponse fréquentielle

### 6.1.1 Réponse fréquentielle

On appelle réponse fréquentielle, la réponse temporelle du système linéaire décrit par une équation différentielle à coefficients constant pour une entrée sinusoïdale.

Nous allons sur un exemple simple montrer la relation qu'il existe entre la fonction de transfert dans le domaine de Laplace et la réponse temporelle en régime permanent d'un signal sinusoïdal. Soit l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t).$$

On se place dans les conditions de Heaviside et on détermine la réponse temporelle  $s(t)$  pour une entrée

$$e(t) = \cos(\omega \cdot t) \cdot h(t).$$

La solution de l'équation générale de cette équation différentielle est :

$$s_g(t) = G \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec  $G$  à déterminer en fonction des conditions initiales. La solution particulière est de la forme que  $e(t)$  :

$$s_p(t) = A \cdot \cos \omega \cdot t + B \cdot \sin \omega t.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\begin{aligned} -A \cdot \tau \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot t + B \cdot \tau \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot t + A \cdot \cos \omega \cdot t + B \cdot \sin \omega t &= K \cdot \cos \omega \cdot t \\ (-A \cdot \tau \cdot \omega + B) \cdot \sin \omega t + (B \cdot \tau \cdot \omega + A) \cdot \cos \omega \cdot t &= K \cdot \cos \omega \cdot t \end{aligned}$$

soit

$$\begin{cases} B \cdot \tau \cdot \omega + A = K \\ -A \cdot \tau \cdot \omega + B = 0 \end{cases}$$

On déduit

$$s_p(t) = K \left( \frac{1}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2} \cdot \cos \omega t + \frac{\tau \cdot \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2} \sin \omega t \right)$$

On pose  $\varphi$  tel que  $\sin \varphi = \frac{\tau \cdot \omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$  et  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$  d'où  $\varphi = \arctan(\tau \cdot \omega)$ .

$$s_p(t) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} (\cos \varphi \cdot \cos \omega t + \sin \varphi \cdot \sin \omega t)$$

$$s_p(t) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} \cdot (\omega \cdot t - \varphi)$$

La solution complète s'écrit donc :

$$s(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$$

On en déduit le comportement en régime permanent, c'est-à-dire lorsque  $t$  est suffisamment grand

$$s_{perm}(t) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$$

On en déduit :

- l'amplitude de  $s_{perm}(t)$  :  $\frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$
- le déphasage à l'origine  $\varphi(\omega) = \arctan(\tau \cdot \omega)$

### 6.1.2 De la transformée de Laplace à la réponse fréquentielle

À partir de l'équation différentielle du premier ordre on peut écrire la fonction de transfert  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On sait que la variable de Laplace  $p$  est un nombre complexe  $p = a + j \cdot b$ . On choisit pour  $p$  le domaine limité aux imaginaires purs soit  $p = j \cdot \omega$ .

Remplaçons  $p = j \cdot \omega$  dans  $H(p)$ .

$$H(j \cdot \omega) = \frac{S(j \cdot \omega)}{E(j \cdot \omega)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot j \cdot \omega}$$

$H(j \cdot \omega)$  est une fonction complexe dont on peut calculer le module et l'argument d'où

**Module :**

$$|H(j \cdot \omega)| = A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$$

**Argument**

$$\arg(H(j \cdot \omega)) = \Phi(\omega) = -\arctan(\tau \cdot \omega)$$

On reconnaît l'amplitude et le déphasage à l'origine de  $s_{perm}(t)$ .

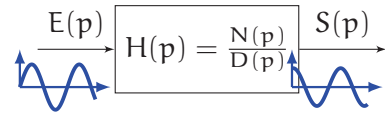
On peut donc, directement à partir de la fonction de transfert, retrouver les caractéristiques de la réponse en régime permanent d'un système sollicité avec une entrée sinusoïdale.

On appelle réponse fréquentielle d'un système la réponse temporelle en régime permanent d'un système linéaire sollicité par une entrée sinusoïdale.

## 6.2 Réponse fréquentielle

L'objectif de l'analyse fréquentielle est d'étudier le comportement d'un système à partir de sa réponse à une sollicitation sinusoïdale de la forme :

$$e(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \mathcal{H}(t)$$



avec  $\mathcal{H}(t)$ , la fonction Heaviside est définie par :  $\begin{cases} t \leq 0 & \mathcal{H}(t) = 0 \\ t \geq 0 & \mathcal{H}(t) = 1 \end{cases}$ .

On sollicite donc, le système avec une entrée sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et on relève la réponse temporelle de la sortie pour chacune des fréquences. La figure 6.1 présente quelques mesures.

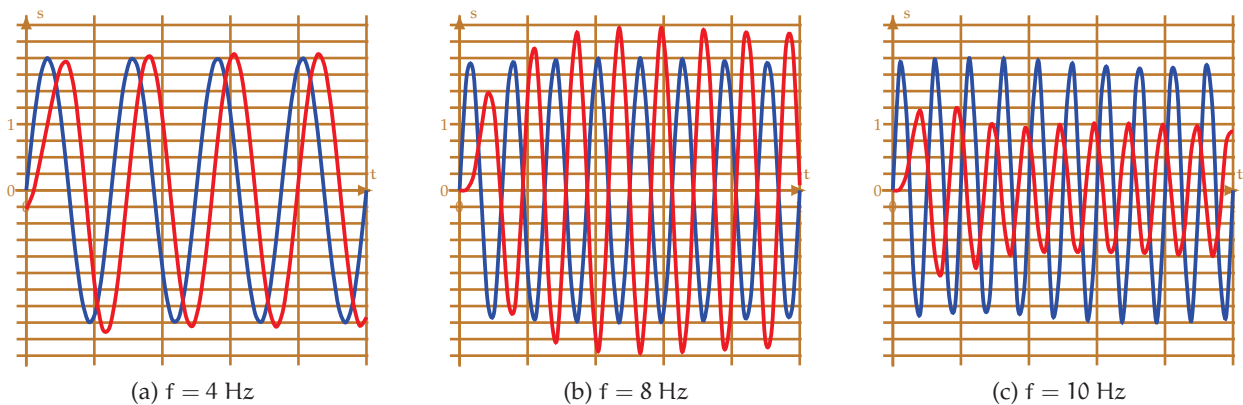


FIGURE 6.1 – Relevés fréquentiels

On remarque sur ces tracés :

- la présence de deux zones :
  - le régime transitoire (la phase de démarrage) ;
  - le régime permanent ou régime établi ;
- que le déphasage du régime permanent avec le signal d'entrée augmente avec la pulsation ;
- que l'amplitude de la sortie varie avec la pulsation.

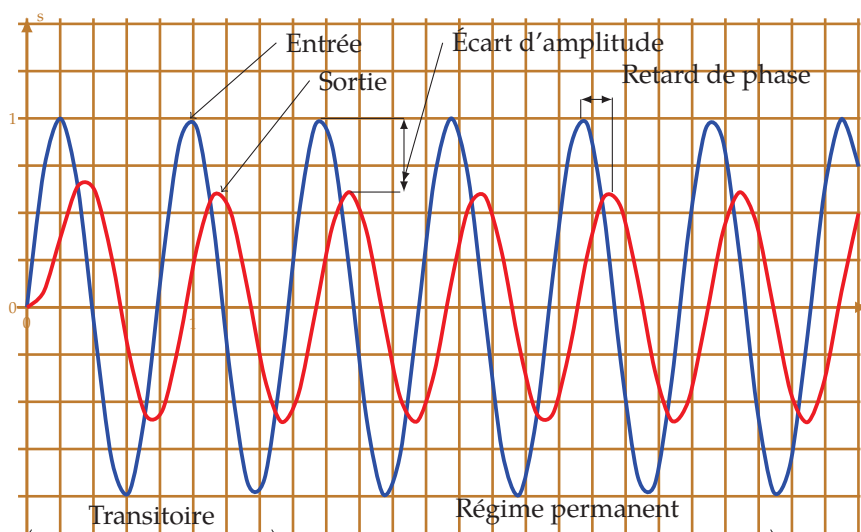


FIGURE 6.2 – Réponse fréquentielle

On constate que la réponse (pour le régime permanent) a l'allure d'une sinusoïde de même pulsation mais en retard par rapport au signal d'entrée.

Pour caractériser la réponse fréquentielle du système il est possible d'étudier l'évolution pour le régime permanent de la variation d'amplitude et du déphasage entre le signal d'entrée et la sortie (figure 6.2).

Pour un système linéaire, nous savons que la sortie en régime permanent est de même nature que l'entrée, l'équation temporelle du régime permanent de la sortie se met donc sous la forme :

$$s(t) = A_0 \cdot A(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi(\omega))$$

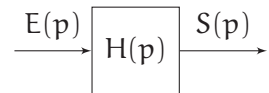
avec

- $A(\omega)$  : le rapport des amplitudes du signal permanent, entre l'entrée et la sortie;
- $\Phi(\omega)$  : le déphasage entre l'entrée et la sortie.

Ces deux fonctions sont des fonctions de la pulsation  $\omega$ .

### 6.2.1 Fonction de transfert complexe

Soit un système linéaire continu invariant (SLCI) connu par sa fonction de transfert dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert du système est par définition :  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$



On note  $E(p)$  et  $S(p)$  les transformées dans le domaine de Laplace des fonctions temporelles  $e(t)$  et  $s(t)$  et  $H(p)$  la fonction de transfert.

On appelle fonction de transfert complexe (ou **transmittance isochrone**) la fonction obtenue en remplaçant la variable de Laplace  $p$  par le terme imaginaire pur  $j \cdot \omega$  :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{S(j \cdot \omega)}{E(j \cdot \omega)}$$

Cette fonction est une fonction complexe de la variable  $\omega$ , comme toute fonction complexe, pour en réaliser l'étude, on peut soit s'intéresser :

- à la partie réelle et à la partie imaginaire,
- au module et à l'argument.

### 6.2.2 Lieux de transfert

On appelle lieux de transfert, le tracé des différentes représentations graphiques de la fonction de transfert  $H(j \cdot \omega)$ . Seule la représentation graphique des lieux de transfert par les diagrammes de **BODE** est au programme.

À partir de cette représentation graphique, nous pourrions caractériser le comportement global du système linéaire (passe bas, passe bande, résonance, ...).

## 6.3 Étude des SLCI à partir des diagrammes de Bode

### 6.3.1 Diagrammes de BODE

Les diagrammes de Bode représentent séparément le module et la phase de la fonction  $H(j \cdot \omega)$ . On note :

- $A(\omega) = |H(j \cdot \omega)|$  le module,
- $\Phi(\omega) = \arg(H(j \cdot \omega))$  l'argument

Pour ces diagrammes :

### 6.3 Étude des SLCI à partir des diagrammes de Bode

- l'abscisse est une échelle logarithmique de la pulsation :  $\log_{10}(\omega)$  ;
- l'ordonnée du diagramme d'amplitude est graduée en décibels (dB) :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10}(|H(j\omega)|),$$

- l'ordonnée du diagramme de phase, en degré ou radian.

On superpose en général au tracé exact le tracé asymptotique, celui-ci est souvent suffisant pour analyser la fonction. La figure 6.3 montre un exemple de tracé des diagrammes de Bode.

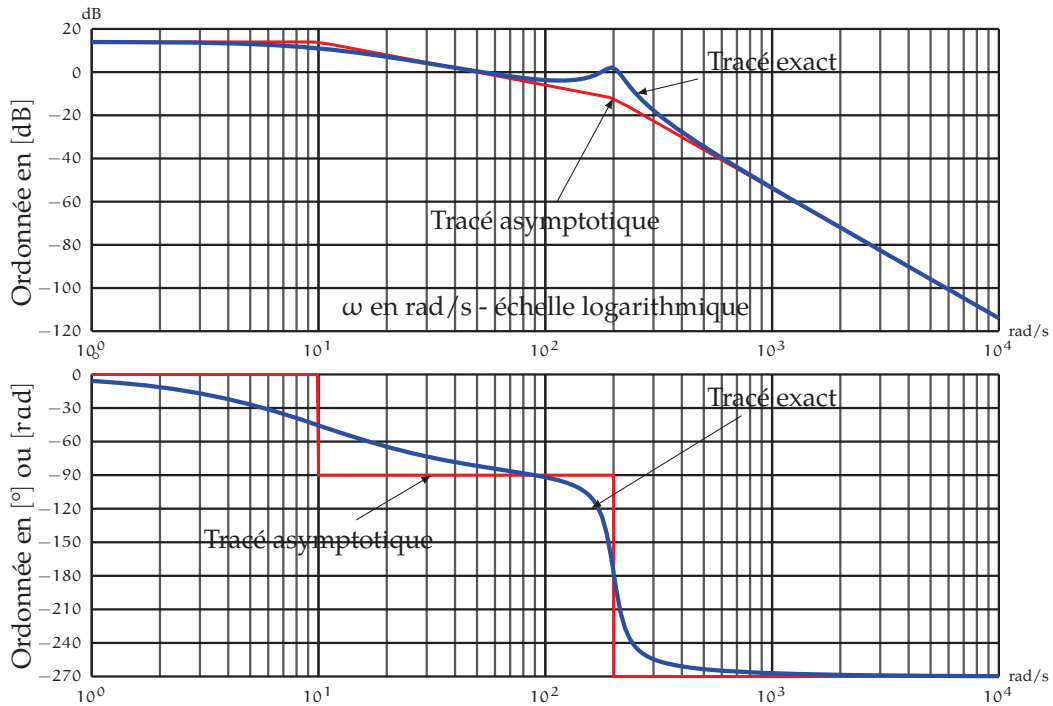
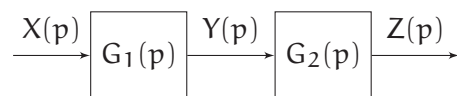


FIGURE 6.3 – Diagrammes de Bode

#### 6.3.2 Propriétés graphiques des diagrammes de Bode

Soit un système linéaire décrit par le schéma-bloc ci-contre :

$$G(p) = G_1(p) \cdot G_2(p)$$



Soit en complexe avec  $p = j \cdot \omega$

$$G(j \cdot \omega) = G_1(j \cdot \omega) \cdot G_2(j \cdot \omega)$$

d'où le module réel

$$|G(j \cdot \omega)| = |G_1(j \cdot \omega)| \cdot |G_2(j \cdot \omega)|$$

et le module en dB et puis l'argument

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log(|G_1(j \cdot \omega)|) + 20 \log(|G_2(j \cdot \omega)|) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$$

$$\arg(G(j \cdot \omega)) = \arg(G_1(j \cdot \omega)) + \arg(G_2(j \cdot \omega))$$

Le module en décibels et l'argument d'un produit de fonction de transfert s'obtient donc en ajoutant le module en décibels et l'argument des différentes fonctions.

Graphiquement, il suffit donc d'ajouter les diagrammes de Bode des fonctions  $G_1(j \cdot \omega)$  et  $G_2(j \cdot \omega)$  aussi bien pour le diagramme d'amplitude que pour le diagramme des phases pour obtenir les diagrammes de  $G(j \cdot \omega)$  avec  $G(p) = G_1(p) \cdot G_2(p)$ .

## 6.4 Système du premier ordre

Un système du premier ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \tau : \text{constante de temps} \\ K : \text{gain statique} \end{array}$$

On pose :  $e(t) \xrightarrow{L} E(p)$  et  $s(t) \xrightarrow{L} S(p)$ . On se place dans les conditions de Heaviside.  
Fonction de transfert et schéma-bloc d'un système du premier ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \quad \begin{array}{c} E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{1 + \tau \cdot p}} \longrightarrow S(p) \end{array}$$

### 6.4.1 Représentation fréquentielle

On obtient la fonction de transfert complexe en posant  $p = j \cdot \omega$  :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 + \tau \cdot j \cdot \omega}$$

On détermine rapidement :

— la partie réelle :

$$\operatorname{Re}(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$$

— le module :

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$$

— la partie imaginaire :

$$\operatorname{Im}(j \cdot \omega) = \frac{-K \cdot \tau \cdot \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$$

— l'argument :

$$\Phi(\omega) = -\arctan(\tau \cdot \omega)$$

— le module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log(A(\omega)) = 20 \cdot \log\left(\frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}\right)$$

soit en développant,

$$A_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)$$

La figure 6.4 présente l'allure des diagrammes de Bode d'un système du premier ordre.

**Diagramme d'amplitude** : le diagramme d'amplitude présente deux asymptotes

— une horizontale lorsque  $\omega \rightarrow 0$  :  $\lim_{\omega \rightarrow 0} (A_{dB}(\omega)) = 20 \cdot \log K$ ;

— une asymptote de pente  $-20\text{dB/dec}$  (décibel par décade) lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ;

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} (A_{dB}(\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} (20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} (20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(\tau^2 \cdot \omega^2)) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} (20 \cdot \log K - 20 \cdot \log(\tau) - 20 \cdot \log(\omega)) \end{aligned}$$

## 6.4 Système du premier ordre

L'amplitude en décibel  $A_{dB}(\omega)$  tend asymptotiquement vers  $20 \cdot \log K - 20 \cdot \log(\tau) - 20 \cdot \log(\omega)$  lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ .

L'abscisse évoluant en  $\log \omega$ , chaque fois que la pulsation augmente d'une décade ( $\times 10$ ) l'amplitude en décibels diminue de 20dB/dec.

- les asymptotes se croisent pour la pulsation de coupure  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ ;
- le diagramme asymptotique en amplitude est assez proche de la courbe réelle et suffit en général pour étudier la fonction;
  - pour la pulsation de coupure  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$  l'écart par rapport au point d'intersection des asymptotes est de  $-3\text{dB}$ ;

$$A_{dB}\left(\frac{1}{\tau}\right) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log\left(1 + \tau^2 \cdot \left(\frac{1}{\tau}\right)^2\right)$$

$$A_{dB}\left(\frac{1}{\tau}\right) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(2) = 20 \cdot \log K - 3 \text{ dB}$$

- pour les pulsations double  $2 \cdot \omega_c$  et moitié  $\frac{\omega_c}{2}$  l'écart est de  $-1\text{dB}$  par rapport aux asymptotes.

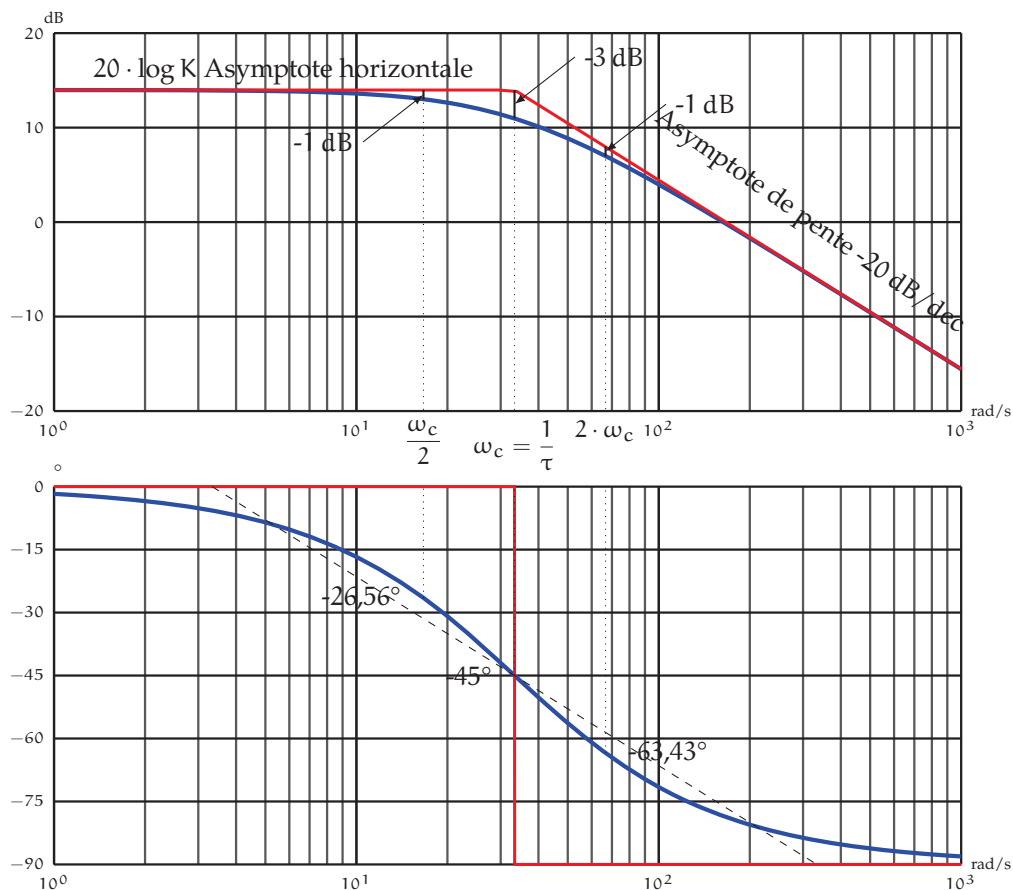


FIGURE 6.4 – Diagrammes de Bode - Système du 1<sup>er</sup> ordre

**Diagramme de phase :** le diagramme des phases présente lui aussi deux asymptotes

- lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} (\Phi(\omega)) = 0$ ;
- lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\Phi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} (= -90^\circ)$ .
- Le diagramme asymptotique à la forme d'une marche d'escalier, il n'est pas suffisamment précis pour représenter correctement l'évolution de la phase. Pour mieux approcher le tracé, il est possible de tracer le segment passant par les points  $(\log(\frac{1}{10\tau}), 0)$  et

$(\log(\frac{10}{\tau}), -90)$  (en pointillés sur le graphe, attention ce n'est pas une tangente mais uniquement une aide de tracé!).

— Quelques valeurs particulières de l'argument :

— pulsation de cassure :  $\Phi(\omega_c) = -45^\circ$

— pulsation moitié :  $\Phi(\frac{\omega_c}{2}) = -\arctan(\tau \cdot \frac{\omega_c}{2}) \approx -26,56^\circ$

— pulsation double :  $\Phi(2 \cdot \omega_c) = -\arctan(\tau \cdot 2 \cdot \omega_c) \approx -63,43^\circ$

## 6.4.2 Premier ordre au numérateur

Soit la fonction définie par le polynôme du premier degré :

$$N_1(p) = (1 + \tau \cdot p).$$

On se propose de comparer ce polynôme à la fonction de transfert du premier ordre :

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p}.$$

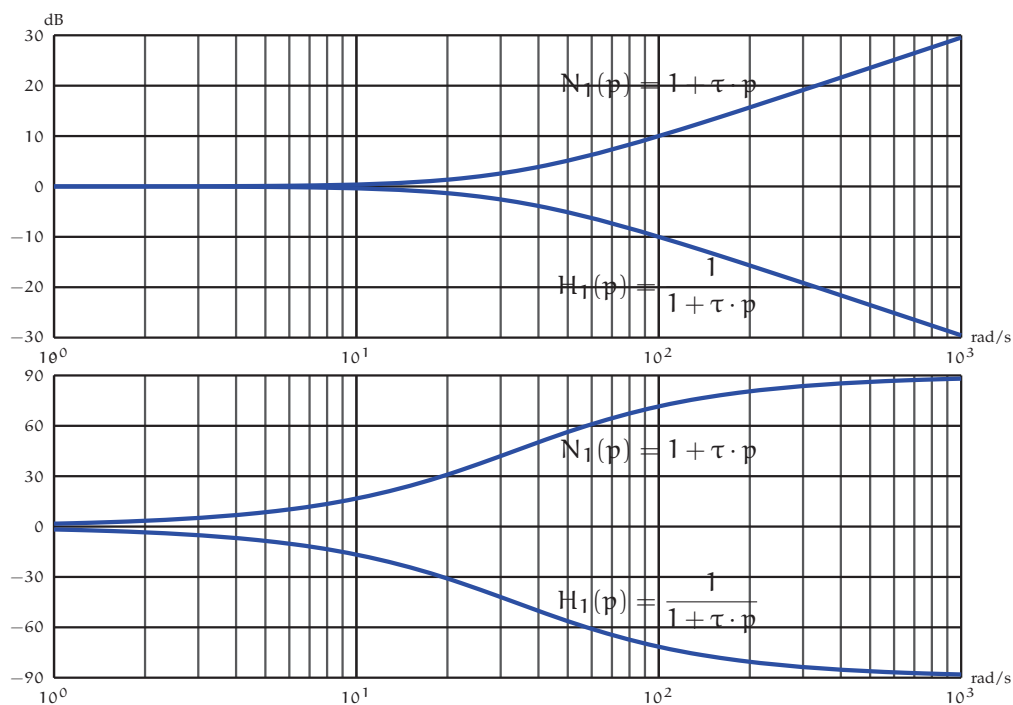


FIGURE 6.5 – Diagrammes de Bode - 1<sup>er</sup> ordre au numérateur

— Le module se déduit directement de  $|N_1(j \cdot \omega)| = \left| \frac{1}{H_1(j \cdot \omega)} \right|$ ,  
soit en décibel

$$20 \log(|N_1(j \cdot \omega)|) = 20 \log\left(\left| \frac{1}{H_1(j \cdot \omega)} \right|\right) = -20 \log(|H_1(j \cdot \omega)|)$$

— L'argument se déduit de la même manière

$$\arg(N_1(j \cdot \omega)) = \arg\left(\frac{1}{H_1(j \cdot \omega)}\right) = -\arg(H_1(j \cdot \omega))$$



On constate donc que le tracé (fig. 6.5) des diagrammes de Bode d'un polynôme du premier ordre est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du diagramme de Bode d'une fonction de transfert du premier ordre (pour un gain unitaire  $K = 1$ ). Cela est généralisable quel que soit l'ordre de la fonction de transfert.

## 6.5 Système du second ordre

### 6.5.1 Rappels

Un système du second ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

avec

- $K$  : gain
- $\omega_n$  : pulsation propre  $\text{rad s}^{-1}$
- $\xi$  : coefficient (facteur) d'amortissement

La fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + 1}$$

### 6.5.2 Représentation fréquentielle

À partir de la fonction de transfert d'un second ordre on détermine la fonction de transfert complexe :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \cdot 2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}$$

On déduit :

- la partie réelle :

$$\text{Re}(\omega) = \frac{K \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

- la partie imaginaire :

$$\text{Im}(\omega) = -\frac{2 \cdot K \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

- le module :

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

- le module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log K - 10 \log \left( \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right)$$

— l'argument :

$$\Phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Nous avons vu, lors de l'étude de la réponse temporelle, que l'allure de cette réponse dépend du coefficient d'amortissement  $\xi$ . Étudions donc dans un premier temps le module et l'influence de  $\xi$  sur celui-ci.

Soit  $A_1(u)$ , le module réduit déduit du module de la fonction de transfert, en posant  $u = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$A_1(u) = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot u)^2}}$$

Calculons la dérivée par rapport à  $u$  :

$$\frac{dA_1(u)}{du} = K \frac{d}{du} \left( (1-u^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot u)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = K \frac{4 \cdot u (u^2 + 2 \cdot \xi^2 - 1)}{\left( (1-u^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot u)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Le numérateur s'annule pour :

—  $u = 0$  soit  $\omega = 0$  cette racine correspond à une asymptote horizontale dans le diagramme de Bode en amplitude,

—  $u^2 + 2 \cdot \xi^2 - 1 = 0$ , cette équation n'admet de racines réelles que pour  $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , la racine est alors

$$u_r = \frac{\omega_r}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} \text{ soit } \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}.$$

On appelle **pulsation de résonance** la pulsation :

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}.$$

Pour cette pulsation, le module présente un maximum :

$$A(\omega_r) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{K}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

On définit  $Q_r$ , le **coefficient de résonance** (ou facteur de surtension) tel que

$$Q_r = \frac{A(\omega_r)}{A(\omega_0)} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Le tracé du module (fig. 6.6) d'un système du second ordre dépend donc de la valeur du coefficient d'amortissement.

—  $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$  : présence d'un maximum pour la pulsation de résonance  $\omega_r$  ;

—  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi$  : pas de maximum.

L'argument lui ne présente pas de maximum :

$$\Phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right).$$

Il est possible d'affiner encore cette étude, en étudiant la forme de la fonction de transfert en fonction de  $\xi$ . On distingue trois cas en fonction des racines du polynôme du dénominateur de la fonction de

transfert du second ordre :

$$D(p) = 1 + \frac{2 \cdot \xi \cdot p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2} = 0$$

—  $0 < \xi < 1$  : les deux racines du dénominateur sont complexes conjuguées, la fonction de transfert ne peut être simplifiée, l'étude a été réalisée précédemment :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} p + 1}$$

—  $\xi > 1$  : les deux racines sont réelles, la fonction de transfert alors peut se mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions du premier ordre :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

— module :

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T_1^2 \cdot \omega^2} \cdot \sqrt{1 + T_2^2 \cdot \omega^2}}$$

— module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log(\sqrt{1 + T_1^2 \cdot \omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + T_2^2 \cdot \omega^2})$$

— l'argument :

$$\Phi(\omega) = -\arctan(T_1 \cdot \omega) - \arctan(T_2 \cdot \omega)$$

—  $\xi = 1$  : le dénominateur possède une racine réelle double, la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T \cdot p)^2}$$

— module :

$$A(\omega) = \frac{K}{1 + T^2 \cdot \omega^2}$$

— module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log(1 + T^2 \cdot \omega^2)$$

— argument :

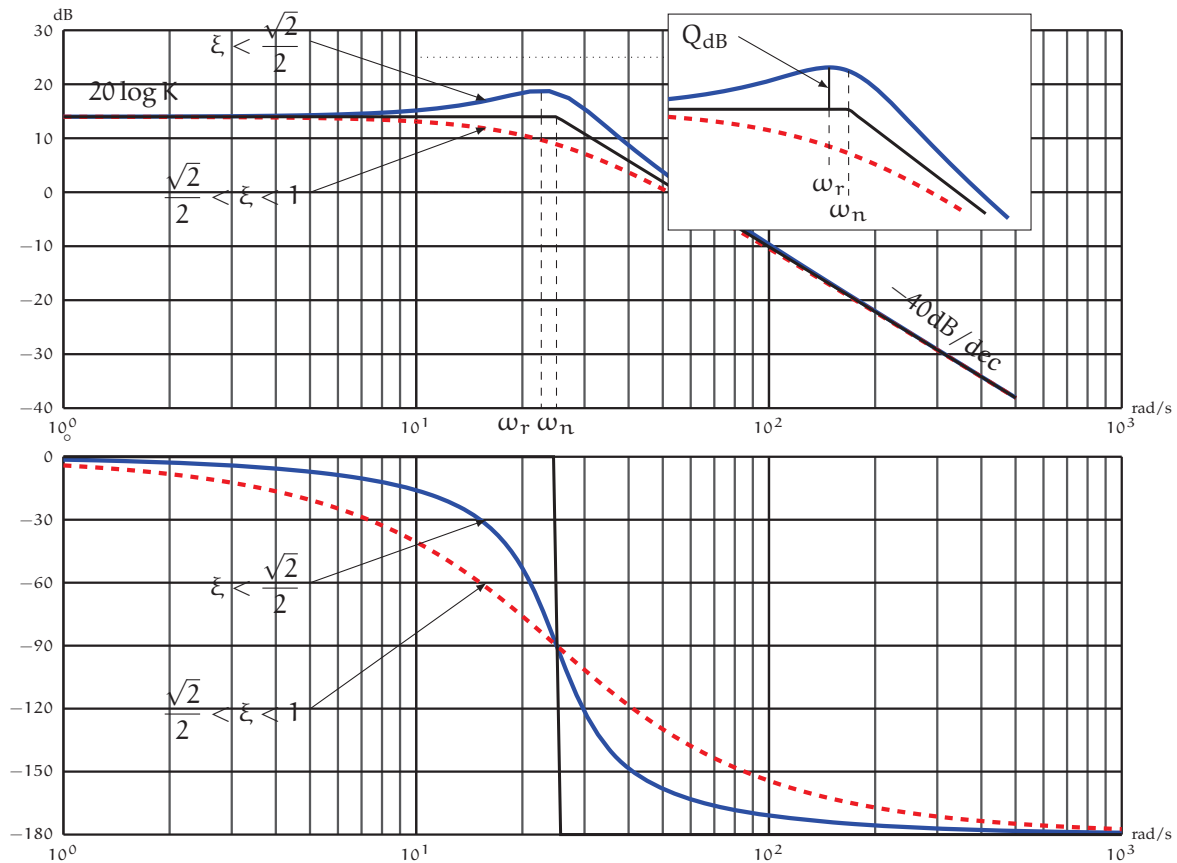
$$\Phi(\omega) = -2 \cdot \arctan(T \cdot \omega)$$

Nous allons donc considérer pour l'étude fréquentielle du second ordre, les quatre cas suivant :

### Cas $0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$ : 2 racines complexes conjuguées et résonance

La fonction de transfert s'écrit :  $H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \cdot 2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}$ . On déduit les diagrammes de

Bode de la figure 6.6.

FIGURE 6.6 – Diagrammes de Bode 2<sup>d</sup> ordre - 2 racines complexes**Diagramme d'amplitude :**

- une asymptote horizontale d'ordonnée  $20 \log K$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ;
- une asymptote de pente  $-40 \text{ dB/dec}$  lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$  : Lorsque  $\omega$  augmente d'une décade, l'amplitude en décibel diminue de 40 dB. Montrons que  $A_{\text{dB}}(\omega)$  tend asymptotiquement vers  $20 \log K + 40 \log(\omega_n) - 40 \log(\omega)$  lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} (A_{\text{dB}}(\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( 20 \log K - 10 \log \left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( 2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) \right) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( 20 \log K - 10 \log \left( \frac{\omega^4}{\omega_n^4} \right) \right) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( 20 \log K + 40 \log(\omega_n) - 40 \log(\omega) \right) \end{aligned}$$

- les deux asymptotes se croisent pour  $\omega = \omega_n$  la pulsation propre;
- le diagramme d'amplitude présente un maximum pour la pulsation dite pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$$

On note

$$Q_r = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

le facteur de résonance.

- le module pour la pulsation propre  $\omega_n$  est :  $|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot \xi}$ .

**Diagramme de phase :**

- une asymptote horizontale d'ordonnée  $0^\circ$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,
- une d'ordonnée  $-180^\circ$  lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ ,
- $\Phi(\omega_n) = \arg(H(j \cdot \omega_n)) = -90^\circ$ .

**Cas  $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z < 1$  : 2 racines complexes conjuguées sans résonance**

On retrouve les mêmes asymptotes que dans le cas précédent, mais le diagramme d'amplitude ne présente pas de maximum (tracé en pointillés de la figure 6.6), le tracé est toujours sous les asymptotes et très proche de celle-ci (l'écart est au maximum de  $-6\text{dB}$  si  $z = 1$  pour la pulsation  $\omega_n$ ).

Le module pour la pulsation propre  $\omega_n$  est :  $|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot \xi} \geq -6\text{dB}$ .

**Cas  $z > 1$  : 2 racines réelles**

Lorsque  $z > 1$ , la fonction de transfert peut se décomposer en un produit de deux premiers ordres,

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

le tracé des diagrammes de Bode est donc la somme graphique des deux tracés du premier ordre (cf. figure 6.7).

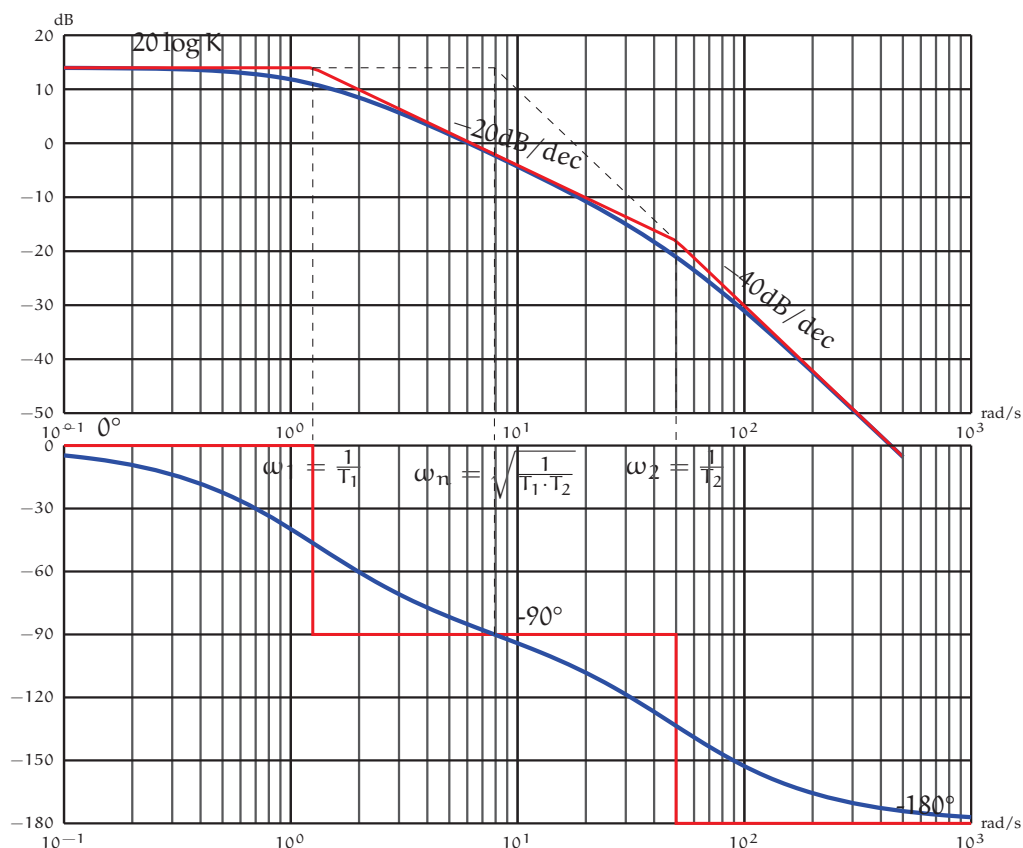


FIGURE 6.7 – Diagrammes de Bode 2<sup>d</sup> ordre - 2 racines réelles

Les deux pulsations de cassure sont  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$  et  $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$  (pour la suite  $\omega_1 < \omega_2$ ).

Le diagramme d'amplitude présente donc 3 asymptotes :

- une asymptote horizontale d'ordonnée  $20 \log K$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , ( $\log \omega \rightarrow -\infty$ ), jusqu'à la pulsation  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$  ;
- une asymptote de pente  $-20\text{dB/dec}$  entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ;

— une asymptote de pente  $-40\text{dB/dec}$  au delà de  $\omega_2$ .

**Remarque** : Parler d'asymptote entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  est un abus de langage communément admis en automatique.

Le diagramme des phases présente lui aussi 3 asymptotes :

— une asymptote horizontale d'ordonnée  $0^\circ$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , jusqu'à  $\omega_1$  ;

— une asymptote horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$  entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ;

— une asymptote horizontale d'ordonnée  $-180^\circ$  au-delà de  $\omega_2$ .

Quelques valeurs et points particuliers

— pulsation propre :  $\omega_n = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} = \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}$  ;

— sur le diagramme d'amplitude, l'asymptote horizontale et l'asymptote à  $-40\text{dB/dec}$  se croisent pour  $\omega = \omega_n$  ;

— l'argument pour la pulsation propre est :  $\arg(H(j\omega_n)) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$  ;

— le module pour la pulsation propre est :  $|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot \xi}$

### Cas $z = 1$ : 1 racine réelle double

La fonction de transfert est un premier ordre au carré :  $H(p) = \frac{K}{(1 + T \cdot p)^2}$

Le tracé des diagrammes de Bode se déduit donc directement du tracé d'un système du premier ordre, ils possèdent donc les particularités suivantes que l'on retrouve sur la figure 6.8.

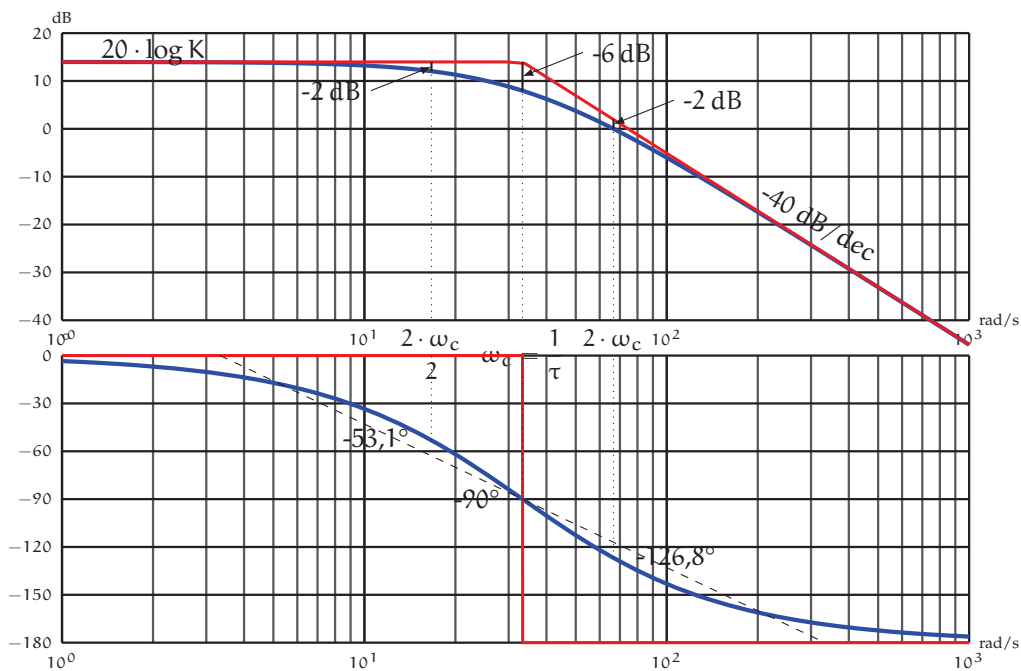


FIGURE 6.8 – Diagrammes de Bode 2<sup>nd</sup> ordre - 1 racine double

— diagramme d'amplitude

— une asymptote horizontale ( $20 \log K$ ) lorsque  $\omega \rightarrow 0$  et une asymptote de pente  $-40\text{dB/dec}$  ( $2 \times (-20\text{dB/dec})$ ) lorsque  $\omega \rightarrow \infty$  ;

— pour la pulsation de coupure  $\omega_c = \frac{1}{T}$ , l'écart par rapport à l'asymptote est de  $-6\text{dB}$  ( $2 \times (-3 \text{ dB})$ ), l'écart par rapport aux asymptotes est de  $-2\text{dB}$  pour les pulsations double et moitié ;

— diagramme des phases

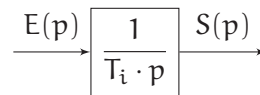
— une asymptote d'ordonnée  $0^\circ$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$  ;

- une d'ordonnée  $-180^\circ$  lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ ;
- pour  $\omega_c$  l'argument de la fonction de transfert est de  $-90^\circ$ ;
- comme pour un système du premier ordre il est utile de tracer le segment entre  $(\log(\frac{1}{10\tau}), 0^\circ)$  et  $(\log(\frac{1}{\tau}), -180^\circ)$  pour mieux approcher le tracé réel.

## 6.6 Intégrateur

Fonction de transfert :

$$H_i(p) = \frac{1}{T_i \cdot p}$$



Fonction de transfert complexe :

$$H_i(j\omega) = \frac{1}{T_i \cdot j \cdot \omega}$$

— Module :

$$|H_i(j\omega)| = \frac{1}{T_i \cdot \omega}$$

— Module en dB :

$$|H_i(j\omega)|_{dB} = -20 \log \omega - 20 \log T_i$$

— Argument :

$$\arg(H_i(j\omega)) = -90^\circ$$

Le diagramme d'amplitude (fig 6.9) d'un intégrateur est une droite de pente  $-20\text{dB/dec}$  passant par  $-20 \log T_i$  pour  $\omega = 1$  ( $\log \omega = 0$ ).

Le diagramme de phase est une droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .

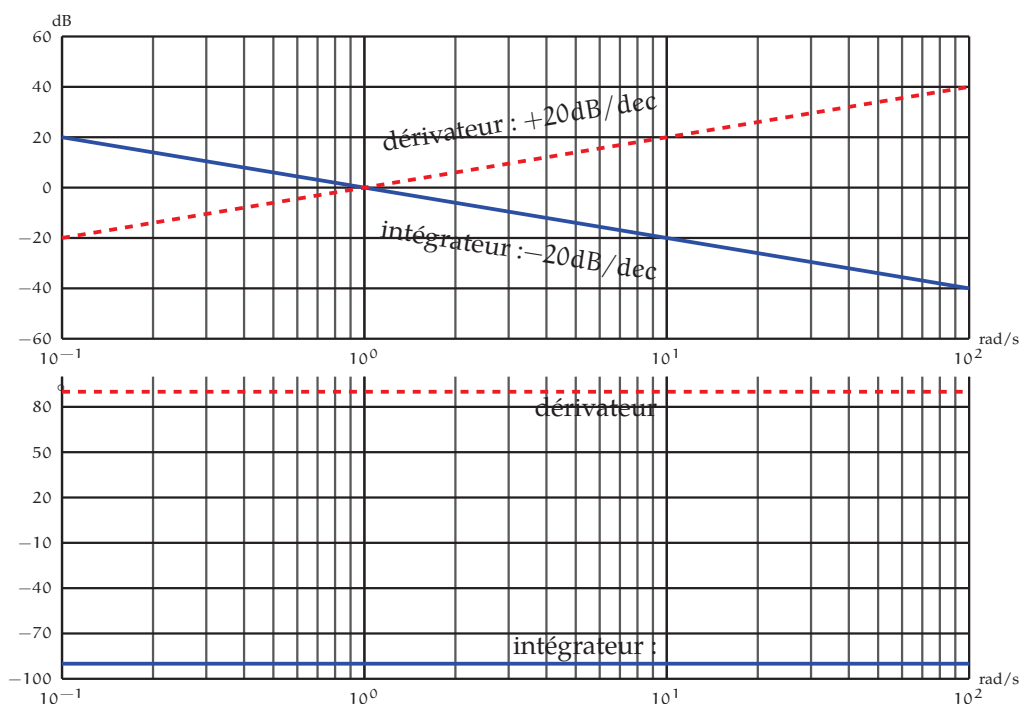


FIGURE 6.9 – Diagrammes de Bode - Intégrateur - Dérivateur

## 6.7 Dérivateur

Fonction de transfert :

$$H_d(p) = T_d \cdot p$$

Fonction de transfert complexe :

$$H_d(j\omega) = T_d \cdot j \cdot \omega$$

— Module :

$$|H_d(j\omega)| = T_d \cdot \omega$$

— Module en dB :

$$|H_d(j\omega)|_{dB} = +20 \log \omega + 20 \log T_d$$

— Argument :

$$\arg(H_d(j\omega)) = +90^\circ$$

Diagrammes de Bode (fig 6.9)

Le diagramme d'amplitude d'un dérivateur est une droite de pente +20dB/dec passant par +20 log  $T_d$  pour  $\omega = 1$ .

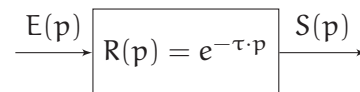
Le diagramme de phase est une droite horizontale d'ordonnée +90°.

## 6.8 Retard pur

Soit un système tel que la sortie est en retard sur l'entrée d'un temps  $\tau$  :

$$s(t) = e(t - \tau).$$

Le théorème du retard nous permet d'écrire en passant dans le domaine de Laplace :



$$S(p) = e^{-\tau p} \cdot E(p)$$

La transformée de Laplace d'un retard pur est donc :

$$R(p) = e^{-\tau \cdot p}$$

On en déduit la fonction de transfert complexe :

$$R(j \cdot \omega) = e^{-\tau \cdot j \cdot \omega} = R(j \cdot \omega) = \cos \tau \omega - j \sin \tau \omega$$

Le module est constant,

$$|R(j \cdot \omega)| = 1$$

L'argument est constamment décroissant (cf. figure 6.10)

$$\arg(R(j \cdot \omega)) = -\tau \omega$$

### 6.8.1 Influence d'un retard sur le tracé d'un lieu de Bode

Pour évaluer l'effet d'un retard sur le lieu de Bode, nous allons étudier la fonction de transfert d'un retard pur associé à un premier ordre,

$$H(p) = e^{-\tau p} \frac{1}{1 + T \cdot p}.$$



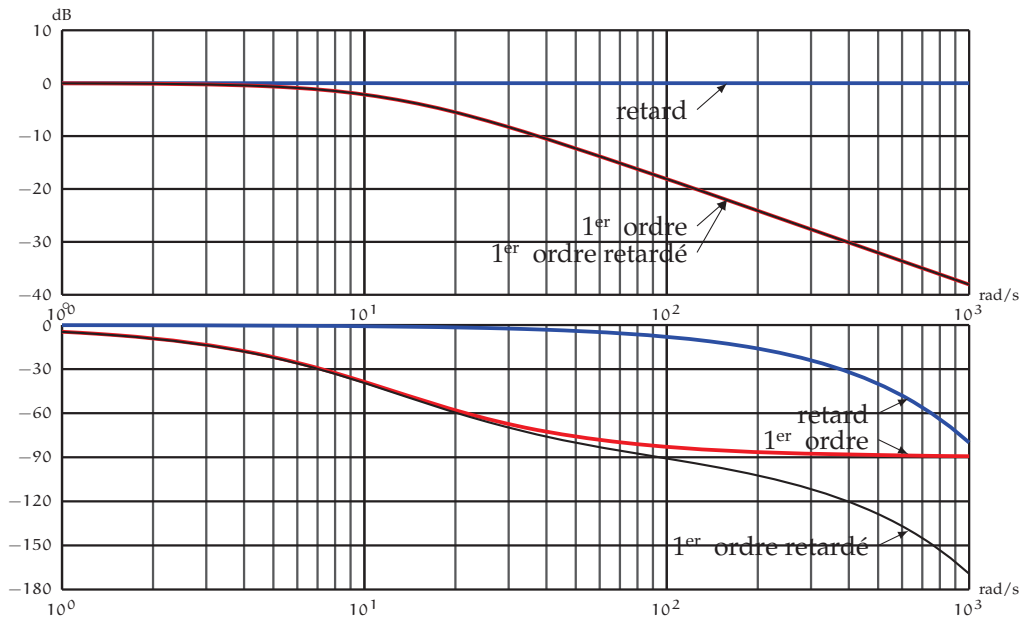


FIGURE 6.10 – Diagrammes de Bode - Influence d'un retard

Fonction de transfert complexe,

$$H(j \cdot \omega) = e^{-\tau j \cdot \omega} \frac{1}{1 + T \cdot j \cdot \omega}$$

— module :

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{K}{1 + j \cdot \tau \cdot \omega} \right|$$

— argument :

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan(\tau \cdot \omega) - \tau_1 \cdot \omega$$

On remarque sur la figure 6.10 que le module n'est pas influencé par le retard (les deux tracés sont superposés), par contre l'argument est diminué de  $\tau \cdot \omega$ .

Un retard augmente le déphasage entre l'entrée et la sortie du système. Nous verrons plus loin, lors de l'étude de la stabilité des systèmes asservis, que cet effet est fortement préjudiciable à la stabilité des systèmes.

## 6.9 Généralisation du tracé des diagrammes de Bode

Toute fonction de transfert sans retard peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_m p^m}$$

avec

- $n$  : degré du polynôme du numérateur ;
- $m$  : degré du polynôme dénominateur ;
- $K$  : le gain statique ;
- $\alpha$  : la classe de la fonction de transfert.

Le numérateur et le dénominateur sont deux polynômes, pour les systèmes physiques, le degré global du dénominateur est supérieur au degré du numérateur :  $m + \alpha - n \geq 0$ .

On peut, en recherchant les racines de chaque polynôme, mettre la fonction de transfert sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\kappa}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod (1 + \tau_i \cdot p) \cdot \prod \left(1 + 2 \frac{z_j}{\omega_{n_j}} p + \frac{p^2}{\omega_{n_j}^2}\right)}{\prod (1 + \tau_k \cdot p) \cdot \prod \left(1 + 2 \frac{z_l}{\omega_{n_l}} p + \frac{p^2}{\omega_{n_l}^2}\right)}$$

La fonction de transfert s'écrit donc comme le produit de plusieurs fonctions élémentaires (premier, deuxième ordre et intégration/dérivation).

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot \dots \cdot H_I(p) \cdot \dots \cdot H_N(p)$$

Ce qui nous permet d'écrire le module et l'argument en dB :

### Module en dB

$$|H(j \cdot \omega)|_{dB} = 20 \log (|H_1(j \cdot \omega)|) + \dots + 20 \log (|H_I(j \cdot \omega)|) + \dots + 20 \log (|H_N(j \cdot \omega)|)$$

### Argument

$$\text{Arg}(H(j \cdot \omega)) = \text{Arg}(H_1(j \cdot \omega)) + \dots + \text{Arg}(H_I(j \cdot \omega)) + \dots + \text{Arg}(H_N(j \cdot \omega))$$

Les diagrammes de Bode de la FT s'obtiennent en sommant graphiquement les diagrammes de Bode de chaque fonction élémentaire.

### Comportement lorsque $\omega \rightarrow \infty$

#### — Argument

- une fonction du premier ordre apporte un déphasage maximal (à l'infini) de  $-90^\circ$  si elle est au dénominateur et de  $+90^\circ$  si elle est au numérateur,
- une fonction du second ordre apporte un déphasage maximal de  $-180^\circ$  si elle est au dénominateur et de  $+180^\circ$  si elle est au numérateur,
- un intégrateur apporte lui un déphasage constant de  $-90^\circ$  et le dérivateur de  $+90^\circ$ .

Ces déphasages s'ajoutant, on peut déduire que le déphasage total de la fonction de transfert lorsque la pulsation augmente tend vers :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(H(j \cdot \omega)) = (n - m - \alpha) \cdot 90^\circ$$

#### — Module

- le tracé du lieu de Bode d'un premier ordre tend vers une asymptote de pente  $-20\text{dB/dec}$  s'il est dénominateur et de  $+20\text{dB/dec}$  s'il est au numérateur,
- un second ordre tend vers une asymptote de pente  $-40\text{dB/dec}$  s'il est dénominateur et de  $+40\text{dB/dec}$  s'il est au numérateur,
- le lieu de Bode d'un intégrateur est une droite de pente  $-20\text{dB/dec}$  et de  $+20\text{dB/dec}$  pour un dérivateur.

Ces pentes s'ajoutent, on peut donc déduire que l'asymptote finale a une pente de

$$(n - m - \alpha) 20\text{dB/dec}$$

### Comportement lorsque $\omega \rightarrow 0$

À partir de la forme factorisée de  $H(p)$  décrite plus haut, on déduit que l'allure des lieux de Bode lorsque  $\omega \rightarrow 0$  ne dépend que de la classe  $\alpha$  de la fonction de transfert et  $K$ . En effet, le module en dB et l'argument de chaque fonction du premier et du second ordres sont nuls lorsque  $\omega \rightarrow 0$ . d'où :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (H(j \cdot \omega)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( K \cdot \frac{1}{(j \cdot \omega)^\alpha} \right)$$

## 6.9 Généralisation du tracé des diagrammes de Bode

- $\alpha = 0$ 
  - l'argument tend vers 0,
  - le module tend lui vers :  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j \cdot \omega)|_{\text{dB}} = 20 \log K$
- $\alpha > 0$ 
  - l'argument tend vers une asymptote horizontale d'ordonnée :  $-\alpha \cdot 90^\circ$ .
  - le module tend vers une asymptote d'équation :  $20 \log K - \alpha \cdot 20 \cdot \log \omega$ .