CHAPITRE 4

REPRÉSENTATION D'UN SYSTÈME PAR LES SCHÉMAS BLOCS

4.1 Schéma fonctionnel ou schéma bloc

La représentation par le schéma fonctionnel permet de représenter de manière graphique un système linéaire.

Chaque bloc du schéma caractérise une des fonctions du système (un des constituants), on associe à chaque bloc la fonction de transfert du constituant qu'il représente. Les arcs qui relient les blocs portent les informations d'entrée et de sortie de la fonction de transfert.

On détermine la fonction de transfert de chaque constituant à partir des équations différentielles régissant son comportement. L'allure globale du schéma renseigne sur sa structure (boucle ouverte, boucle fermée).

Le système d'équations est ainsi remplacé par un schéma comportant un ensemble de blocs représentant les fonctions du système. Les branches entre les blocs portent les variables intermédiaires du système.

4.1.1 Représentation d'un système par les schémas blocs

La description par la transformée de Laplace se prête bien à une représentation graphique de l'équation différentielle et de manière générale des systèmes linaires

Pour tracer le schéma bloc, nous allons déterminer la fonction de transfert de chaque équation différentielle, puis associer à chacune un schéma bloc que nous allons relier.

Exemple : Enceinte chauffée - description par les schémas-blocs

Le système représenté figure 4.1 est chargé de maintenir la température d'une enceinte Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne v, permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur. On note :

— $\alpha(t)$: l'angle d'ouverture de la vanne.

— $q(t)$: débit dans l'échangeur.

— θ_1 : température en sortie de l'échangeur.

— θ : température dans l'enceinte

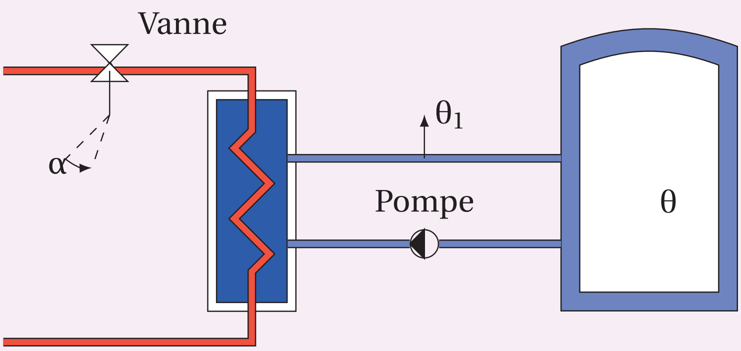


FIGURE 4.1 – Échangeur thermique

La loi de fonctionnement de la vanne est caractérisée par l'équation

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$$

donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture (le débit est proportionnel à l'ouverture de la vanne).

Les deux autres équations caractérisent le transfert de chaleur :

— dans l'échangeur : $\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \dfrac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$;

— et dans l'enceinte : $\theta(t) + \tau_2 \cdot \dfrac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$.

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles.

L'entrée du système est l'angle d'ouverture de la vanne $\alpha(t)$ et la température de l'enceinte θ, la sortie.

On note : $A(p)$ la transformée de Laplace de $\alpha(t)$ et $Q(tp)$, $\Theta(p)$ et $\Theta_1(p)$ respectivement les transformées de $q(t)$, $\theta(t)$ et $\theta_1(t)$.

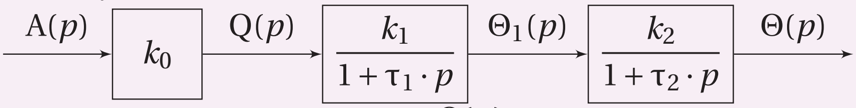
Dans le domaine de Laplace, les équations deviennent :

$$Q(p) = k_0 \cdot A(p)$$
$$\Theta_1(p) + \tau_1 \cdot p \cdot \Theta_1(p) = k_1 \cdot Q(p) \quad \Rightarrow \quad \Theta_1(p) \cdot \left(1 + \tau_1 \cdot p\right) = k_1 \cdot Q(p)$$
$$\Theta(p) + \tau_2 \cdot p \cdot \Theta(p) = k_2 \cdot \Theta_1(p) \quad \Rightarrow \quad \Theta(p) \cdot \left(1 + \tau_2 \cdot p\right) = k_2 \cdot \Theta_1(p)$$

Il est possible d'écrire les fonctions de transfert

$$H_1(p) = \frac{Q(tp)}{A(p)} = k_0 \quad ; \quad H_2(p) = \frac{\Theta_1(p)}{Q(p)} = \frac{k_1}{1 + \tau_1 \cdot p} \quad ; \quad H_3(p) = \frac{\Theta(p)}{\theta_1(p)} = \frac{k_2}{1 + \tau_2 \cdot p}$$

d'où le schéma bloc du système.



Finalement, la fonction de transfert $H_O(p) = \dfrac{\Theta(p)}{A(p)}$ du système complet :

$$H_O(p) = \frac{\Theta(p)}{A(p)} = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{\left(1 + \tau_1 \cdot p\right) \cdot \left(1 + \tau_2 \cdot p\right)}$$

À partir de la fonction de transfert du système il est possible de déterminer l'allure de l'évolution de la température, si par exemple on ouvre la vanne d'un angle constant (un échelon de consigne) :

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \mathscr{H}(t)$$

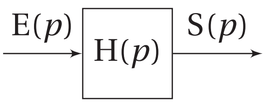
Déterminer l'allure de l'évolution de la température dans l'enceinte, tous les coefficients k_i etτ_i étant positifs pour un échelon d'amplitude de l'ouverture de la vanne.

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \mathscr{H}(t)$$

Cet exemple sera repris en TD.

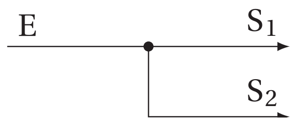
4.1.2 Formalisme

Bloc :



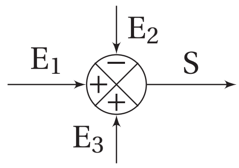
Le bloc est représenté par un cadre rectangulaire, il possède une entrée et une sortie, la fonction de transfert du bloc est déterminée d'après les équations de fonctionnement : $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$.

Jonction :



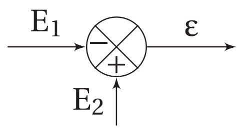
Une jonction est un point de prélèvement. La variable de la branche 1 est identique à celle de la branche 2 : $S_1 = S_2 = E$, un prélèvement d'information ne modifie pas la variable.

Sommateur :



Les sommateurs permettent d'additionner et soustraire des variables, ils possèdent plusieurs entrées mais une seule sortie : $S = E_1 - E_2 + E_3$.

Comparateur :



Le comparateur est un cas particulier de sommateur, il permet de calculer la différence entre deux signaux : $\varepsilon = E_1 - E_2$.

La figure 4.2 montre le schéma-bloc d'un système.

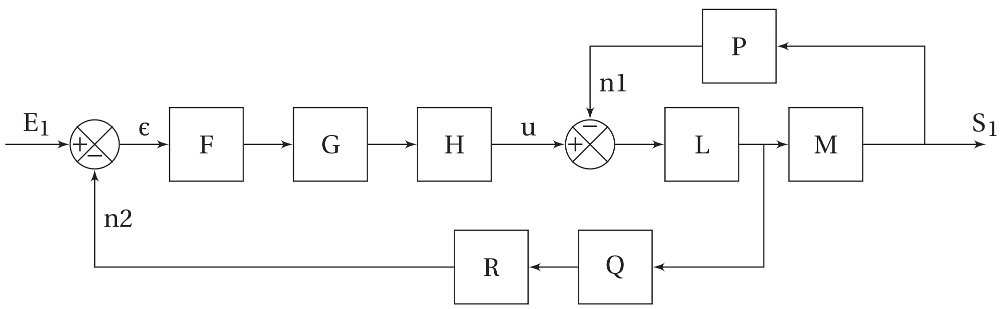


FIGURE 4.2 – Sschéma-bloc

4.2 Des équations différentielles au schéma-bloc

Exercice 4- Circuit RC

Corrigé page 81

On se propose de déterminer l'évolution de la tension aux bornes du condensateur ($v_s(t)$) en fonction de l'évolution de la tension d'entrée du circuit ($v_e(t)$) du circuit RC (figure 4.3).

Les relations qui décrivent le fonctionnement sont :

— La loi d'Ohm aux bornes de la résistance : $v_e(t) - v_s(t) = R \cdot i(t)$

— La relation caractéristique d'un condensateur parfait : $i(t) = C \cdot \dfrac{d\,v_s(t)}{dt}$

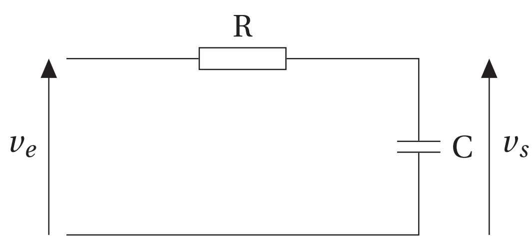


FIGURE 4.3 – Circuit RC

A. Étude

A.1. Résolution classique

Q1. Établir l'équation différentielle reliant la tension aux bornes du condensateur et la tension d'entrée.

Q2. Résoudre l'équation différentielle si on soumet le circuit complètement déchargé ($v_s(0) = 0$) à un échelon de tension ($v_e(t) = \mathrm{U_0 V}$ pour $t > 0$).

Q3. Tracer l'allure de la réponse temporelle.

A.2. Résolution par la transformée de Laplace

Q4. Ecrire les équations différentielles dans le domaine de Laplace

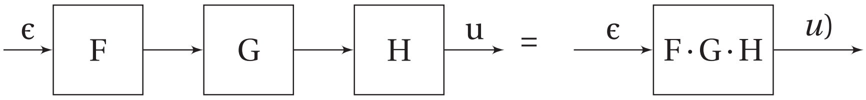
Q5. Tracer le schéma bloc

Q6. Déterminer la fonction de transfert $\dfrac{\mathrm{V}_s(p)}{\mathrm{V}_e(p)}$

Q7. Déterminer $v_s(t)$ pour $v_e(t) = \mathrm{U_0 V}$ puis pour un créneau de durée $\mathrm{T} = 10 \cdot \mathrm{R} \cdot \mathrm{C}$

4.3 Manipulation des schémas blocs

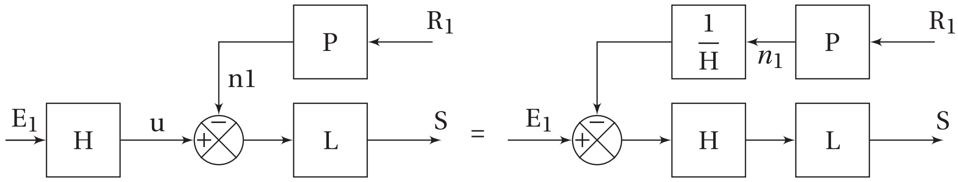
Blocs en série : Il est possible de remplacer des blocs en série (sans jonction ni sommateur entre chaque bloc) par le bloc produit des fonctions de chaque bloc. Ainsi :



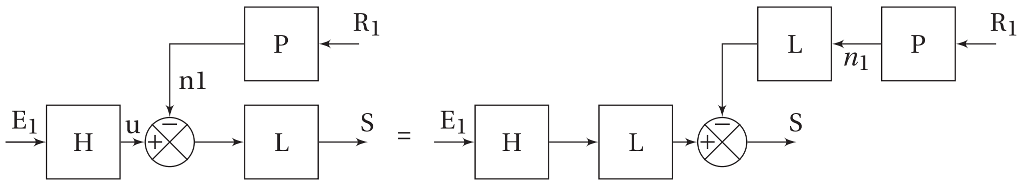
Il est important de noter que si les blocs ont un sens physique (ils sont la traduction du comportement d'un constituant) , le bloc produit n'a lui qu'un sens mathématique.

Déplacement d'un sommateur : Il est souvent utile de déplacer un sommateur, soit pour faciliter l'analyse, soit (souvent) pour transformer un schéma bloc en un schéma bloc à retour unitaire.

- Déplacement vers l'amont :

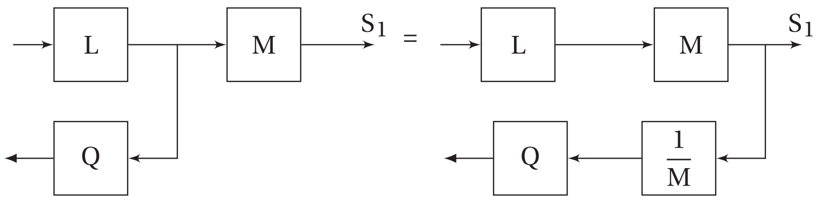


- Déplacement vers l'aval :

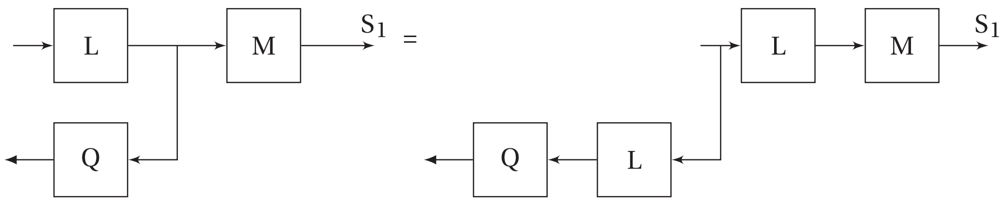


Déplacement d'une jonction : comme pour les sommateurs, il est souvent nécessaire de déplacer un point de prélèvement.

- Déplacement vers l'aval



- Déplacement vers l'amont



4.3.1 Fonction de transfert d'un système linéaire à retour non unitaire

Soit un système décrit par le schéma bloc de la figure 4.4a
On appelle :

Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF), la fonction définie par

$$\mathrm{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)};$$

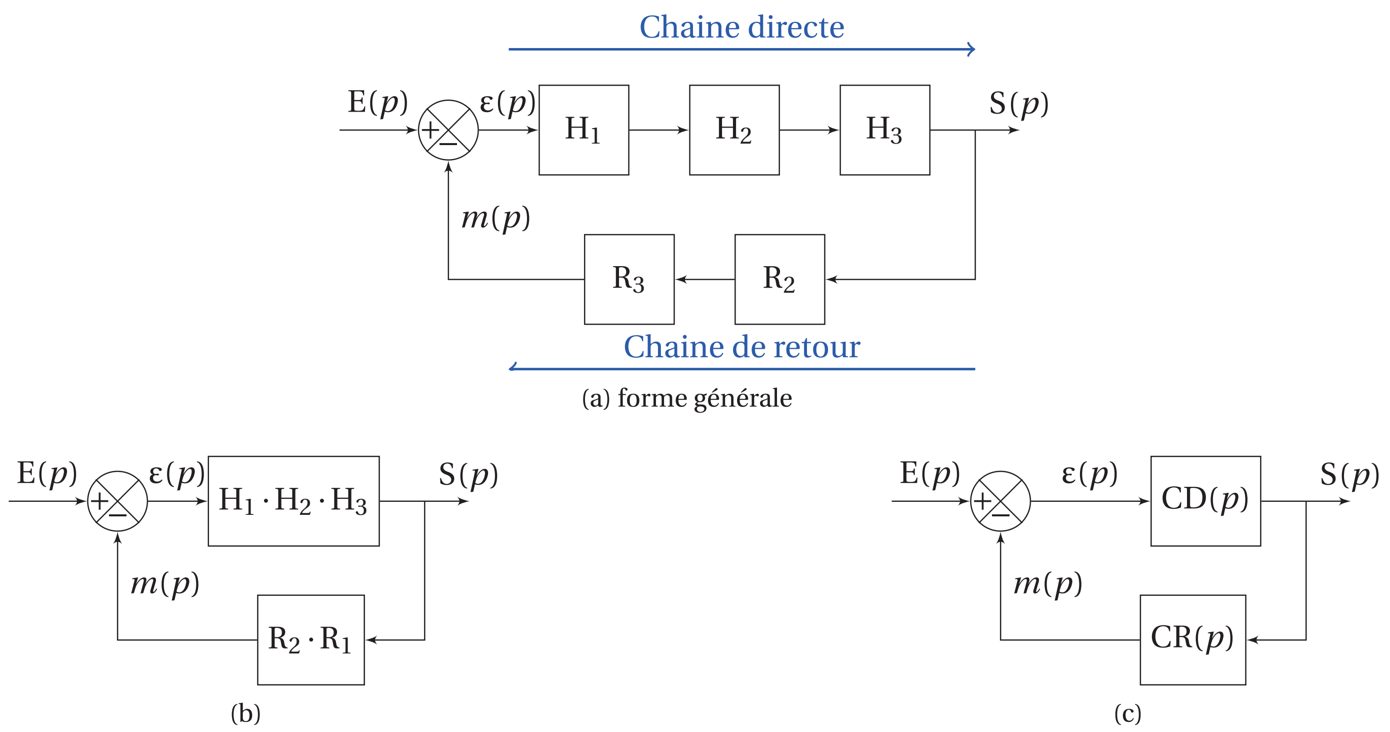


FIGURE 4.4 – Structure d'un système linéaire à retour non unitaire

Chaine directe, la chaine constituée des blocs reliant l'entrée et la sortie : on note,

$\mathrm{CD}(p) = \dfrac{\mathrm{S}(p)}{\varepsilon(p)}$, la fonction de transfert en chaine directe ;

Chaine de retour, la chaine constituée des blocs reliant la sortie au comparateur : on note $\mathrm{CR}(p) = \dfrac{m(p)}{\mathrm{S}(p)}$, la fonction de transfert de la chaine de retour

Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) , la fonction définie par

$\mathrm{BO}(p) = \dfrac{m(p)}{\varepsilon(p)} = \mathrm{CD}(p) \cdot \mathrm{CR}(p)$.

Le schéma-bloc peut se ramener au schéma de la figure 4.4b que l'on peut mettre sous la forme de la figure 4.4c.

À partir ce cette représentation on peut écrire les trois équations ci-dessous puis déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système

$$\begin{cases} \mathrm{S}(p) = \mathrm{CD}(p) \cdot \varepsilon(p) \\ m(p) = \mathrm{CR}(p) \cdot \mathrm{S}(p) \\ \varepsilon(p) = \mathrm{E}(p) - m(p) \end{cases}$$

en substituant dans la 1re équation, on obtient :

$$\mathrm{S}(p) = \mathrm{CD}(p) \cdot \big(\mathrm{E}(p) - \mathrm{CR}(p) \cdot \mathrm{S}(p)\big)$$

soit

$$\mathrm{S}(p) = \frac{\mathrm{CD}(p)}{1 + \mathrm{CD}(p) \cdot \mathrm{CR}(p)} \cdot \mathrm{E}(p)$$

ce qui permet d'écrire la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\mathrm{BF}(p) = \frac{\mathrm{S}(p)}{\mathrm{E}(p)} = \frac{\mathrm{CD}(p)}{1+\mathrm{CD}(p)\cdot\mathrm{CR}(p)}$$

que l'on écrit généralement :

$$\mathrm{BF}(p) = \frac{\mathrm{S}(p)}{\mathrm{E}(p)} = \frac{\mathrm{CD}(p)}{1+\mathrm{BO}(p)}$$

et que l'on nomme **formule de Black**

Dans le cas particulier ou le schéma bloc est à retour unitaire (figure 4.5), alors la formule de Black devient.

$$\mathrm{BF}(p) = \frac{\mathrm{S}(p)}{\mathrm{E}(p)} = \frac{\mathrm{BO}(p)}{1+\mathrm{BO}(p)}$$

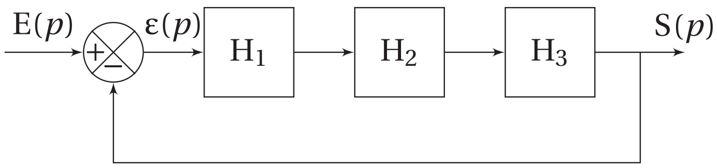


FIGURE 4.5 – Structure d'un système linéaire à retour unitaire

4.4 Exemple guide : détermination d'une fonction de transfert

Il y a deux méthodes principales pour déterminer la fonction de transfert d'un système, la prémière méthode s'appuie sur la modification du schéma-bloc pour se ramener à une forme simple permettant d'appliquer la formule de Black, l'autre méthode est purement analytique. Souvent nous utiliserons une combinaison des deux.

4.4.1 Détermination par la modification du schéma bloc

On reprend l'exemple de la figure 4.2.

Étape 1 : On commence par simplifier tous les blocs en série (figure 4.6).

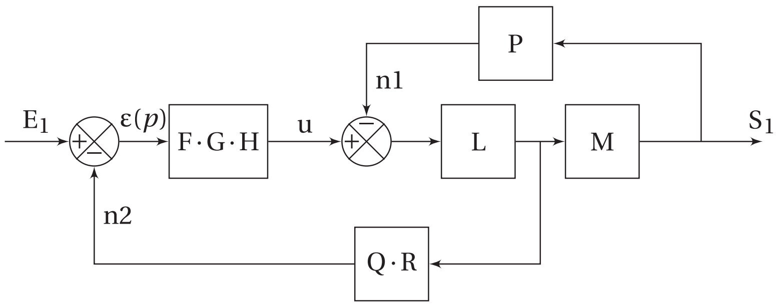


FIGURE 4.6 – Détermination fonction de transfert - étape 1

Étape 2 : Ensuite, il faut déplacer les jonctions ou les sommateurs qui sont entrelacés (sur la figure **??**, on a choisit de déplacer la jonction vers l'aval).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Étape 3 : On applique ensuite la formule de Black lorsque c'est possible, ici sur la boucle interne, on détermine la fonction de transfert $\dfrac{\mathrm{S1}(p)}{\mathrm{U}(p)}$ (figure **??**).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Étape 4 : Il ne reste plus qu'à appliquer la formule de Black (figure **??**) :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4.4.2 Détermination analytique

Pour déterminer analytiquement la fonction de transfert, il est préférable de partir de la sortie et de remonter vers l'entrée. Au préalable il est nécessaire de nommer toutes les entrées et sorties des sommateurs et des jonctions (figure4.7).

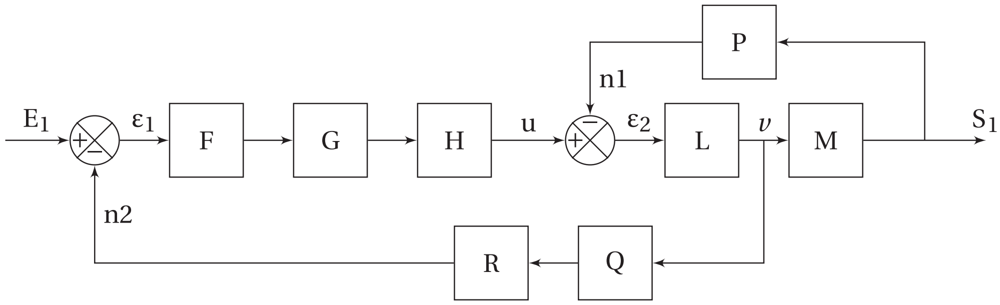


FIGURE 4.7 – Schéma-bloc - variables intermédiaires nommées

On écrit ensuite les différentes relations, en partant de chaque nœud de sortie (sortie générale, sortie des comparateurs, jonctions) en remontant jusqu'au nœud précédent.

$$\begin{cases} S_1(p) = M \cdot v(p) \\ v(p) = L \cdot \varepsilon_2(p) \\ \varepsilon_2(p) = F \cdot G \cdot H \cdot \varepsilon_1 - P \cdot S_1(p) \\ \varepsilon_1(p) = E_1(p) - R \cdot Q \cdot v(p) \end{cases}$$

On cherche à faire disparaitre les sorties de comparateurs, d'abord ε_1

$$\begin{cases} S_1(p) = M \cdot v(p) \\ v(p) = L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot \varepsilon_1 - L \cdot P \cdot S_1(p) \\ \varepsilon_1(p) = E_1(p) - R \cdot Q \cdot v(p) \end{cases}$$

puis ε_2

$$\begin{cases} S_1(p) = M \cdot v(p) \\ v(p) = L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot \left(E_1(p) - R \cdot Q \cdot v(p)\right) - L \cdot P \cdot S_1(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1(p) = M \cdot v(p) \\ v(p) = L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot E_1(p) - L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot R \cdot Q \cdot v(p) - L \cdot P \cdot S_1(p) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} S_1(p) = M \cdot v(p) \\ v(p)\,(1 + L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot R \cdot Q) = L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot E_1(p) - L \cdot P \cdot S_1(p) \end{cases}$$

il reste à remplacer $v(p)$

$$S_1(p)\,(1 + L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot R \cdot Q) = M \cdot L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot E_1(p) - M \cdot L \cdot P \cdot S_1(p)$$

en ré-organisant :

$$S_1(p)\,(1 + M \cdot L \cdot P \cdot + L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot R \cdot Q) = M \cdot L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot E_1(p)$$

d'où la fonction de transfert

$$\frac{S_1(p)}{E_1(p)} = \frac{M \cdot L \cdot F \cdot G \cdot H}{1 + M \cdot L \cdot P \cdot + L \cdot F \cdot G \cdot H \cdot R \cdot Q}$$

4.4.3 Principe de superposition

Une des propriétés principales des systèmes linéaires est la superposition, on retrouve cette propriétés dans la représentation par schéma blocs.

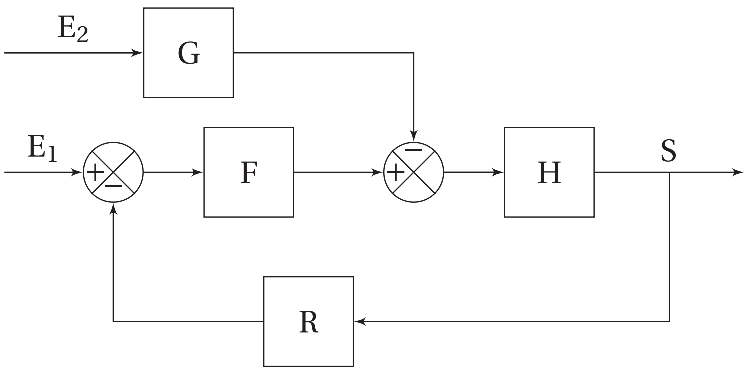


FIGURE 4.8 – Schéma-bloc avec 2 entrées

Le schéma 4.8 présente un système dont la sortie S dépend de deux entrées E_1 et E_2.
Déterminons la sortie $S(p)$ en fonction de $E_1(p)$ et $E_2(p)$.

$$\begin{aligned} S(p) &= H\cdot\big(F\cdot\big(E_1(p)-R\cdot S(p)\big)-G\cdot E_2(p)\big)\\ S(p) &= H\cdot F\cdot E_1(p)-H\cdot F\cdot R\cdot S(p)-H\cdot G\cdot E_2(p)\\ S(p)\cdot(1+H\cdot F\cdot R) &= H\cdot F\cdot E_1(p)-H\cdot G\cdot E_2(p)\end{aligned}$$

Finalement, on obtient la relation donnant S :

$$S(p)=\frac{H\cdot F}{1+H\cdot F\cdot R}\cdot E_1(p)-\frac{H\cdot G}{1+H\cdot F\cdot R}\cdot E_2(p)$$

Montrons que l'on peut déterminer cette fonction en utilisant la superposition
Dans un premier temps, on pose $E_2(p)=0$ (figure 4.9a), le schéma devient celui de la figure 4.9b

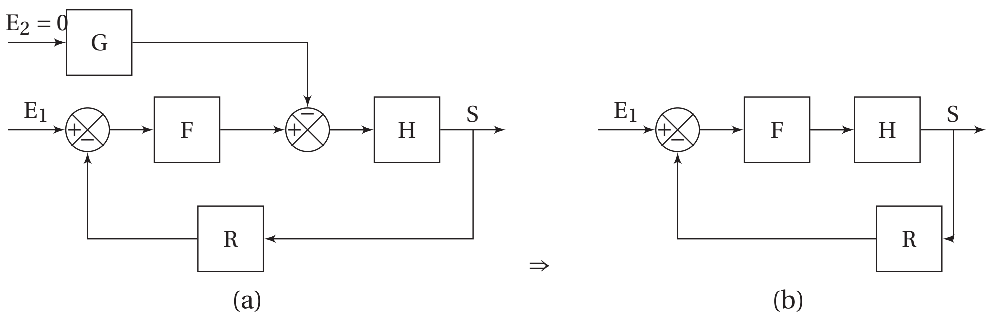


FIGURE 4.9 – Sschéma-bloc

On détermine rapidement la fonction de transfert vis à vis de l'entrée $E_1(p)$ pour $E_2(p)=0$.

$$S(p)_{E_2(p)=0}=\frac{H\cdot F}{1+H\cdot F\cdot R}\cdot E_1(p)$$

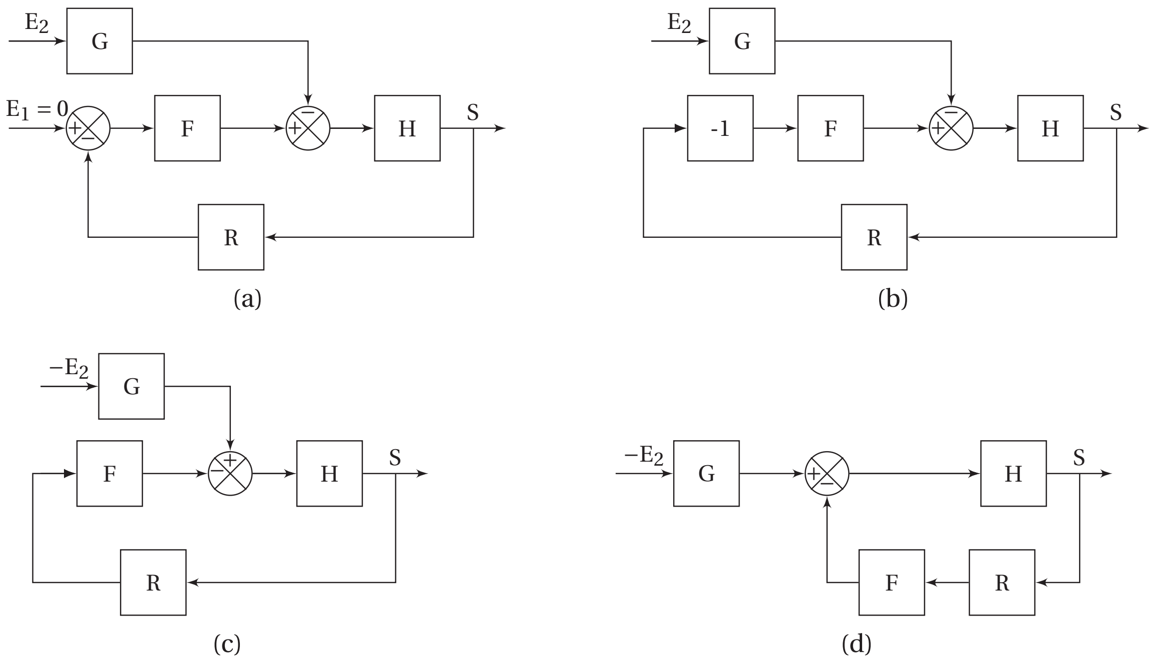


FIGURE 4.10 – Sschéma-bloc

Dans un second temps, on pose $E_1(p) = 0$ (figure 4.10a), le schéma devient celui de la figure 4.10b que l'on peut simplifier en déplaçant le signe négatif vers le sommateur (figure 4.10c). Finalement on peut mettre le schéma sous la forme classique de la figure 4.10d

On détermine ainsi rapidement la fonction de transfert vis à vis de l'entrée $E_2(p)$ pour $E_1(p) = 0$.

$$S(p)_{E_1(p)=0} = -\frac{H \cdot G}{1 + H \cdot F \cdot R} \cdot E_2(p)$$

On retrouve bien en sommant les deux fonctions, la fonction donnant $S(p)$ en fonction de $E_1(p)$ et $E_2(p)$:

$$S(p) = S(p)_{E_2(p)=0} + S(p)_{E_1(p)=0}$$
$$S(p) = \frac{H \cdot F}{1 + H \cdot F \cdot R} \cdot E_1(p) - \frac{H \cdot G}{1 + H \cdot F \cdot R} \cdot E_2(p)$$