CHAPITRE 3

DES SYSTÈMES LINÉAIRES AUX SYSTÈMES ASSERVIS

3.1 Systèmes linéaires continus invariants

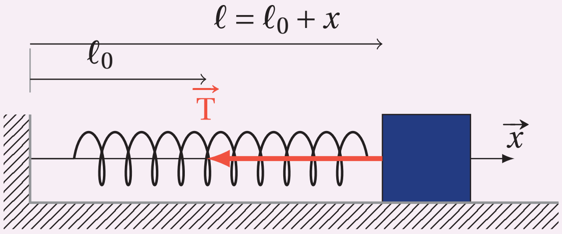
3.2 Définition

Définition : Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants [1]. Les systèmes linéaires possèdent principalement deux propriétés :

- la proportionnalité ;
- l'additivité.

3.3 Exemples

Exemple : Oscillateur harmonique horizontal



Hypothèse : Nous considérerons dans un premier temps que le contact masse / support est parfait (pas de frottements)

Pour établir l'équation différentielle, nous allons appliquer la deuxième loi de Newton (Principe Fondamental de la Dynamique en Translation) qui s'énonce : Dans un référen-

1. Les équations différentielles seront abordées dans la suite du cours et approfondies en mathématiques

tiel galiléen, la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le solide :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \overrightarrow{p_{S/\mathscr{R}_g}}\right]_{\mathscr{R}_g} = M \cdot \overrightarrow{a_{S/\mathscr{R}_g}}$$

avec $\overrightarrow{a_{S/\mathscr{R}_g}}$ l'accélération du solide par rapport au référentiel galiléen.

Inventaire des actions mécaniques extérieures :

- Le poids : $\overrightarrow{P} = -M \cdot g \cdot \overrightarrow{z}$;
- la réaction du support $\overrightarrow{R} = R \cdot \overrightarrow{z}$;
- l'action du ressort $\overrightarrow{T_x} = T_x \cdot \overrightarrow{x}$;

La deuxième loi de de Newton en projection sur l'axe $\left(O, \overrightarrow{x}\right)$ s'écrit :

$$T_x = m \cdot \ddot{x}(t) \quad \text{avec} \quad T_x = -K \cdot (\ell - \ell_0)$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \ddot{x}(t) + K \cdot x(t) = 0$$
$$m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{dt}^2} + K \cdot x(t) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant.

On obtient la solution de cette équation différentielle en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, montrons qu'elle est de la forme :

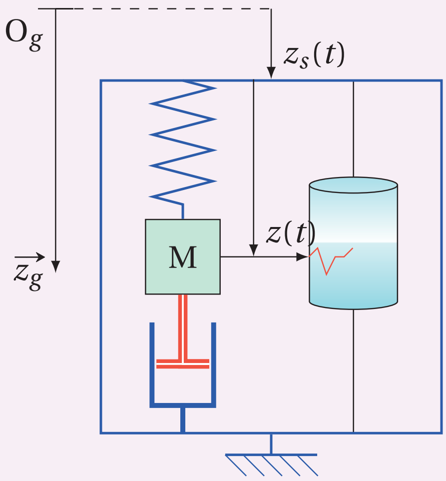
$$x(t) = A \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot t + \phi\right)$$

A l'amplitude et ϕ la phase à l'origine.

Un exemple légèrement plus complexe.

Exemple : Sismometre

Un sismographe est un instrument de mesure équipé d'un capteur des mouvements du sol, le sismomètre, capable de les enregistrer sur un support visuel, le sismogramme.



(a) Schéma

— $M = 10\,\mathrm{kg}$: masse de la masse M,

— $k = 36\,\mathrm{kN\,m^{-1}}$: raideur du ressort,

— l_0 : longueur à vide du ressort,

— h : coefficient de frottement fluide avec les valeurs suivantes : $h_1 = 2\,000\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$, $h_2 = 1\,200\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$, $h_3 = 600\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$.

(b) Données

FIGURE 3.1 – Sismomètre

Un sismographe simple est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur naturelle l_0, d'un amortisseur de coefficient de frottement h et d'une masse M considérée comme ponctuelle.

Le ressort et l'amortisseur sont fixés à un cadre(C) rigide solidaire du sol(S). L'amortisseur exerce sur la masse M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport au cadre.

Un stylet reproduisant les déplacements verticaux de la masse M par rapport au cadre est fixé au niveau de la masse M (voir figure 3.6).

On considère que l'axe vertical $\vec{z_g}$ est un des axes du référentiel galiléen.

On note, $z_s(t)$ le mouvement du sol et $z_s(t)$ le mouvement du stylet.

Le mouvement du stylet dépend de la sollicitation $(z_s(t))$, de la masse et des caractéristiques ressort et de l'amortisseur. On se propose de déterminer l'équation différentielle du mouvement, liant le mouvement du stylet $(z_s(t))$ au mouvement du sol $(z_s(t))$

Détermination de l'équation différentielle liant du mouvement liant $z_s(t)$ et $z_s(t)$.

La masse est soumise à 3 actions mécaniques :

— son poids

$$\vec{P} = M \cdot g \cdot \vec{z_g}$$

— l'action du ressort qui s'oppose à sa déformation

$$\vec{F_r} = -k \cdot (z - l_0) \cdot \vec{z_g}$$

— l'action de l'amortisseur, force de frottement fluide proportionnelle et opposée à la vitesse de déplacement de M par rapport au cadre :

$$\overrightarrow{F_a} = -h \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{dt}} \cdot \overrightarrow{z_g} = -h \cdot \dot{z}(t) \cdot \overrightarrow{z_g}$$

La masse M se déplace verticalement, la projection sur $\overrightarrow{z_g}$ dans le référentiel galiléen est : $\overrightarrow{O_g M} \cdot \overrightarrow{z_g} = z_s(t) + z(t)$.

Pour un mouvement de translation vertical, l'accélération est la dérivée seconde du déplacement, soit :

$$\overrightarrow{a_{S/\mathscr{R}_g}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{dt}^2} + \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{dt}^2}\right)\overrightarrow{z_g} = \left(\ddot{z}_s(t) + z\ddot{(t)}(t)\right)\overrightarrow{z_g}.$$

Le principe fondamental de la dynamique en translation s'écrit donc :

$$\mathrm{M} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z_s(t)}{\mathrm{dt}^2} + \mathrm{M} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{dt}^2} = \mathrm{M} \cdot g - k \cdot (z(t) - l_0) - h \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{dt}}$$

en réorganisant :

$$\mathrm{M} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{dt}^2} + h \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{dt}} + k \cdot z(t) = -\mathrm{M} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z_s(t)}{\mathrm{dt}^2} + \mathrm{M} \cdot g + k \cdot l_0$$

On obtient une équation différentielle du second ordre à coefficient constant que l'on peut simplifier en considérant les mouvements par rapport à la position d'équilibre au repos. À l'équilibre (pas de mouvement), $\frac{\mathrm{d}^2 z_s(t)}{\mathrm{dt}^2} = 0$, $\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{dt}^2} = 0$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{dt}} = 0$ et $z = z_e$, on peut écrire :

$$k \cdot z_e = \mathrm{M} \cdot g + k \cdot l_0$$

On pose $z = z_e = 0$ à l'équilibre, donc :

$$\mathrm{M} \cdot g + k \cdot l_0 = 0$$

L'équation différentielle se simplifie donc en :

$$\mathrm{M} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{dt}^2} + h \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{dt}} + k \cdot z(t) = -\mathrm{M} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z_s(t)}{\mathrm{dt}^2}$$
$$\mathrm{M} \cdot \ddot{z}(t) + h \cdot \dot{z}(t) + k \cdot z(t) = -\mathrm{M} \cdot \ddot{z}_s(t)$$

L'équation du mouvement est une équation différentielle du second ordre (dérivée seconde) à coefficients constants.

La sortie est ici $z(t)$, c'est à dire le tracé du stylet sur le rouleau, elle dépend de la sollicitation, l'entrée ici, $\ddot{z}_s(t)$ (c'est a dire l'accélération des mouvements du sol) et des coefficients (constants) de l'équation. Il ne reste plus qu'à la résoudre !

En définitive, étudier un système linéaire revient à étudier la solution de l'équation différentielle à coefficients constants.

3.4 Propriétés

3.4.1 Principe de proportionnalité

Définition : Si $y(t)$ est la réponse à l'entrée $x(t)$ alors $\lambda \cdot y(t)$ est la réponse à $\lambda \cdot x(t)$.

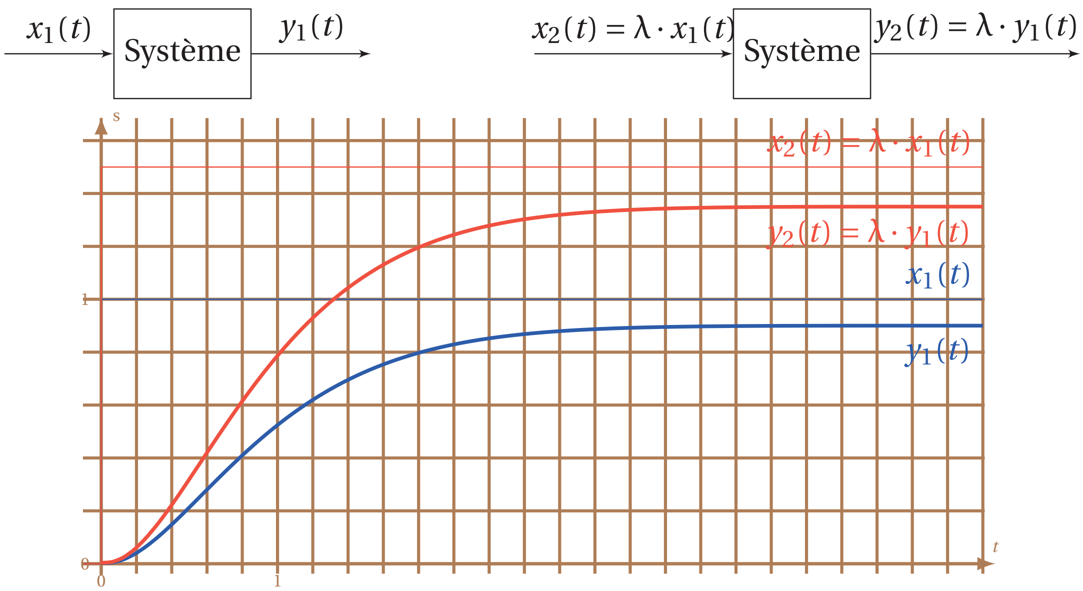
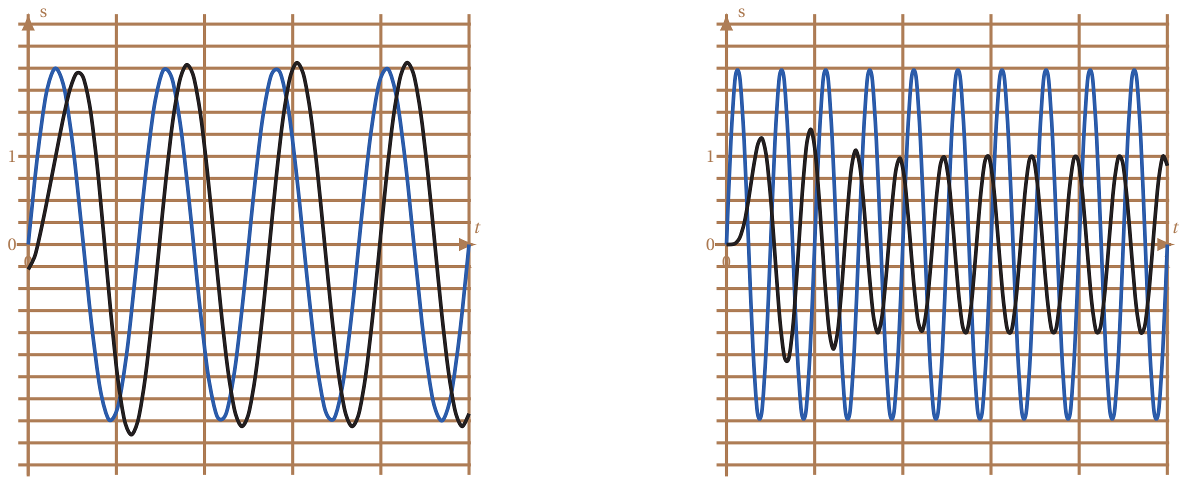


FIGURE 3.2 – Proportionalité

Dans un système linéaire, l'effet est proportionnel à la cause (figure 3.2).

L'effet de proportionnalité n'est effectif que lorsque le système a atteint sa position d'équilibre ou que le régime permanent s'est établi.

La caractéristique Entrée / Sortie d'un système linéaire est une droite dont la pente est appelée gain du système.



(a) $f = 4\,\mathrm{Hz}$ (b) $f = 10\,\mathrm{Hz}$

FIGURE 3.3 – Comportement en régime permanent

La réponse, en régime définitif (en régime permanent) d'un système linéaire à une entrée donnée est un signal de même nature que l'entrée. Sur la figure 3.3 on constate que la réponse en régime établi à une entrée sinusoïdale de fréquence f est aussi une sinusoïde de même fréquence mais déphasée et atténuée.

3.4.2 Additivité - principe de superposition

Définition : Si $y_1(t)$ est la réponse à l'entrée $x_1(t)$ et $y_2(t)$ est la réponse à l'entrée $x_2(t)$ alors, $y_1(t) + y_2(t)$ est la réponse à l'entrée $x_1(t) + x_2(t)$(figure 3.4)

Les principes de proportionnalité et de superposition vont nous permettre, connaissant la réponse d'un système à des sollicitations simples de déterminer par additivité et proportionnalité la réponse à des sollicitations plus complexes.

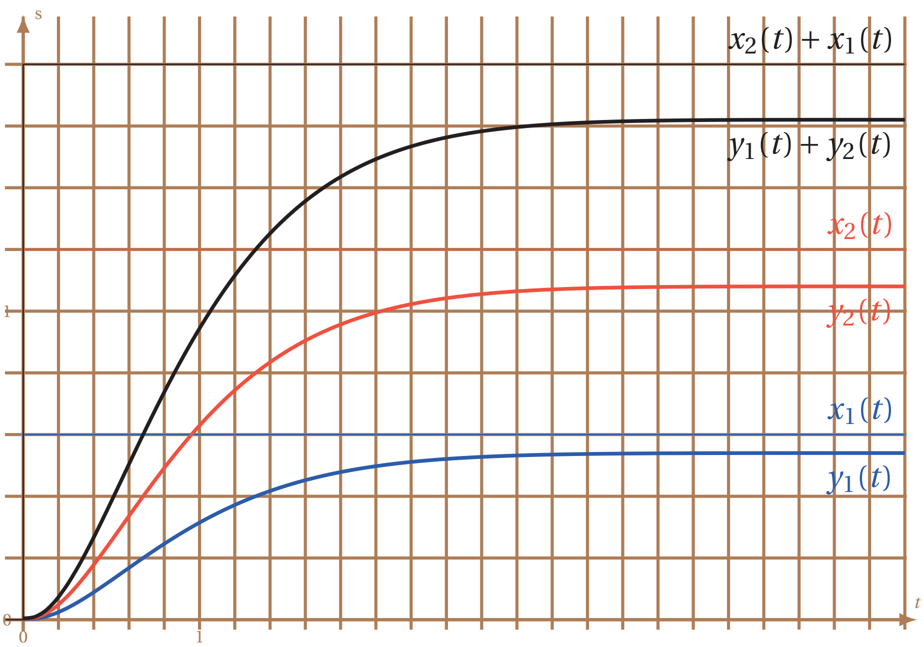


FIGURE 3.4 – Principe de superposition

3.4.3 Systèmes continus

Un système est dit continu lorsque les grandeurs physiques qui le caractérisent, évoluent de manière continue d'un état à un autre.

On oppose les systèmes continus aux systèmes discrets pour lesquels l'évolution d'un état à un autre se fait par « saut » d'une valeur à la suivante.

3.4.4 Systèmes invariants

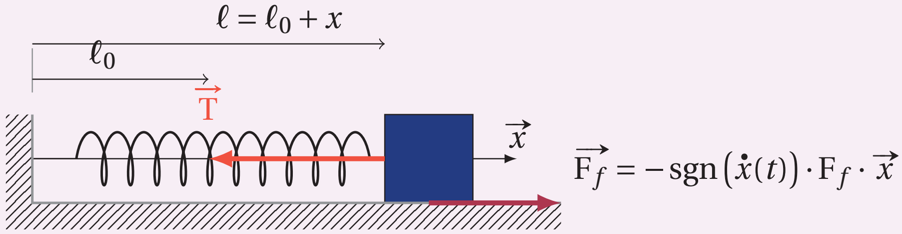
On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques du système ne se modifient pas dans le temps.

Remarque : Les systèmes réels ne sont ni linéaires, ni continus, ni invariants. Il est par contre toujours possible de modéliser correctement le système afin que celui ci puisse être considéré comme linéaire, continu et invariant dans la zone d'étude.

3.5 Principales non-linéarités

Les systèmes physiques présente en général des non linéarités, ainsi si nous reprenons le premier exemple de l'oscillateur harmonique en ajoutant un frottement solide (frottement sec) qui s'oppose avec un effort constant au déplacement, le système n'est plus linéaire.

Exemple : Oscillateur harmonique horizontal avec frottement sec



La deuxième loi de de Newton en projection sur l'axe $\left(O, \overrightarrow{x}\right)$ s'écrit :

$$K \cdot x(t) - \mathrm{sgn}\left(\dot{x}(t)\right)\cdot F_f = m \cdot \ddot{x}(t)$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \ddot{x}(t) + \mathrm{sgn}\left(\dot{x}(t)\right)\cdot F_f + K \cdot x(t) = 0$$

Cette équation n'est plus une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant. Elle est non linéaire.

Malgré tout, dans ce cas là, il est encore possible de résoudre cette équation en l'étudiant par morceau suivant le signe de la vitesse ($\dot{x}(t)$).

Les principales non linéarités :

Seuil : Un système présente un seuil si la sortie n'évolue que lorsque l'entrée dépasse une valeur minimale (seuil). Les seuils ont souvent pour origine des frottements secs.

Saturation Un système présente une saturation lorsque la sortie n'évolue plus au-delà d'une valeur limite.

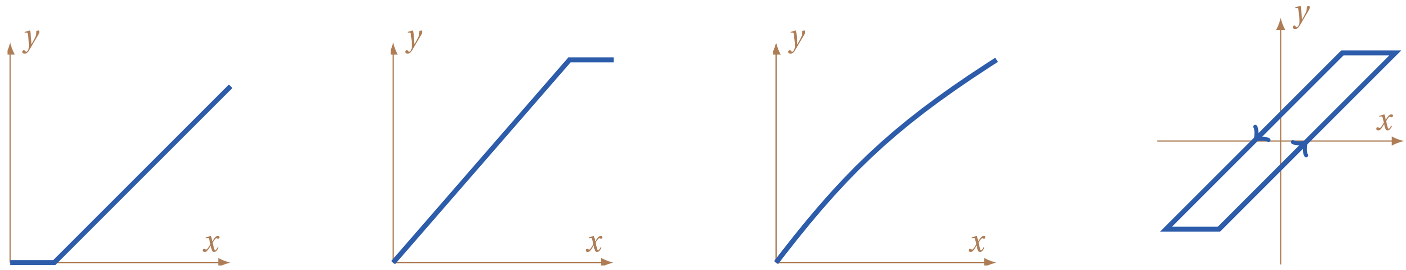
Ces saturations sont dues soit aux limites mécaniques du système (butées) soit aux limites des interfaces de puissance (saturation des amplificateurs opérationnels).

Courbure : La quasi totalité des systèmes présente des courbures plus ou moins prononcées.

Dans la plupart des cas le système est approché par une droite passant par l'origine, mais il est aussi possible de linéariser autour d'un point de fonctionnement.

Hystérésis : Un système présente une réponse avec une hystérésis lorsque le comportement est différent suivant le sens d'évolution de la variable d'entrée.

Exemple : cycle de magnétisation.



(a) seuil (b) saturation (c) courbure (d) hystérésis

FIGURE 3.5 – Non-linéarités

3.6 Étude des systèmes linéaires

L'étude et la caractérisation des systèmes linéaires ne passent pas obligatoirement par la résolution de l'équation différentielle surtout qu'il n'est pas toujours possible de résoudre celle-ci.

Nous allons voir dans un premier temps les principes de la résolution des équations différentielles avec les outils mathématiques classiques puis en utilisant la **transformation de Laplace** qui permet de travailler dans un espace dans lequel les équations différentielles sont représentées par des polynômes.

3.7 Description par les équations différentielles

Un système dynamique linéaire peut être décrit par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.

L'équation générale d'un système linéaire est de la forme :

$$b_m \frac{\mathrm{d}^m y(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 \cdot y(t) = a_n \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 \cdot x(t)$$

on note :

$$\frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{y}(t) \qquad \text{dérivée } 1^{\text{re}} \text{ de } y(t) \text{ par rapport au temps}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y}(t) \qquad \text{dérivée } 2^{\text{nd}} \text{ de } y(t) \text{ par rapport au temps}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} \qquad \text{dérivée } \mathrm{n}^{\text{me}} \text{ de } y(t) \text{ par rapport au temps}$$

Pour les systèmes réels, $m \geq n$ (principe de causalité [2])

2. nous verrons plus loin dans le cours

À partir de cette représentation il est possible de déterminer l'évolution temporelle de la sortie en résolvant l'équation différentielle.

3.7.1 Principe de résolution

Nous n'allons pas ici faire un cours de math, juste montrer les principes de la résolution dans des exemples simples.

Vous trouverez en annexe, un document plus complet sur la résolution des équations différentielles.

On considère deux formes d'équations différentielles à coefficients constants, les équations sans second membre, et celle avec second membre.

équation sans second membre :

$$a\cdot\frac{\mathrm{d}^2\,s(t)}{\mathrm{dt}^2}+b\cdot\frac{\mathrm{d}\,s(t)}{\mathrm{dt}}+c\cdot s(t)=0$$

équation avec second membre :

$$a\cdot\frac{\mathrm{d}^2\,s(t)}{\mathrm{dt}^2}+b\cdot\frac{\mathrm{d}\,s(t)}{\mathrm{dt}}+c\cdot s(t)=e(t)$$

Résoudre une équation avec second membre commence par résoudre une équation sans second membre puis il faut rechercher une solution particulière égale au second membre.

Pour une équation différentielle du 1er ordre,

$$\tau\cdot\frac{\mathrm{d}\,s(t)}{\mathrm{dt}}+s(t)=0$$

la réponse est de la forme :

$$s(t)=\mathrm{A}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec A une constante déterminée en fonction des conditions initiales.

Pour une équation différentielle d'ordre supérieur, montrons qu'une solution de la forme

$$s(t)=\mathrm{A}\cdot e^{r\cdot t}\quad\text{avec A réel et } r \text{ réel ou complexe}$$

existe.

Remplaçons $s(t)$ dans l'équation différentielle.

$$a\cdot\frac{\mathrm{d}^2\,s(t)}{\mathrm{dt}^2}+b\cdot\frac{\mathrm{d}\,s(t)}{\mathrm{dt}}+b\cdot s(t)=0$$

avec $\frac{\mathrm{d}\,s(t)}{\mathrm{dt}}=\mathrm{A}\cdot r\cdot e^{r\cdot t}$ et $\frac{\mathrm{d}^2\,s(t)}{\mathrm{dt}^2}=\mathrm{A}\cdot r^2\cdot e^{r\cdot t}$

$$\begin{aligned}a\cdot\mathrm{A}\cdot r^2\cdot e^{r\cdot t}+b\cdot\mathrm{A}\cdot r\cdot e^{r\cdot t}+c\cdot\mathrm{A}\cdot e^{r\cdot t}&=0\\ \mathrm{A}\cdot\left(a\cdot r^2+b\cdot r+c\right)\cdot e^{r\cdot t}&=0\end{aligned}$$

Cette égalité n'est nulle que si r est solution de l'équation du second degré :

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$$

On appelle cette équation, l'équation caractéristique de l'équation différentielle.

Si

— $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ alors il existe deux racines réelles : $r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$ et $r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$. La solution est alors de la forme :

$$s(t) = \mathrm{A}_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + \mathrm{A}_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

— $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ alors il existe deux racines complexes conjuguées : $r_1 = \dfrac{-b+j \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}$ et $r_2 = \dfrac{-b-j \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}$. La solution est alors de la forme :

$$s(t) = \mathrm{A}_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + \mathrm{A}_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

Remarque : l'exponentielle complexe : $e^{j \cdot \theta} = \cos\theta + j \cdot \sin\theta$

— $\Delta = 0$, alors l'équation à une racine réelle double $r_1 = \dfrac{-b}{2 \cdot a}$. On montre que la solution de l'équation différentielle est alors :

$$s(t) = (\mathrm{A}_1 \cdot t + \mathrm{A}_2) \cdot e^{r_1 \cdot t}$$

On le voit, on pourra étudier le comportement d'un système linéaire à partir de la réponse temporelle. Mais cette méthode est peu utilisé en automatique, on préfère utiliser une autre méthode, la transformation de Laplace.

Exercice 3- Moteur à courant continu - équation différentielle

Corrigé page 81

Le comportement simplifié d'un moteur à courant continu peut être décrit par les équations suivantes :

$$u(t) = \mathrm{R} \cdot i(t) + e(t)$$

$u(t)$: la tension d'alimentation, $i(t)$: le courant et $e(t)$ la force contre électromotrice.

$$\mathrm{J} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{dt}} = \mathrm{C}_m(t)$$

$\omega(t)$: la vitesse de rotation du moteur, $\mathrm{C}_m(t)$: le couple moteur.

$$\mathrm{C}_m(t) = \mathrm{K}_t \cdot i(t)$$
$$e(t) = \mathrm{K}_e \cdot \omega(t)$$

Q1. Donner l'équation différentielle donnant la vitesse de rotation $\omega(t)$ en fonction de la tension d'alimentation $u(t)$.

3.8 Description par la transformation de Laplace

Remarque : : pour toute cette partie et pour toute la suite, il est nécessaire de bien assimiler le cours sur la transformation de Laplace en annexe A.

L'utilisation de la transformée de Laplace pour la résolution des équations différentielles, a été développée par Heaviside.

La transformation permet de ramener l'étude des équations différentielles dans le domaine temporel, à une étude d'un polynôme dans le domaine symbolique.

Soit l'équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants

$$b_2 \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2} + b_1 \frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}} + b_0 \cdot s(t) = e(t)$$

avec les conditions initiales suivantes : $s(0^+) = a$ et $\dot{s}(0) = b$.

On pose :

$$\mathrm{E}(p) = \mathscr{L}\left(e(t)\right)$$

et

$$\mathrm{S}(p) = \mathscr{L}\left(s(t)\right)$$

on a aussi :

$$\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{dt}}\right) = p \cdot \mathrm{S}(p) - s(0)$$

et

$$\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2}\right) = p^2 \cdot \mathrm{S}(p) - p \cdot s(0) - \dot{s}(0)$$

En substituant :

$$b_2\left(p^2 \cdot \mathrm{S}(p) - p \cdot s(0) - \dot{s}(0^+)\right) + b_1\left(p \cdot \mathrm{S}(p) - s(0)\right) + b_0 \cdot \mathrm{S}(p) = \mathrm{E}(p)$$
$$\left(b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0\right) \cdot \mathrm{S}(p) - b_2 \cdot p \cdot s(0) - b_2 \cdot \dot{s}(0) - b_1 \cdot s(0) = \mathrm{E}(p)$$

$$\mathrm{S}(p) = \frac{\mathrm{E}(p) + b_2 \cdot p \cdot s(0) + b_2 \cdot \dot{s}(0) + b_1 \cdot s(0)}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}$$

La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.

En général, on se place dans les conditions de Heaviside, c'est à dire que les différentes conditions initiales sont nulles. si ce n'est pas le cas, on réalise un changement de variable qui permet de les annuler.

Dans les conditions de Heaviside, le résultat précédent devient :

$$\mathrm{S}(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \mathrm{E}(p)$$
$$\mathrm{S}(p) = \mathrm{H}(p) \cdot \mathrm{E}(p)$$

Ce résultat est important, il permet de montrer que dans le domaine symbolique, la sortie (la solution de l'équation différentielle) s'obtient comme le produit de :

— la transformée de Laplace du signal d'entrée : $\mathrm{E}(p) = \mathscr{L}\left(e(t)\right)$

— et d'une fraction rationnelle.

On appelle

$$\mathrm{H}(p) = \frac{\mathrm{S}(p)}{\mathrm{E}(p)}$$

La **fonction de transfert** du système linéaire.

On utilisera pour représenter le système, une représentation graphique, le schéma bloc :

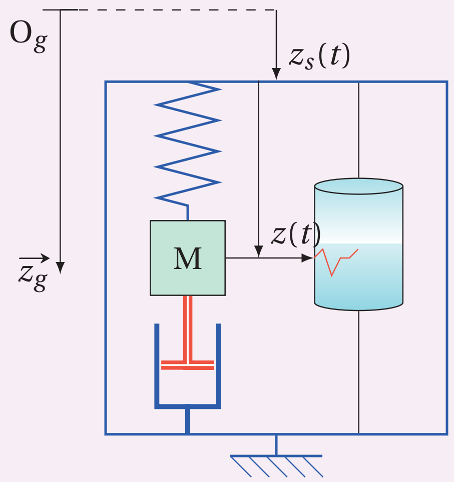
$$\xrightarrow{\mathrm{E(p)}} \boxed{\frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}} \xrightarrow{\mathrm{S(p)}}$$

La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.

Nous allons le montrer sur un exemple.

Exemple : Sismometre - suite

On poursuit l'étude du sismometre



(a) Schéma

— $M = 10\,kg$: masse de la masse M,
— $k = 36\,kN\,m^{-1}$: raideur du ressort,
— l_0 : longueur à vide du ressort,
— h : coefficient de frottement fluide avec les valeurs suivantes : $h_1 = 2\,000\,N\,s\,m^{-1}$, $h_2 = 1\,200\,N\,s\,m^{-1}$, $h_3 = 600\,N\,s\,m^{-1}$.

(b) Données

FIGURE 3.6 – Sismomètre

L'équation différentielle du mouvement du sysmomètre s'écrit :

$$M \cdot \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + h \cdot \frac{d z(t)}{dt} + k \cdot z(t) = -M \cdot \frac{d^2 z_s(t)}{dt^2}$$
$$M \cdot \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + h \cdot \frac{d z(t)}{dt} + k \cdot z(t) = -M \cdot \gamma_s(t)$$

avec $\gamma_s(t)$ l'accélération verticale du boitier.

On se place dans les conditions d'Heaviside (le sismomètre est à l'arrêt au début de l'étude, à l'équilibre).

On pose les transformées de Laplace : $\mathscr{L}(z_s(t)) = Z(p)$ et $\mathscr{L}\left(\gamma_s(t)\right) = \Gamma_s(p)$

L'équation différentielle devient dans le domaine symbolique :

$$M \cdot p^2 \cdot Z(p) + h \cdot p \cdot Z(p) + k \cdot Z(p) = -M \cdot \Gamma_s(p)$$
$$\left(M \cdot p^2 + h \cdot p + k\right) \cdot Z(p) = -M \cdot \Gamma_s(p)$$

soit :

$$Z(p) = \frac{-M}{M \cdot p^2 + h \cdot p + k} \cdot \Gamma_s(p)$$

Le système peut être représenté par le schéma bloc suivant :

$$\xrightarrow{\Gamma_s(p)} \boxed{\dfrac{-M}{M\cdot p^2+h\cdot p+k}} \xrightarrow{Z(p)}$$

Pour poursuivre, il faut définir la nature de l'entrée, supposons que le cadre est soumis à une impulsion (accélération très courte et de grande amplitude), cette impulsion peut être modélisée par une impulsion de Dirac. On a alors : $\gamma_s(t)=\delta(t)$.

La transformée de Laplace de l'accélération est : $\mathscr{L}\left(\gamma_s(t)\right)=\Gamma_s(p)=1$

$$Z(p)=\frac{-M}{M\cdot p^2+h\cdot p+k}$$

Compte tenu des valeurs numériques de $M=10\,\mathrm{kg}$ et $k=36\,\mathrm{kN\,m^{-1}}$, pour les différentes valeurs de h :

$h_1=2\,000\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$

$$Z(p)=\frac{-10}{10\cdot p^2+2\,000\cdot p+36\,000}=\frac{-1}{p^2+200\cdot p+3\,600}$$

Le dénominateur admet 2 racines réelles (voir la 1re étude)

$$Z(p)=\frac{-1}{\left(p+180\right)\cdot\left(p+20\right)}$$

La décomposition en fraction simple s'écrit :

$$Z(p)=\frac{A}{\left(p+180\right)}+\frac{B}{\left(p+20\right)}$$

Par identification on obtient :

$$Z(p)=\frac{1}{160\cdot\left(p+180\right)}-\frac{1}{160\cdot\left(p+20\right)}$$

À partir du tableau des transformées page 150, on déduit la réponse temporelle pour un Dirac :

$$z(t)=\left(\frac{1}{160}\cdot e^{-180\cdot t}-\frac{1}{160}\cdot e^{-20\cdot t}\right)\cdot\mathscr{H}(t)$$

$h_2=1\,200\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$

$$Z(p)=\frac{-10}{10\cdot p^2+1\,200\cdot p+36\,000}=\frac{-1}{p^2+120\cdot p+3\,600}$$

Le dénominateur admet 1 racine double

$$Z(p) = \frac{-1}{\left(p+60\right)^2}$$

À partir du tableau des transformées page 151 on obtient

$$z(t) = -t \cdot e^{-60 \cdot t} \cdot \mathscr{H}(t)$$

$h_3 = 600\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$

$$Z(p) = \frac{-1}{p^2 + 60 \cdot p + 3\,600}$$

Le dénominateur admet 2 racines complexes conjuguées, pour déterminer la transformée inverse, on doit mettre la fraction rationnelle sous la forme : $\dfrac{1}{{\omega_0}^2 + 2 \cdot z \cdot \omega_0 \cdot p + p^2}$ (tableau de la page 151)

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{-1}{p^2 + 60 \cdot p + 3\,600} \\ &= \frac{-1}{p^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 60 \cdot p + 60^2} \end{aligned}$$

soit $\omega_0 = 60\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et $z = 0{,}5$. On retrouve la fonction temporelle à partir du tableau :

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{60 \cdot \sqrt{1-0{,}5^2}} e^{-0{,}5 \cdot 60 \cdot t} \cdot \sin\left(60\sqrt{1-0{,}5^2} \cdot t\right) \cdot \mathscr{H}(t) \\ z(t) &= \frac{1}{30 \cdot \sqrt{3}} e^{-30 \cdot t} \cdot \sin\left(30 \cdot \sqrt{3} \cdot t\right) \cdot \mathscr{H}(t) \end{aligned}$$

La résolution complète à partir de la résolution de l'équation différentielle est à la fin du chapitre page 78

La transformée de Laplace permet donc de résoudre les équations différentielles à coefficients constants. Cette méthode ne permet pas de résoudre d'autres équations que celle que l'on pourraient résoudre par la méthode classique, par contre elle permet de prendre en compte rapidement les conditions initiales et surtout les signaux d'entrées composés.

3.9 Fonction de transfert – Transmittance

Un système dynamique linéaire est décrit par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.

$$b_m \frac{\mathrm{d}^m y(t)}{\mathrm{dt}^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} y(t)}{\mathrm{dt}^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{dt}} + b_0 \cdot y(t) = a_n \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{dt}^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{dt}^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{dt}} + a_0 \cdot x(t)$$

On se place dans les conditions de Heaviside (toutes les conditions initiales sont nulles).

On pose : $\mathscr{L}\left(x(t)\right) = \mathrm{X}(p)$ et $\mathscr{L}\left(y(t)\right) = \mathrm{Y}(p)$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité les conditions initiales étant nulles.

$$\left(b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0\right) \cdot \mathrm{Y}(p) = \left(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0\right) \cdot \mathrm{X}(p)$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{Y}(p) = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0} \cdot \mathrm{X}(p)$$

On appelle

$$\mathrm{H}(p) = \frac{\mathrm{Y}(p)}{\mathrm{X}(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0}$$

la fonction de transfert (ou transmittance) du système.

Dans le cas des systèmes physiques, le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur : $m > n$.

3.10 Forme canonique

Il est toujours possible de mettre la fonction de transfert sous la forme suivante dite forme canonique avec :

$$\mathrm{H}(p) = \frac{\mathrm{N}(p)}{\mathrm{D}(p)} = \mathrm{K} \cdot \frac{\mathrm{N}(p)}{p^\alpha \cdot \mathrm{D}_1(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + 1}{p^\alpha \left(b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + 1\right)}$$

avec

- $\mathrm{N}(p)$: un polynôme en p avec $\mathrm{N}(0) = 1$;
- $\mathrm{D}_1(p)$: un polynôme en p avec $\mathrm{D}_1(0) = 1$;
- K : le gain de la fonction de transfert ;
- α : la classe de la fonction de transfert.

3.11 Schéma bloc

À partir de la fonction de transfert, on établit le schéma bloc du système

$$\xrightarrow{X(p)} \boxed{H(p)} \xrightarrow{Y(p)} \quad \text{soit} \quad \xrightarrow{X(p)} \boxed{\dfrac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0}} \xrightarrow{Y(p)}$$

3.12 Pôles et zéros

On appelle

zéros : les racines de $N(p) = 0$, le polygone du numérateur.

pôles : les racines de $D(p) = 0$, le polynôme du dénominateur