

## 2.1. Systèmes asservis

Les systèmes asservis sont une branche des systèmes dynamiques. On appelle système dynamique un système pour lequel, les grandeurs de sortie dépendent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrée.

Parmi les systèmes dynamiques, nous limiterons notre étude aux seuls systèmes linéaires continus et invariants (SLCI).

## 2.2. Structure d'un système asservi

L'objectif d'un système automatisé étant de remplacer l'homme dans une tâche, nous allons pour établir la structure d'un système automatisé commencer par étudier le fonctionnement d'un système dans lequel l'homme est la « partie commande ».

### Exemple : véhicule et le conducteur



FIGURE 2.1. – maintien de la trajectoire d'une voiture

Le conducteur doit suivre la route (figure 2.1), pour cela :

- Il observe la route et son environnement et évalue la distance  $d$  qui sépare son véhicule du bord de la route.
- Il détermine en fonction du contexte l'angle  $\theta$  qu'il doit donner au volant pour suivre la route.
- Il agit sur le volant (donc sur le système), la rotation du volant est transmise aux roues via la colonne de direction.
- puis de nouveau il recommence son observation pendant toute la durée du déplacement.
- Si un coup de vent dévie le véhicule, après avoir observé et mesuré l'écart il agit pour s'opposer à cette perturbation le plus rapidement possible.

## 2.3. Exemples de cahiers des charges de SA

- Four : Un four électrique doit atteindre la température de consigne à  $10^{\circ}\text{C}$  près en moins de 30 min puis la maintenir sans fluctuation. À l'ouverture de la porte la température ne doit pas chuter.

- Robot d'assemblage 1 : Un robot assure l'assemblage de deux pièces, la première arrive sur un tapis et s'arrête devant le poste d'assemblage. Le robot saisit l'autre pièce sur un tapis d'amenage et la positionne sur la première. La précision d'assemblage est de 0,2 mm.
- Robot d'assemblage 2 : Afin d'améliorer la productivité du poste précédent, on ne souhaite plus arrêter la première pièce et réaliser l'assemblage de manière dynamique.
- Suspension : La suspension active doit assurer une hauteur de caisse constante quelle que soit la charge du véhicule et doit absorber les défauts de la route. Le nombre des oscillations résiduelles ne doit pas être supérieur à 3.

Nous voyons au travers de ces quelques extraits de cahier de charges les caractéristiques que l'on peut attendre d'un système asservi :

- Le *temps de réponse* du four est de 30 min ;
- Le système de régulation du four doit permettre de *rejeter les perturbations* (ouverture de la porte) ;
- La *précision* est une qualité importante pour le four (10°C près), le premier robot ( 0,2 mm). Pour ces deux systèmes, il s'agit de l'erreur à une entrée constante (la température, la position), pour le deuxième robot, il doit être précis pendant le mouvement (suivi de trajectoire).
- Le système peut autoriser ou non les oscillations avant la stabilisation .
- Bien sûr tous ces systèmes doivent être *stables*, c'est à dire ne pas diverger et tendre vers une valeur finie.

## 2.4. Schéma fonctionnel

De manière générale, le fonctionnement d'un système asservis peut être décrit par le schéma de la figure 2.2. Il présente la structure classique d'un système asservis.

Un capteur mesure en permanence l'évolution de la sortie à contrôler (ici la distance  $d$ ) et en retourne une image ( $d'$ ) à la partie commande qui la compare à la consigne. En fonction de l'erreur ( $\epsilon$ ), le système va déterminer la nouvelle loi de commande (ici  $\theta$ ) et agir.

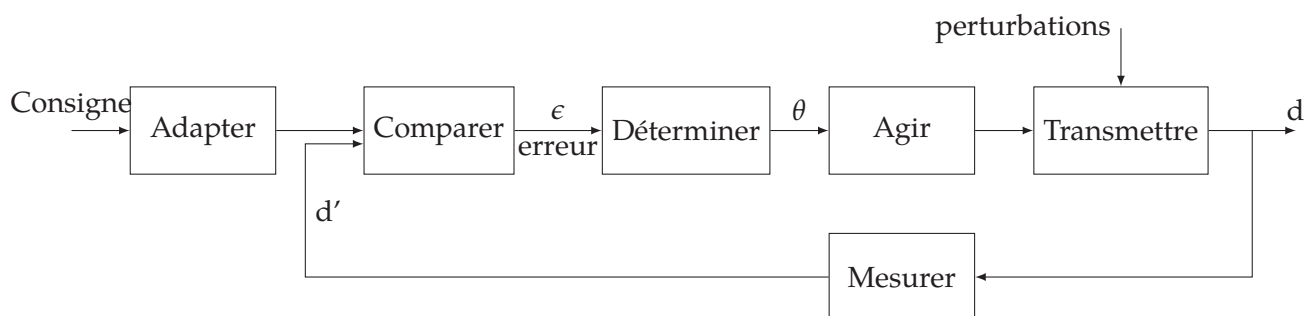


FIGURE 2.2. – Schéma fonctionnel d'un système asservi

Cette structure est analogue à celle que nous avons détaillée dans le chapitre précédent (chaîne d'énergie et chaîne d'information figure 2.3). Elle fait apparaître une chaîne directe d'action et boucle de rétroaction.

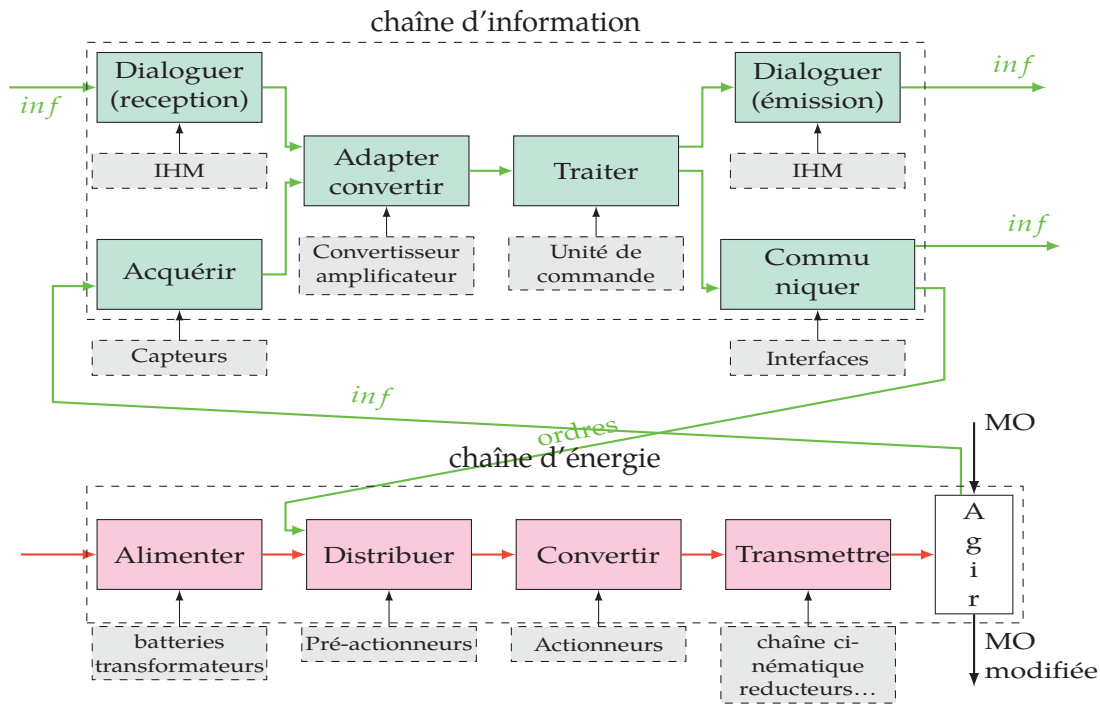
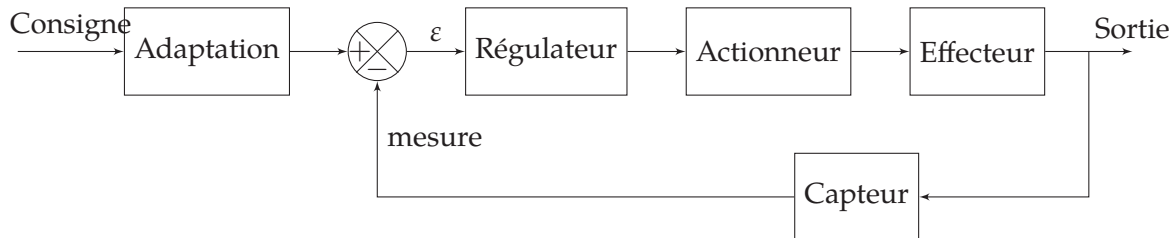


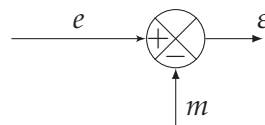
FIGURE 2.3. – Description fonctionnelles des chaînes d'information et d'énergie

### 2.4.1. Constituants et signaux

Le schéma fonctionnel devient :



**Comparateur :** le comparateur est chargé de comparer la consigne et l'image de la grandeur à asservir. À la sortie du comparateur, on trouve l'erreur (ou écart) entre ces deux informations. Il est d'usage de représenter le comparateur par le symbole suivant :



**Régulateur ou partie commande :** la partie commande, le régulateur, le contrôleur, détermine la loi de commande à partir de l'erreur et de son évolution.

**Actionneur :** c'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité. Il est en général associé à un pré-actionneur (hacheur, variateur,...) qui permet de moduler l'énergie.

**Effecteur :** L'effecteur rassemble l'ensemble des constituants qui vont permettre d'obtenir la sortie à partir de l'énergie fournie par l'actionneur. On trouvera par exemple dans un asservissement qui agit sur de l'énergie mécanique :

- un réducteur à engrenages,
- un système de transmission à poulie et courroies ou à chaîne,
- un mécanisme bielle manivelle,
- un système vis-écrou,

— ...

**Capteur** : le capteur prélève sur le système la grandeur réglée ( information physique ) et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur. La précision et la rapidité sont deux caractéristiques importantes du capteur.

**Interface d'adaptation** : . La comparaison ne pouvant se faire qu'entre deux grandeurs de même nature et de même échelle, la consigne saisie par l'opérateur doit être adaptée / convertie afin d'être comprise par le comparateur.

**Consigne** : la consigne, est la grandeur réglante du système, c'est ce que l'on souhaite obtenir.

**Sortie réglée** : la sortie réglée représente le phénomène physique que doit régler le système, c'est la raison d'être du système.

**Perturbation** : on appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie a son niveau indépendamment des perturbations.

**Écart, erreur** : on appelle écart ou erreur, la différence entre la consigne et la sortie. Cette mesure ne peut être réalisée que sur des grandeurs comparables (même unité, même échelle). Il est donc souvent nécessaire d'installer dans la chaîne directe un bloc d'adaptation qui ramène l'échelle de la consigne dans le domaine de mesure du capteur.

## 2.5. Régulation et asservissement

On considère deux types principaux de systèmes asservis.

**Régulation** : on appelle régulation un système asservi qui doit maintenir constante la sortie conformément à la consigne (constante) indépendamment des perturbations (régulation de température d'un four, régulateur de vitesse, ...).

**Asservissement** : on appelle asservissement un système asservi dont la sortie doit suivre le plus fidèlement possible la consigne quelle que soit son évolution (suivi de trajectoire d'un robot, asservissement de vitesse).

## 2.6. Caractéristiques d'un système asservi

### 2.7. Précision

La précision est l'exigence principale d'un système asservis. On conçoit en général le système pour que la sortie soit identique à la consigne d'entrée soit de manière absolue (erreur nulle) soit avec une certaine tolérance.

La précision est caractérisée par l'écart entre la consigne et la sortie. La précision peut être soit absolue, soit relative, elle est toujours définie par rapport à un type de sollicitation :

- un échelon si on souhaite caractériser la réponse pour une consigne constante,
- une rampe si on souhaite étudier le comportement dynamique.

#### 2.7.1. Erreur indicielle

L'erreur indicielle est mesurée entre la valeur finale de la réponse du système en régime établi (à l'infini) et la consigne en échelon unitaire. La figure 2.4a montre la réponse de plusieurs systèmes à un échelon unitaire.

L'erreur indicielle est notée  $\epsilon_i$ , par abus de langage, elle est souvent notée  $\epsilon_s$  et appelée erreur statique.

L'erreur indicielle se mesure entre la consigne et la valeur finale de la sortie. Cette mesure n'a de sens que si les deux signaux (entrée et sortie) sont de même nature et de même échelle.

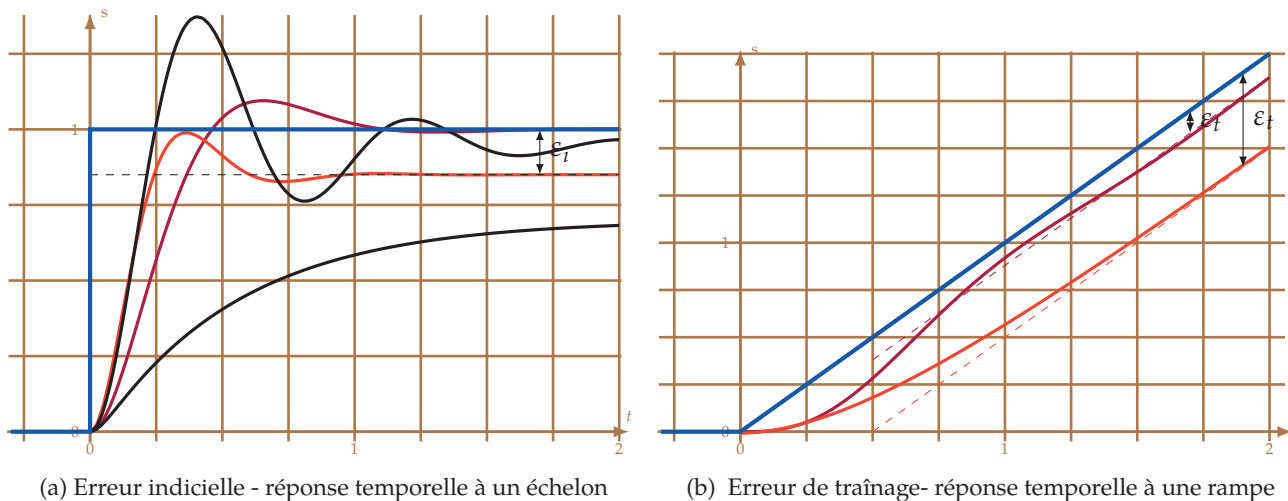


FIGURE 2.4. – Erreur indicielle et de traînage

### Erreur indicielle absolue

$$\epsilon_i = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - s(t)) \text{ avec } e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$$

On note  $\mathcal{H}(t)$  la fonction de Heaviside qui vaut 0 pour  $t < 0$  et 1 pour  $t \geq 0$ .

### Erreur indicielle relative

$$\epsilon_i \% = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e(t) - s(t)}{e(t)}$$

### 2.7.2. Erreur de traînage

L'erreur de traînage est une mesure de l'aptitude d'un système à suivre une consigne variable, elle est notée  $\epsilon_t$ . Cette erreur est mesurée en régime établi, entre la consigne et la réponse du système (figure 2.4b).

## 2.8. Rapidité

### 2.8.1. Temps de réponse

La rapidité d'un système caractérise le temps mis par le système à atteindre la **valeur finale** pour une entrée en échelon, la résolution des équations différentielles montre que ce n'est théoriquement qu'au bout d'un temps infini que la valeur finale est atteinte.

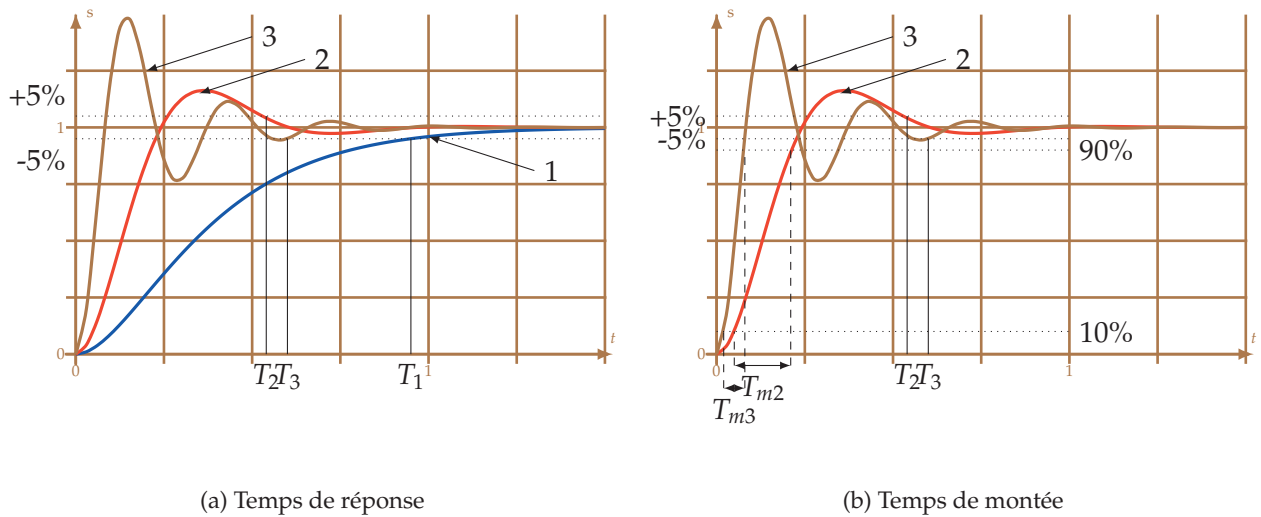
Néanmoins, pour chiffrer en pratique la rapidité du régime transitoire, on a l'habitude de considérer le **temps de réponse à 5%**; c'est le temps au bout duquel le système a atteint son régime permanent à 5% près et à partir duquel il ne s'en écarte pas de plus de 5%.

De la même manière on peut définir les temps de réponse à 10% et à 2%.

La figure 2.5a montre pour trois réponses temporelles :

- la courbe 1 est caractéristique d'un système non oscillant, le temps de réponse à 5% de ce système est :  $T_{5\%} = T_1$ . À partir de l'instant  $T_1$  la réponse est toujours comprise entre les deux bandes à  $\pm 5\%$  de la valeur finale.
- les courbes 2 et 3 sont caractéristiques d'un système dont la réponse est oscillatoire amortie. Les instants  $T_2$  et  $T_3$  correspondent aux temps de réponse à 5% des réponses 2 et 3.

Attention, la mesure s'effectue par rapport à la valeur finale de la sortie et non pas par rapport à l'échelon de l'entrée.



(a) Temps de réponse

(b) Temps de montée

FIGURE 2.5. – temps de réponse et de montée

### 2.8.2. Temps de montée

On constate en comparant les réponses des systèmes 2 et 3 que les temps de réponses sont comparables mais que le comportement est lui fortement différent. Le système 3 est fortement oscillant et semble plus « dynamique » que le système 2. Le temps de réponse, tel qu'il est défini ne permet pas de différencier ces deux systèmes.

Pour les différencier, il est possible de déterminer le temps de montée  $T_m$  que l'on détermine en mesurant l'intervalle de temps séparant les instants auxquels la réponse indicielle vaut 10% et 90% de la valeur finale (ou entre 20% et 80%). On remarque sur la figure 2.5b que les deux temps de montée  $T_{m2}$  et  $T_{m3}$  sont notablement différents.

### 2.9. Dépassements

La mesure du dépassement relatif des systèmes oscillatoires amortis permet d'évaluer le taux d'oscillation du système. L'amplitude du dépassement et la rapidité de décroissance caractérise la stabilité relative.

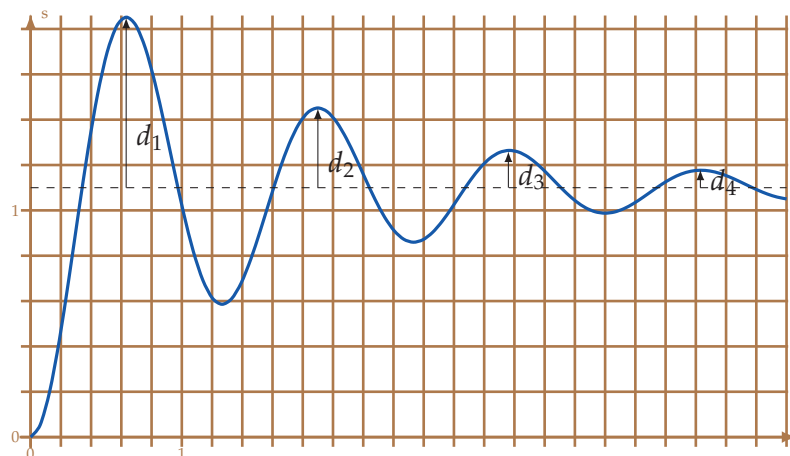


FIGURE 2.6. – Dépassement

Le dépassement relatif est déterminé pour chaque dépassement de la valeur finale (figure 2.6)

$$D_{i\%} = \frac{S(t_{mi}) - S(\infty)}{S(\infty)} = \frac{d_i}{S(\infty)}$$

avec

- $D_{i\%}$  : le dépassement relatif pour le  $i^{\text{me}}$  maximum.
- $t_{mi}$  : l'instant du  $i^{\text{me}}$  maximum.
- $S(\infty)$  : la valeur finale.
- $S(t_{mi})$  : la valeur du  $i^{\text{me}}$  maximum.
- $d_i = S(t_{mi}) - S(\infty)$ .

Un critère important de réglage peut être l'absence de dépassement.

## 2.10. Stabilité

La stabilité est la plus importante des caractéristiques que doit posséder un système asservi.

Une manière intuitive de préciser la notion de stabilité est d'imaginer un système que l'on écarte de sa position initiale par une impulsion et de regarder son évolution, s'il retrouve sa position initiale, il est stable, s'il s'en écarte, il est instable (figure 2.7).

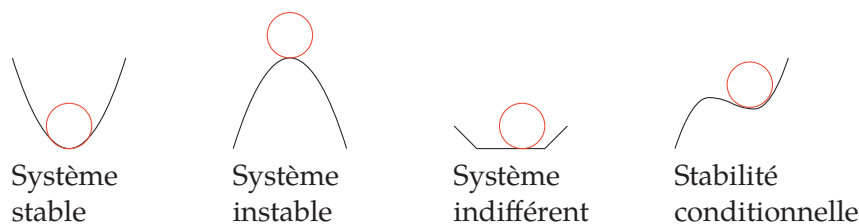


FIGURE 2.7. – Stabilité des systèmes

Un système à stabilité indifférente va s'écarter de sa position initiale pour trouver une autre position stable différente de la première, le système s'écarte mais ne diverge pas.

Plusieurs définitions de la stabilité sont envisageables.

**Définition 1 :** Un système physique est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

**Définition 2 :** Un système physique est stable si la réponse libre du système tend vers zéro à l'infini, c'est dire qu'il retourne spontanément vers son état d'équilibre lorsqu'il en est écarté.

Ces deux définitions sont équivalentes pour les systèmes linéaires.

La figure 2.8 présente la réponse temporelle de quelques systèmes sollicités par un échelon :

- les réponses 1, 2, 3, 4 sont caractéristiques de systèmes stables. La réponse 1 est une réponse apériodique, les trois autres sont oscillatoires amorties.
- les réponses 5 et 6 sont celles de systèmes instables, elles sont toutes les deux divergentes, oscillatoire ou non.

On note aussi en comparant les réponses 2 à 4 que le critère strict de stabilité, s'il est nécessaire, n'est pas suffisant. En effet est-il envisageable qu'un système atteigne sa position définitive après un grand nombre d'oscillations ?

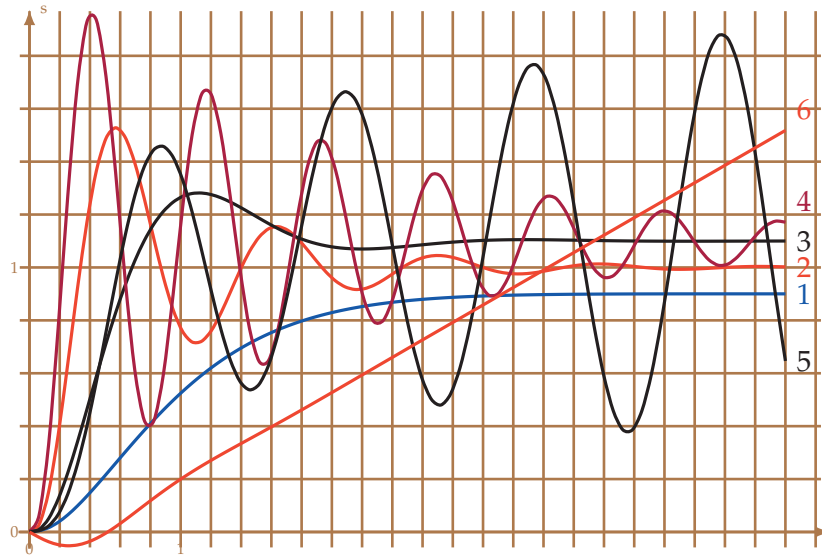


FIGURE 2.8. – Stabilité

## 2.11. Comportement - connaissance

## 2.12. Modèle de connaissance

On dit qu'un système est décrit par son modèle de connaissance, lorsqu'il est possible de le décrire mathématiquement à partir des équations de fonctionnement des différents éléments qui constituent le système. En général, le modèle de connaissance est une ou plusieurs équations différentielles.

Nous verrons la description par les équations différentielles dans le chapitre suivant.

## 2.13. Modèle de comportement

Il est souvent difficile voire impossible d'avoir une description mathématique complète du système. Il est alors possible de modéliser le système à partir d'une étude comportementale. Le système étant soumis à des signaux d'entrée canoniques, le modèle mathématique équivalent est alors déduit par analogie de la réponse comportementale avec la réponse d'un système connu.

Les principaux signaux permettant d'identifier le système sont :

### L'échelon de Heaviside :

L'échelon est le signal de base d'étude des systèmes asservis. Il permet d'étudier le comportement du système lorsqu'on lui applique une consigne constante.

Il est généralement noté  $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$

L'échelon unitaire est appelé fonction de *Heaviside* et parfois noté  $\mathcal{H}(t)$  ou  $u(t)$ .

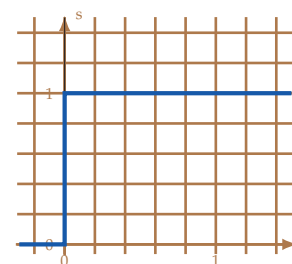


FIGURE 2.9. – Échelon unitaire

### L'impulsion de Dirac :

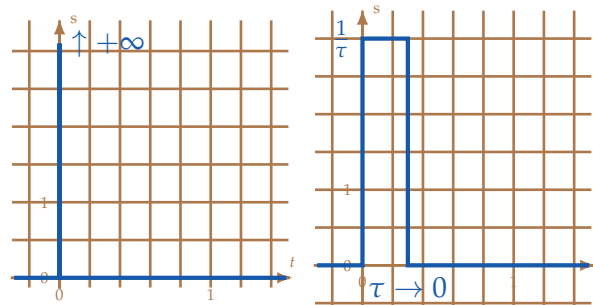


Cette fonction permet de simuler le comportement à un choc, une impulsion.

L'impulsion ou fonction de *Dirac* (figure 2.10a) est définie par :

$$\forall t \neq 0, \delta(t) = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Elle est physiquement irréalisable elle peut être modélisée par la limite lorsque  $\tau$  tend vers 0 de la fonction représentée sur la figure 2.10b.



(a) impulsion de Dirac (b) modèle de l'impulsion de Dirac

FIGURE 2.10. – impulsion de Dirac

**La rampe :**

L'entrée en rampe permet d'étudier le comportement dynamique d'un système et principalement sa capacité à suivre une consigne variable.

La rampe est définie par :

$$\begin{cases} t < 0 : & e(t) = 0 \\ t \geq 0 : & e(t) = a \cdot t \end{cases}$$

$$e(t) = a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t).$$

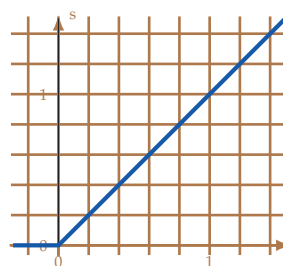


FIGURE 2.11. – Rampe

**la sinusoïde** L'entrée sinusoïdale permet d'étudier le comportement fréquentiel du système en faisant varier la pulsation du signal.

Le signal sinusoïdal est défini par :

$$\begin{cases} t < 0 : & e(t) = 0 \\ t \geq 0 : & e(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases}$$

$$e(t) = a \cdot (\sin \omega \cdot t) \cdot \mathcal{H}(t).$$

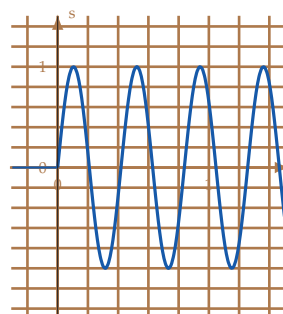


FIGURE 2.12. – Sinusoïde

Nous allons maintenant, nous intéresser à la résolution des systèmes linéaires continus.



### 3.1. Systèmes linéaires continus invariants

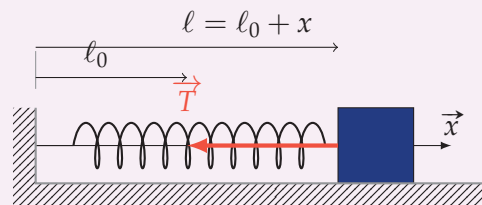
### 3.2. Définition

**Définition :** Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants<sup>1</sup>. Les systèmes linéaires possèdent principalement deux propriétés :

- la proportionnalité;
- l'additivité.

### 3.3. Exemples

#### Exemple : Oscillateur harmonique horizontal



**Hypothèse :** Nous considérerons dans un premier temps que le contact masse / support est parfait (pas de frottements)

Pour établir l'équation qui décrit le mouvement, nous allons appliquer la deuxième loi de Newton (Principe Fondamental de la Dynamique en Translation) qui s'énonce : Dans un référentiel galiléen, la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le solide :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{p}_{S/\mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g} = M \cdot \vec{a}_{S/\mathcal{R}_g}$$

avec  $\vec{a}_{S/\mathcal{R}_g}$  l'accélération du solide par rapport au référentiel galiléen.

Inventaire des actions mécaniques extérieures :

- Le poids :  $\vec{P} = -M \cdot g \cdot \vec{z}$ ;

1. Les équations différentielles seront abordées dans la suite du cours et approfondies en mathématiques

— la réaction du support  $\vec{R} = R \cdot \vec{z}$ ;

— l'action du ressort  $\vec{T}_x = T_x \cdot \vec{x}$ ;

La deuxième loi de Newton en projection sur l'axe  $(O, \vec{x})$  s'écrit :

$$T_x = m \cdot \ddot{x}(t) \quad \text{avec} \quad T_x = -K \cdot (\ell - \ell_0)$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \ddot{x}(t) + K \cdot x(t) = 0$$

$$m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + K \cdot x(t) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Cette équation est une équation différentielle incomplète du second ordre, il manque le terme en  $\dot{x}(t)$ .

On obtient la solution de cette équation différentielle en posant

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ , montrons qu'elle est de la forme :

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi)$$

$A$  l'amplitude et  $\phi$  la phase à l'origine.

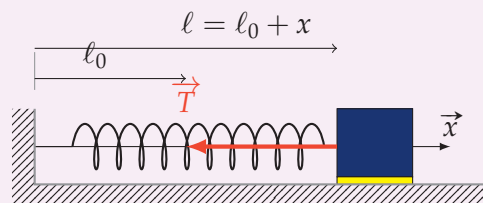
Un exemple légèrement plus complexe.

### Exemple : Oscillateur harmonique horizontal avec frottements fluides

L'hypothèse « sans frottements » est peu réaliste. Afin de les limiter, on intercale entre la masse et le support, un lubrifiant (huile).

L'effet de l'huile n'est pas négligeable, les frottements ne sont pas nuls et dépendent de la vitesse de déplacement de la masse par rapport au sol et s'oppose à celle-ci :

$$\vec{F}_h = -\mu \cdot v(t) \cdot \vec{x}$$



L'inventaire des actions mécaniques extérieures devient :

- Le poids :  $\vec{P} = -M \cdot g \cdot \vec{z}$  ;
- la réaction du support  $\vec{R} = R \cdot \vec{z}$  ;
- l'action du ressort  $\vec{T}_x = T_x \cdot \vec{x}$  ;
- les frottements  $\vec{F}_h = -\mu \cdot v(t) \cdot \vec{x} = -\mu \cdot \dot{x}(t) \cdot \vec{x}$  ;

La deuxième loi de Newton en projection sur l'axe  $(O, \vec{x})$  s'écrit :

$$F_h + T_x = m \cdot \ddot{x}(t) \quad \text{avec} \quad T_x = -K \cdot x(t)$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}(t) + \mu \cdot \dot{x}(t) + K \cdot x(t) &= 0 \\ m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \mu \cdot \frac{dx(t)}{dt} + K \cdot x(t) &= 0 \end{aligned}$$

On reconnaît encore une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Montrons que la solution est de la forme :

$$x(t) = A_1 \cdot \exp(B \cdot t) + A_2 \cdot \exp(B \cdot t)$$

En définitive, étudier un système linéaire revient à étudier la solution de l'équation différentielle à coefficients constants.

### 3.4. Propriétés

#### 3.4.1. Principe de proportionnalité

**Définition :** Si  $y(t)$  est la réponse à l'entrée  $x(t)$  alors  $\lambda \cdot y(t)$  est la réponse à  $\lambda \cdot x(t)$ .

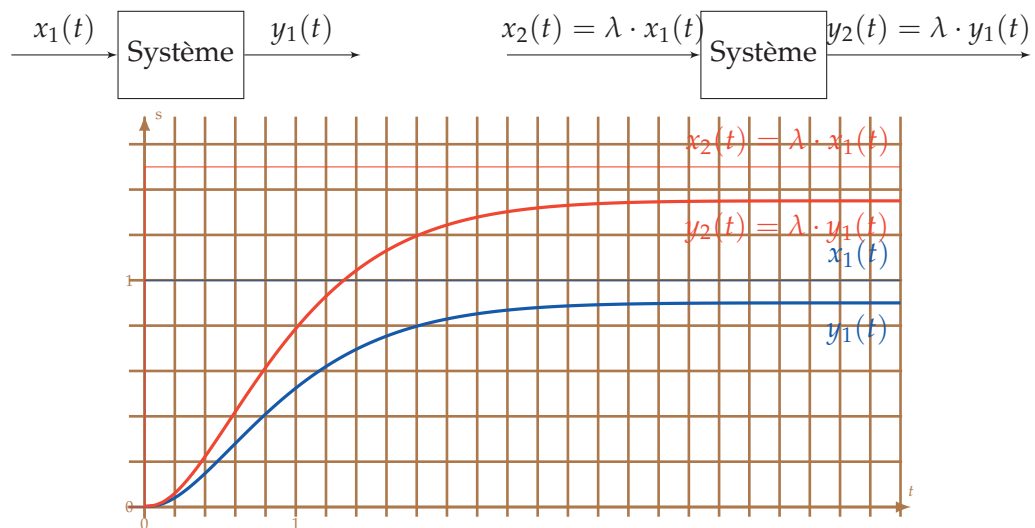


FIGURE 3.1. – Proportionnalité

Dans un système linéaire, l'effet est proportionnel à la cause (figure 3.1).

L'effet de proportionnalité n'est effectif que lorsque le système a atteint sa position d'équilibre ou que le régime permanent s'est établi.

La caractéristique Entrée / Sortie d'un système linéaire est une droite dont la pente est appelée gain du système.

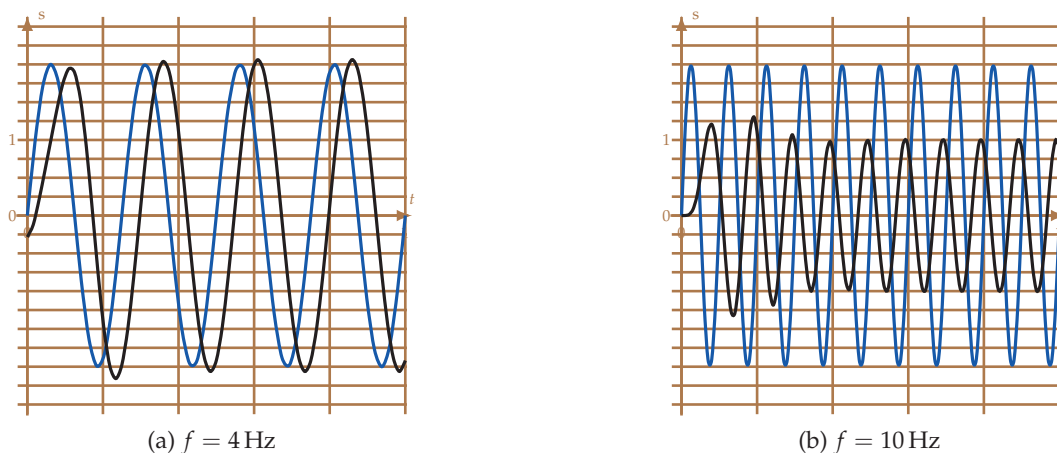


FIGURE 3.2. – Comportement en régime permanent

La réponse, en régime définitif (en régime permanent) d'un système linéaire à une entrée donnée est un signal de même nature que l'entrée. Sur la figure 3.2 on constate que la réponse en régime établi à une entrée sinusoïdale de fréquence  $f$  est aussi une sinusoïde de même fréquence mais déphasée et atténuée.

### 3.4.2. Additivité - principe de superposition

**Définition :** Si  $y_1(t)$  est la réponse à l'entrée  $x_1(t)$  et  $y_2(t)$  est la réponse à l'entrée  $x_2(t)$  alors,  $y_1(t) + y_2(t)$  est la réponse à l'entrée  $x_1(t) + x_2(t)$  (figure 3.3)

Les principes de proportionnalité et de superposition vont nous permettre, connaissant la réponse d'un système à des sollicitations simples de déterminer par additivité et proportionnalité la réponse à des sollicitations plus complexes.

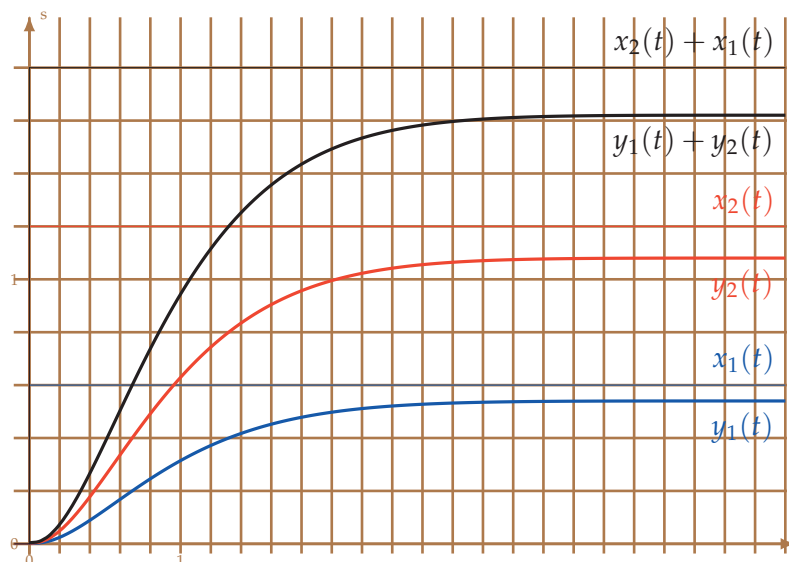


FIGURE 3.3. – Principe de superposition

### 3.4.3. Systèmes continus

Un système est dit continu lorsque les grandeurs physiques qui le caractérisent, évoluent de manière continue d'un état à un autre.

On oppose les systèmes continus aux systèmes discrets pour lesquels l'évolution d'un état à un autre se fait par « saut » d'une valeur à la suivante.

### 3.4.4. Systèmes invariants

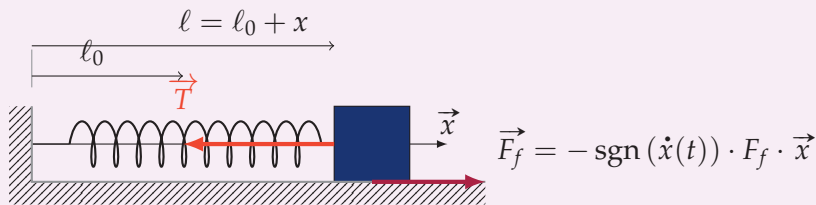
On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques du système ne se modifient pas dans le temps.

**Remarque :** Les systèmes réels ne sont ni linéaires, ni continus, ni invariants. Il est par contre toujours possible de modéliser correctement le système afin que celui ci puisse être considéré comme linéaire, continu et invariant dans la zone d'étude.

### 3.5. Principales non-linéarités

Les systèmes physiques présente en général des non linéarités, ainsi si nous reprenons le premier exemple de l'oscillateur harmonique en ajoutant un frottement solide (frottement sec) qui s'oppose avec un effort constant au déplacement, le système n'est plus linéaire.

#### Exemple : Oscillateur harmonique horizontal avec frottement sec



La deuxième loi de Newton en projection sur l'axe  $(O, \vec{x})$  s'écrit :

$$K \cdot x(t) - \text{sgn}(\dot{x}(t)) \cdot F_f = m \cdot \ddot{x}(t)$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \ddot{x}(t) + \text{sgn}(\dot{x}(t)) \cdot F_f + K \cdot x(t) = 0$$

Cette équation n'est plus une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant. Elle est non linéaire.

Malgré tout, dans ce cas là, il est encore possible de résoudre cette équation en l'étudiant par morceau suivant le signe de la vitesse  $(\dot{x}(t))$ .

Les principales non linéarités :

**Seuil** : Un système présente un seuil si la sortie n'évolue que lorsque l'entrée dépasse une valeur minimale (seuil). Les seuils ont souvent pour origine des frottements secs.

**Saturation** Un système présente une saturation lorsque la sortie n'évolue plus au-delà d'une valeur limite.

Ces saturations sont dues soit aux limites mécaniques du système (butées) soit aux limites des interfaces de puissance (saturation des amplificateurs opérationnels).

**Courbure** : La quasi totalité des systèmes présente des courbures plus ou moins prononcées.

Dans la plupart des cas le système est approché par une droite passant par l'origine, mais il est aussi possible de linéariser autour d'un point de fonctionnement.

**Hystérésis** : Un système présente une réponse avec une hystérésis lorsque le comportement est différent suivant le sens d'évolution de la variable d'entrée.

Exemple : cycle de magnétisation.

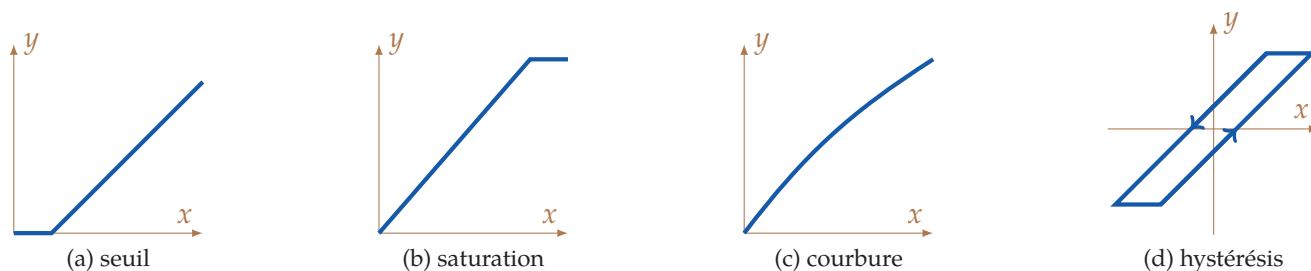


FIGURE 3.4. – Non-linéarités



### 3.6. Étude des systèmes linéaires

L'étude et la caractérisation des systèmes linéaires ne passent pas obligatoirement par la résolution de l'équation différentielle surtout qu'il n'est pas toujours possible de résoudre celle-ci.

Nous allons voir dans un premier temps les principes de la résolution des équations différentielles avec les outils mathématiques classiques puis en utilisant la **transformation de Laplace** qui permet de travailler dans un espace dans lequel les équations différentielles sont représentées par des polynômes.

### 3.7. Description par les équations différentielles

Un système dynamique linéaire peut être décrit par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.

L'équation générale d'un système linéaire est de la forme :

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 \cdot y(t) = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 \cdot x(t)$$

on note :

$\frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t)$	dérivée 1 <sup>re</sup> de $y(t)$ par rapport au temps
$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t)$	dérivée 2 <sup>nd</sup> de $y(t)$ par rapport au temps
$\frac{d^n y(t)}{dt^n}$	dérivée n <sup>me</sup> de $y(t)$ par rapport au temps

Pour les systèmes réels,  $m \geq n$  (principe de causalité<sup>2</sup>)

À partir de cette représentation il est possible de déterminer l'évolution temporelle de la sortie en résolvant l'équation différentielle.

#### 3.7.1. Principe de résolution

Nous n'allons pas ici faire un cours de math, juste montrer les principes de la résolution dans des exemples simples.

On considère deux formes d'équations différentielles à coefficients constants, les équations sans second membre, et celle avec second membre.

**équation sans second membre :**

$$a \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{ds(t)}{dt} + c \cdot s(t) = 0$$

**équation avec second membre :**

$$a \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{ds(t)}{dt} + c \cdot s(t) = e(t)$$

Résoudre une équation avec second membre commence par résoudre une équation sans second membre puis il faut rechercher une solution particulière égale au second membre.

---

2. nous verrons plus loin dans le cours

**a ). Équation différentielle du premier ordre**

Pour une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre,

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0$$

la réponse est de la forme :

$$s(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec  $A$  une constante déterminée en fonction des conditions initiales.

**b ). Équation du second ordre**

$$a \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{ds(t)}{dt} + c \cdot s(t) = 0$$

Montrons qu'une solution est de la forme

$$s(t) = A \cdot e^{r \cdot t} \quad \text{avec } A \text{ réel et } r \text{ réel ou complexe}$$

existe.

Remplaçons  $s(t)$  dans l'équation différentielle, avec  $\frac{ds(t)}{dt} = A \cdot r \cdot e^{r \cdot t}$  et  $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = A \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot t}$ .

$$\begin{aligned} a \cdot A \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot t} + b \cdot A \cdot r \cdot e^{r \cdot t} + c \cdot A \cdot e^{r \cdot t} &= 0 \\ A \cdot (a \cdot r^2 + b \cdot r + c) \cdot e^{r \cdot t} &= 0 \end{aligned}$$

Cette égalité n'est nulle que si  $r$  est solution de l'équation du second degré :

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$$

On appelle cette équation, l'équation caractéristique de l'équation différentielle.

Si

—  $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$  alors il existe deux racines réelles :  $r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$  et

$r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$ . La solution est alors de la forme :

$$s(t) = A_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

—  $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$  alors il existe deux racines complexes conjuguées :

$r_1 = \frac{-b + j \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}$  et  $r_2 = \frac{-b - j \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}$ . La solution est alors de la forme :

$$s(t) = A_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

**Remarque :** l'exponentielle complexe :  $e^{j \cdot \theta} = \cos \theta + j \cdot \sin \theta$

—  $\Delta = 0$ , alors l'équation à une racine réelle double  $r_1 = \frac{-b}{2 \cdot a}$ . On montre que la solution de l'équation

différentielle est alors :

$$s(t) = (A_1 \cdot t + A_2) \cdot e^{r_1 \cdot t}$$

On le voit, on pourra étudier le comportement d'un système linéaire à partir de la réponse temporelle. Mais cette méthode est peu utilisée en automatique, on préfère utiliser une autre méthode, la transformation de Laplace.

### Exemple : Enceinte chauffée

Le système représenté figure 4.1 est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne  $v$ , permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur. On note :

- $\alpha(t)$  : l'angle d'ouverture de la vanne.
- $q(t)$  : débit dans l'échangeur.
- $\theta_1$  : température en sortie de l'échangeur.
- $\theta$  : température dans l'enceinte

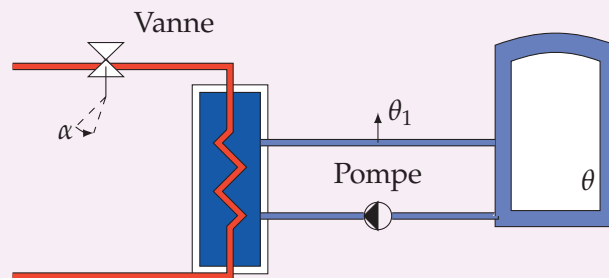


FIGURE 3.5. – Échangeur thermique

La loi de fonctionnement de la vanne est caractérisée par l'équation

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$$

donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture (le débit est proportionnel à l'ouverture de la vanne).

Les deux autres équations caractérisent le transfert de chaleur :

- dans l'échangeur :  $\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$ ;
- et dans l'enceinte :  $\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$ .

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles.

L'entrée du système est l'angle d'ouverture de la vanne  $\alpha(t)$  et la température de l'enceinte  $\theta$ , la sortie.

**Q1.** Écrire l'équation différentielle donnant  $\theta(t)$  en fonction de  $\alpha(t)$ . Quel est l'ordre de la fonction de transfert ?

**Q2.** De quelle forme est la solution si  $\alpha(t) = \alpha_0$  une constante à l'instant  $t = 0$ . Résoudre l'équation différentielle.

**Exercice 1- Moteur à courant continu - équation différentielle**

Corrig page ??

Le comportement simplifié d'un moteur à courant continu peut être décrit par les équations suivantes :

$$u(t) = R \cdot i(t) + e(t)$$

$u(t)$  : la tension d'alimentation,  $i(t)$  : le courant et  $e(t)$  la force contre électromotrice.

$$J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = C_m(t)$$

$\omega(t)$  : la vitesse de rotation du moteur,  $C_m(t)$  : le couple moteur.

$$\begin{aligned} C_m(t) &= K_t \cdot i(t) \\ e(t) &= K_e \cdot \omega(t) \end{aligned}$$

**Q1.** Donner l'équation différentielle donnant la vitesse de rotation  $\omega(t)$  en fonction de la tension d'alimentation  $u(t)$ .

### 3.8. Description par la transformation de Laplace

**Remarque :** pour toute cette partie et pour toute la suite, il est nécessaire de bien assimiler le cours sur la transformation de Laplace en annexe A.

L'utilisation de la transformée de Laplace pour la résolution des équations différentielles, a été développée par Heaviside.

La transformation permet de ramener l'étude des équations différentielles dans le domaine temporel, à une étude d'un polynôme dans le domaine symbolique.

Soit l'équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants

$$b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 \cdot s(t) = e(t)$$

On considère que les conditions initiales sont nulles pour  $s(t)$  et ses dérivées. Si ce n'est pas le cas, en général un simple changement de variable permet de se placer dans le cas de conditions initiales nulles.

On pose :

$$E(p) = \mathcal{L}(e(t))$$

et

$$S(p) = \mathcal{L}(s(t))$$

on a aussi :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right) &= p \cdot S(p) \\ \mathcal{L}\left(\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right) &= p^2 \cdot S(p) \end{aligned}$$

En substituant :

$$\begin{aligned} b_2 (p^2 \cdot S(p) + b_1 \cdot p \cdot S(p) + b_0) \cdot S(p) &= E(p) \\ (b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0) \cdot S(p) &= E(p) \end{aligned}$$

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot E(p)$$

La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.

En général, on se place dans les conditions de Heaviside, c'est à dire que les différentes conditions initiales sont nulles. si ce n'est pas le cas, on réalise un changement de variable qui permet de les annuler.

Dans les conditions de Heaviside, le résultat précédent devient :

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} E(p)$$

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

Ce résultat est important, il permet de montrer que dans le domaine symbolique, la sortie (la solution de l'équation différentielle) s'obtient comme le produit de :

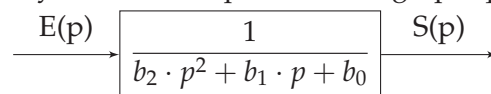
- la transformée de Laplace du signal d'entrée :  $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$
- et d'une fraction rationnelle.

On appelle

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

La **fonction de transfert** du système linéaire.

On utilisera pour représenter le système, une représentation graphique, le schéma bloc :



La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.

Nous allons le montrer sur un exemple.

**Exemple : Enceinte chauffée - transformation de Laplace et schéma blocs**

On reprend l'exemple de l'enceinte

Le système représenté figure 4.1 est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne  $v$ , permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur. On note :

- $\alpha(t)$  : l'angle d'ouverture de la vanne.
- $q(t)$  : débit dans l'échangeur.
- $\theta_1$  : température en sortie de l'échangeur.
- $\theta$  : température dans l'enceinte

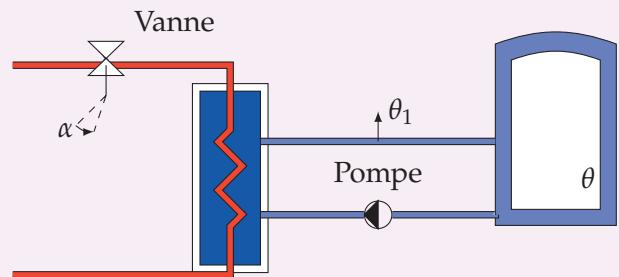


FIGURE 3.6. – Échangeur thermique

Les équations :

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$$

$$\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$$

$$\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$$

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles.

On note :  $A(p)$  la transformée de Laplace de  $\alpha(t)$  et  $Q(p)$ ,  $\Theta(p)$  et  $\Theta_1(p)$  respectivement les transformées de  $q(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $\theta_1(t)$ .

**Q1.** Écrire la transformée de Laplace de chaque équation.

**Q2.** Représenter à l'aide d'un schéma bloc la relation entre  $\Theta(p)$  et  $A(p)$ .

**Q3.** Donner la relation donnant  $\Theta(p)$  en fonction de  $A(p)$ . en déduire la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{\Theta(p)}{A(p)}$$

**Q4.** Déterminer  $\theta(t)$  pour  $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ .

La transformée de Laplace permet donc de résoudre les équations différentielles à coefficients constants. Cette méthode ne permet pas de résoudre d'autres équations que celle que l'on pourrait résoudre par la méthode classique, par contre elle permet de prendre en compte rapidement les conditions initiales et surtout les signaux d'entrées composés.

### 3.9. Fonction de transfert – Transmittance

Un système dynamique linéaire est décrit par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 \cdot y(t) = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 \cdot x(t)$$

On se place dans les conditions de Heaviside (toutes les conditions initiales sont nulles).

On pose :  $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  et  $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité les conditions initiales étant nulles.

$$(b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot Y(p) = (a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot X(p)$$

ce qui permet d'écrire

$$Y(p) = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0} \cdot X(p)$$

On appelle

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}$$

la fonction de transfert (ou transmittance) du système.

Dans le cas des systèmes physiques, le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur :  $m > n$ .

### 3.10. Forme canonique

Il est toujours possible de mettre la fonction de transfert sous la forme suivante dite forme canonique avec :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \cdot \frac{N(p)}{p^\alpha \cdot D_1(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + 1}{p^\alpha (b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + 1)}$$

avec

- $N(p)$  : un polynôme en  $p$  avec  $N(0) = 1$ ;
- $D_1(p)$  : un polynôme en  $p$  avec  $D_1(0) = 1$ ;
- $K$  : le gain de la fonction de transfert;
- $\alpha$  : la classe de la fonction de transfert.

Pour les systèmes du premier et du second ordre, on mettra les fonctions de transfert sous la forme :

#### Premier ordre

$$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

avec  $K$  le gain statique et  $\tau$  la constante de temps.

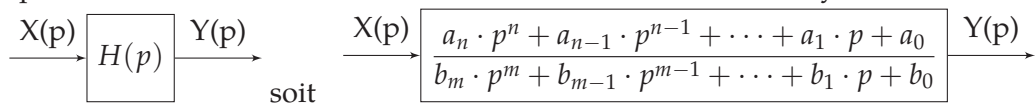
## Second ordre

$$H_2(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \zeta}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

avec  $K$  le gain statique,  $\zeta$  le coefficient d'amortissement et  $\omega_n$  la pulsation propre.

### 3.11. Schéma bloc

À partir de la fonction de transfert, on établit le schéma bloc du système



### 3.12. Pôles et zéros

On appelle

**zéros** : les racines de  $N(p) = 0$ , le polygone du numérateur.

**pôles** : les racines de  $D(p) = 0$ , le polynôme du dénominateur



### 4.1. Schéma fonctionnel ou schéma bloc

La représentation par le schéma fonctionnel permet de représenter de manière graphique un système linéaire.

Chaque bloc du schéma caractérise une des fonctions du système (un des constituants), on associe à chaque bloc la fonction de transfert du constituant qu'il représente. Les arcs qui relient les blocs portent les informations d'entrée et de sortie de la fonction de transfert.

On détermine la fonction de transfert de chaque constituant à partir des équations différentielles régissant son comportement. L'allure globale du schéma renseigne sur sa structure (boucle ouverte, boucle fermée).

Le système d'équations est ainsi remplacé par un schéma comportant un ensemble de blocs représentant les fonctions du système. Les branches entre les blocs portent les variables intermédiaires du système.

#### 4.1.1. Représentation d'un système par les schémas blocs

La description par la transformée de Laplace se prête bien à une représentation graphique de l'équation différentielle et de manière générale des systèmes linéaires

Pour tracer le schéma bloc, nous allons déterminer la fonction de transfert de chaque équation différentielle, puis associer à chacune un schéma bloc que nous allons relier.

### Exemple : Enceinte chauffée - description par les schémas-blocs

Le système représenté figure 4.1 est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne  $v$ , permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur. On note :

- $\alpha(t)$  : l'angle d'ouverture de la vanne.
- $q(t)$  : débit dans l'échangeur.
- $\theta_1$  : température en sortie de l'échangeur.
- $\theta$  : température dans l'enceinte

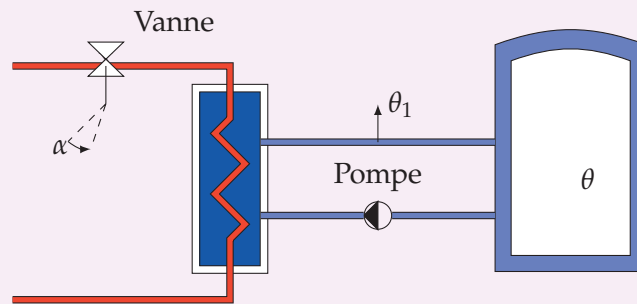


FIGURE 4.1. – Échangeur thermique

La loi de fonctionnement de la vanne est caractérisée par l'équation

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$$

donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture (le débit est proportionnel à l'ouverture de la vanne).

Les deux autres équations caractérisent le transfert de chaleur :

- dans l'échangeur :  $\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$  ;
- et dans l'enceinte :  $\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$ .

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles.

L'entrée du système est l'angle d'ouverture de la vanne  $\alpha(t)$  et la température de l'enceinte  $\theta$ , la sortie.

On note :  $A(p)$  la transformée de Laplace de  $\alpha(t)$  et  $Q(p)$ ,  $\Theta(p)$  et  $\Theta_1(p)$  respectivement les transformées de  $q(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $\theta_1(t)$ .

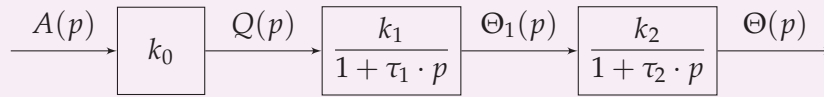
Dans le domaine de Laplace, les équations deviennent :

$$\begin{aligned} Q(p) &= k_0 \cdot A(p) \\ \Theta_1(p) + \tau_1 \cdot p \cdot \Theta_1(p) &= k_1 \cdot Q(p) \quad \Rightarrow \quad \Theta_1(p) \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) = k_1 \cdot Q(p) \\ \Theta(p) + \tau_2 \cdot p \cdot \Theta(p) &= k_2 \cdot \Theta_1(p) \quad \Rightarrow \quad \Theta(p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p) = k_2 \cdot \Theta_1(p) \end{aligned}$$

Il est possible d'écrire les fonctions de transfert

$$H_1(p) = \frac{Q(p)}{A(p)} = k_0 \quad ; \quad H_2(p) = \frac{\Theta_1(p)}{Q(p)} = \frac{k_1}{1 + \tau_1 \cdot p} \quad ; \quad H_3(p) = \frac{\Theta(p)}{\Theta_1(p)} = \frac{k_2}{1 + \tau_2 \cdot p}$$

d'où le schéma bloc du système.



Finalement, la fonction de transfert  $H_O(p) = \frac{\Theta(p)}{A(p)}$  du système complet :

$$H_O(p) = \frac{\Theta(p)}{A(p)} = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

À partir de la fonction de transfert du système il est possible de déterminer l'allure de l'évolution de la température, si par exemple on ouvre la vanne d'un angle constant (un échelon de consigne) :

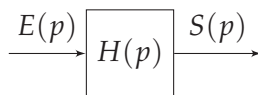
$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \mathcal{H}(t)$$

Déterminer l'allure de l'évolution de la température dans l'enceinte, tous les coefficients  $k_i$  et  $\tau_i$  étant positifs pour un échelon d'amplitude de l'ouverture de la vanne.

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \mathcal{H}(t)$$

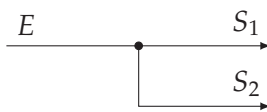
#### 4.1.2. Formalisme

**Bloc :**



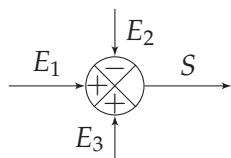
Le bloc est représenté par un cadre rectangulaire, il possède une entrée et une sortie, la fonction de transfert du bloc est déterminée d'après les équations de fonctionnement :  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ .

**Jonction :**



Une jonction est un point de prélèvement. La variable de la branche 1 est identique à celle de la branche 2 :  $S_1 = S_2 = E$ , un prélèvement d'information ne modifie pas la variable.

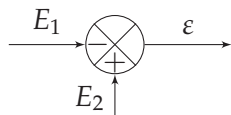
**Sommateur :**



Les sommateurs permettent d'additionner et soustraire des variables, ils possèdent plusieurs entrées mais une seule sortie :

$$S = E_1 - E_2 + E_3.$$

**Comparateur :**



Le comparateur est un cas particulier de sommateur, il permet de calculer la différence entre deux signaux :  $\varepsilon = E_1 - E_2$ .

La figure 4.2 montre le schéma-bloc d'un système.

## 4.2. Des équations différentielles au schéma-bloc

### Exercice 2- Circuit RC

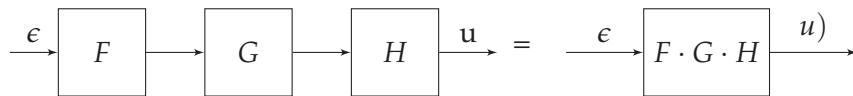
Corrigé page ??



.....  
 .....  
 .....  
 .....

### 4.3. Manipulation des schémas blocs

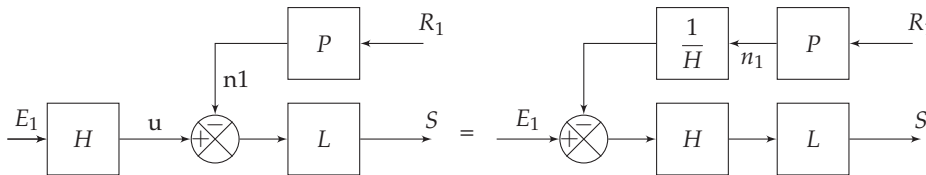
**Blocs en série :** Il est possible de remplacer des blocs en série (sans jonction ni sommateur entre chaque bloc) par le bloc produit des fonctions de chaque bloc. Ainsi :



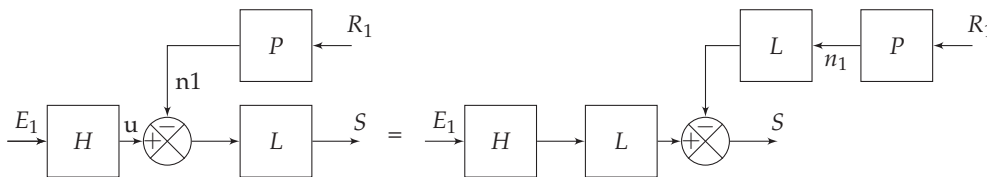
Il est important de noter que si les blocs ont un sens physique (ils sont la traduction du comportement d'un constituant), le bloc produit n'a lui qu'un sens mathématique.

**Déplacement d'un sommateur :** Il est souvent utile de déplacer un sommateur, soit pour faciliter l'analyse, soit (souvent) pour transformer un schéma bloc en un schéma bloc à retour unitaire.

— Déplacement vers l'amont :

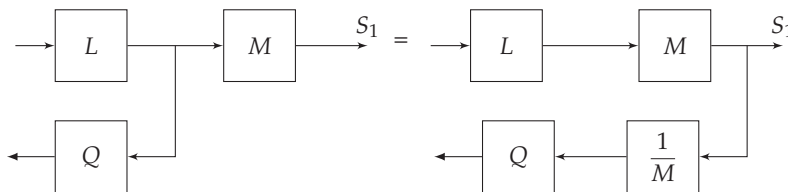


— Déplacement vers l'aval :

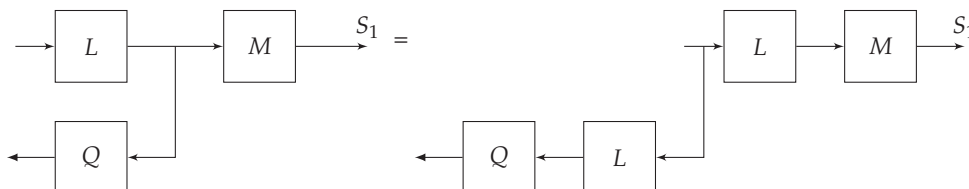


**Déplacement d'une jonction :** comme pour les sommateurs, il est souvent nécessaire de déplacer un point de prélèvement.

— Déplacement vers l'aval



— Déplacement vers l'amont



#### 4.3.1. Fonction de transfert d'un système linéaire à retour non unitaire

Soit un système décrit par le schéma bloc de la figure 4.4a  
 On appelle :

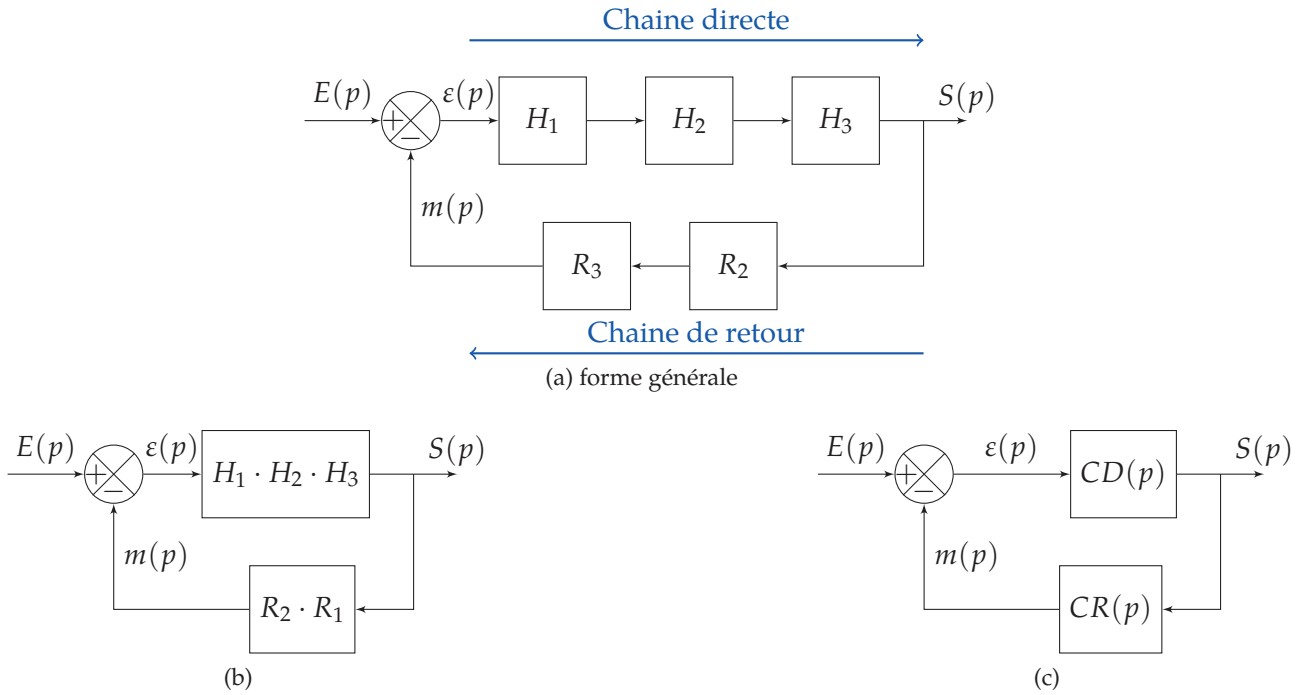


FIGURE 4.4. – Structure d'un système linéaire à retour non unitaire

**Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)**, la fonction définie par

$$BF(p) = \frac{S(p)}{E(p)};$$

**Chaine directe**, la chaine constituée des blocs reliant l'entrée et la sortie : on note,

$$CD(p) = \frac{S(p)}{\varepsilon(p)}, \text{ la fonction de transfert en chaine directe ;}$$

**Chaine de retour**, la chaine constituée des blocs reliant la sortie au comparateur : on note  $CR(p) = \frac{m(p)}{S(p)}$ , la fonction de transfert de la chaine de retour

**Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)**, la fonction définie par

$$BO(p) = \frac{m(p)}{\varepsilon(p)} = CD(p) \cdot CR(p).$$

Le schéma-bloc peut se ramener au schéma de la figure 4.4b que l'on peut mettre sous la forme de la figure 4.4c.

À partir de cette représentation on peut écrire les trois équations ci-dessous puis déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système

$$\begin{cases} S(p) = CD(p) \cdot \varepsilon(p) \\ m(p) = CR(p) \cdot S(p) \\ \varepsilon(p) = E(p) - m(p) \end{cases}$$

en substituant dans la 1<sup>re</sup> équation, on obtient :

$$S(p) = CD(p) \cdot (E(p) - CR(p) \cdot S(p))$$

soit

$$S(p) = \frac{CD(p)}{1 + CD(p) \cdot CR(p)} \cdot E(p)$$

ce qui permet d'écrire la fonction de transfert en boucle fermée :

$$BF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{CD(p)}{1 + CD(p) \cdot CR(p)}$$

que l'on écrit généralement :

$$BF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{CD(p)}{1 + BO(p)}$$

et que l'on nomme **formule de Black**

Dans le cas particulier où le schéma bloc est à retour unitaire (figure 4.5), alors la formule de Black devient.

$$BF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)}$$

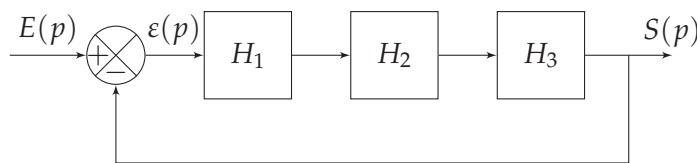


FIGURE 4.5. – Structure d'un système linéaire à retour unitaire

#### 4.4. Exemple guide : détermination d'une fonction de transfert

Il y a deux méthodes principales pour déterminer la fonction de transfert d'un système, la première méthode s'appuie sur la modification du schéma-bloc pour se ramener à une forme simple permettant d'appliquer la formule de Black, l'autre méthode est purement analytique. Souvent nous utiliserons une combinaison des deux.

##### 4.4.1. Détermination par la modification du schéma bloc

On reprend l'exemple de la figure 4.2.

**Étape 1 :** On commence par simplifier tous les blocs en série (figure 4.6).

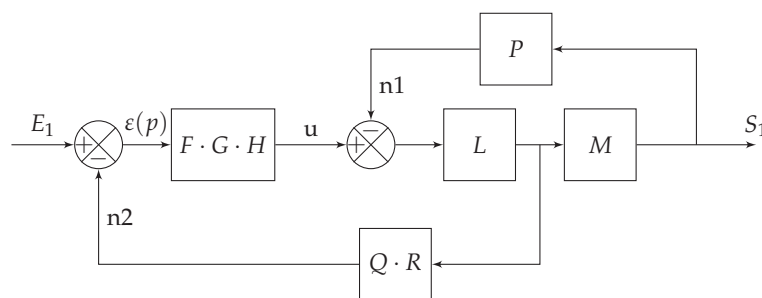


FIGURE 4.6. – Détermination fonction de transfert - étape 1

**Étape 2 :** Ensuite, il faut déplacer les jonctions ou les sommateurs qui sont entrelacés (sur la figure ??, on a choisit de déplacer la jonction vers l'aval).

.....  
 .....  
 .....  
 .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**Étape 3 :** On applique ensuite la formule de Black lorsque c'est possible, ici sur la boucle interne, on détermine la fonction de transfert  $\frac{S_1(p)}{U(p)}$  (figure ??).

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**Étape 4 :** Il ne reste plus qu'à appliquer la formule de Black (figure ??) :

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

#### 4.4.2. Détermination analytique

Pour déterminer analytiquement la fonction de transfert, il est préférable de partir de la sortie et de remonter vers l'entrée. Au préalable il est nécessaire de nommer toutes les entrées et sorties des sommateurs et des jonctions (figure 4.7).

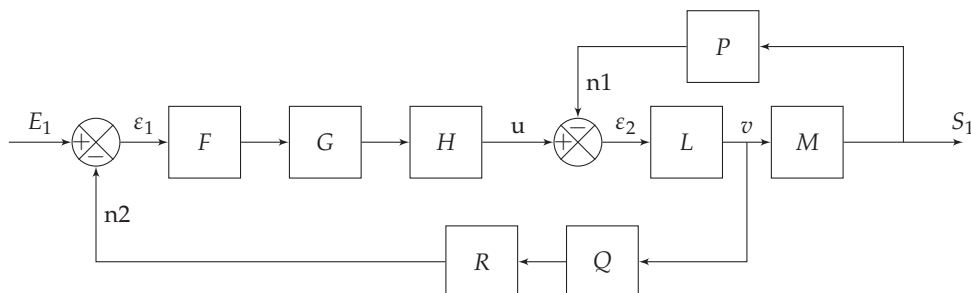


FIGURE 4.7. – Schéma-bloc - variables intermédiaires nommées

On écrit ensuite les différentes relations, en partant de chaque nœud de sortie (sortie générale, sortie des comparateurs, jonctions) en remontant jusqu'au nœud précédent.



$$\begin{cases} S_1(p) = M \cdot v(p) \\ v(p) = L \cdot \varepsilon_2(p) \\ \varepsilon_2(p) = F \cdot G \cdot H \cdot \varepsilon_1 - P \cdot S_1(p) \\ \varepsilon_1(p) = E_1(p) - R \cdot Q \cdot v(p) \end{cases}$$

On cherche à faire disparaître les sorties de comparateurs, d'abord  $\varepsilon_1$

$$\begin{cases} S_1(p) = M \cdot v(p) \\ v(p) = L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot \varepsilon_1 - L \cdot P \cdot S_1(p) \\ \varepsilon_1(p) = E_1(p) - R \cdot Q \cdot v(p) \end{cases}$$

puis  $\varepsilon_2$

$$\begin{cases} S_1(p) = M \cdot v(p) \\ v(p) = L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot (E_1(p) - R \cdot Q \cdot v(p)) - L \cdot P \cdot S_1(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1(p) = M \cdot v(p) \\ v(p) = L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot E_1(p) - L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot R \cdot Q \cdot v(p) - L \cdot P \cdot S_1(p) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} S_1(p) = M \cdot v(p) \\ v(p) (1 + L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot R \cdot Q) = L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot E_1(p) - L \cdot P \cdot S_1(p) \end{cases}$$

il reste à remplacer  $v(p)$

$$S_1(p) (1 + L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot R \cdot Q) = M \cdot L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot E_1(p) - M \cdot L \cdot P \cdot S_1(p)$$

en ré-organisant :

$$S_1(p) (1 + M \cdot L \cdot P + L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot R \cdot Q) = M \cdot L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot E_1(p)$$

d'où la fonction de transfert

$$\frac{S_1(p)}{E_1(p)} = \frac{M \cdot L \cdot F \cdot G \cdot H}{1 + M \cdot L \cdot P + L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot R \cdot Q}$$

### 4.4.3. Principe de superposition

Une des propriétés principales des systèmes linéaires est la superposition, on retrouve cette propriété dans la représentation par schéma blocs.

Le schéma 4.8 page suivante présente un système dont la sortie  $S$  dépend de deux entrées  $E_1$  et  $E_2$ .

Déterminons la sortie  $S(p)$  en fonction de  $E_1(p)$  et  $E_2(p)$ .

$$S(p) = H \cdot (F \cdot (E_1(p) - R \cdot S(p)) - G \cdot E_2(p))$$

$$S(p) = H \cdot F \cdot E_1(p) - H \cdot F \cdot R \cdot S(p) - H \cdot G \cdot E_2(p)$$

$$S(p) \cdot (1 + H \cdot F \cdot R) = H \cdot F \cdot E_1(p) - H \cdot G \cdot E_2(p)$$

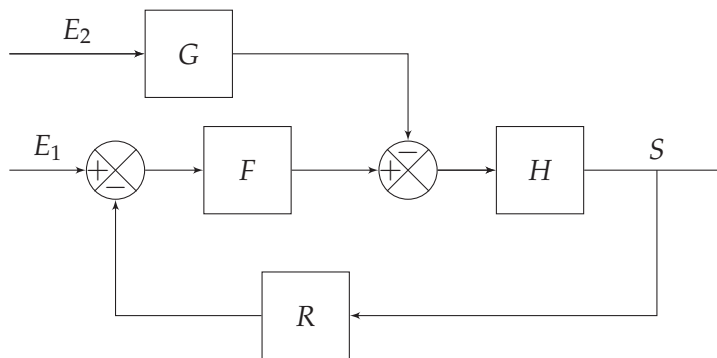


FIGURE 4.8. – Schéma-bloc avec 2 entrées

Finalement, on obtient la relation donnant  $S$  :

$$S(p) = \frac{H \cdot F}{1 + H \cdot F \cdot R} \cdot E_1(p) - \frac{H \cdot G}{1 + H \cdot F \cdot R} \cdot E_2(p)$$

Montrons que l'on peut déterminer cette fonction en utilisant la superposition

Dans un premier temps, on pose  $E_2(p) = 0$  (figure 4.9a), le schéma devient celui de la figure 4.9b

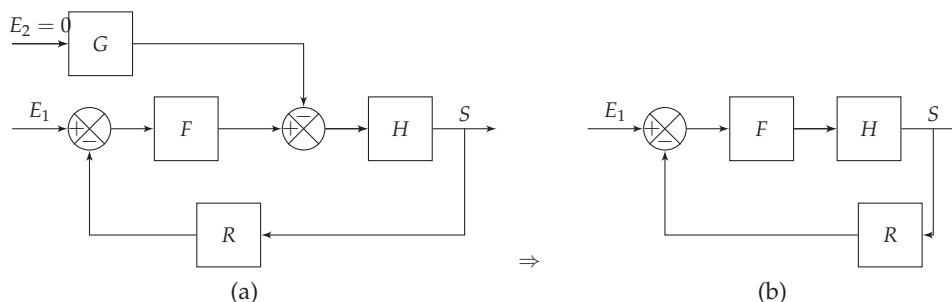


FIGURE 4.9. – Schéma-bloc

On détermine rapidement la fonction de transfert vis à vis de l'entrée  $E_1(p)$  pour  $E_2(p) = 0$ .

$$S(p)_{E_2(p)=0} = \frac{H \cdot F}{1 + H \cdot F \cdot R} \cdot E_1(p)$$

Dans un second temps, on pose  $E_1(p) = 0$  (figure 4.10a), le schéma devient celui de la figure 4.10b que l'on peut simplifier en déplaçant le signe négatif vers le sommateur (figure 4.10c). Finalement on peut mettre le schéma sous la forme classique de la figure 4.10d

On détermine ainsi rapidement la fonction de transfert vis à vis de l'entrée  $E_2(p)$  pour  $E_1(p) = 0$ .

$$S(p)_{E_1(p)=0} = -\frac{H \cdot G}{1 + H \cdot F \cdot R} \cdot E_2(p)$$

On retrouve bien en sommant les deux fonctions, la fonction donnant  $S(p)$  en fonction de  $E_1(p)$  et  $E_2(p)$  :

$$S(p) = S(p)_{E_2(p)=0} + S(p)_{E_1(p)=0}$$

$$S(p) = \frac{H \cdot F}{1 + H \cdot F \cdot R} \cdot E_1(p) - \frac{H \cdot G}{1 + H \cdot F \cdot R} \cdot E_2(p)$$

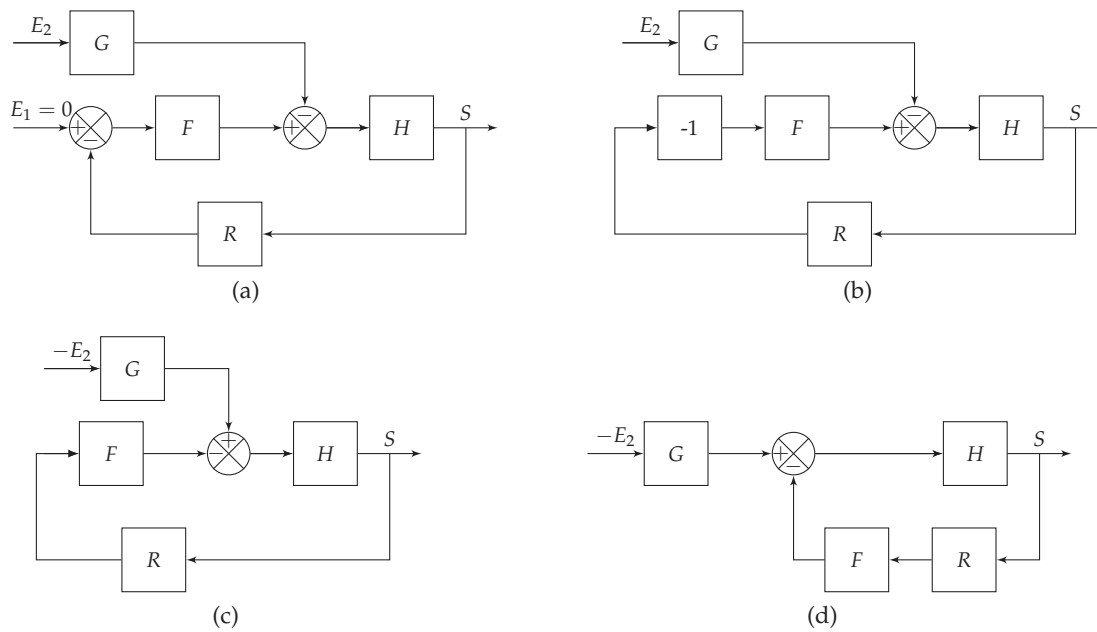


FIGURE 4.10. – Sschéma-bloc