

Modélisation des actions mécaniques

Après avoir étudié le comportement cinématique des solides, avoir modélisé les liaisons entre solides, nous allons étudier les actions mécaniques et leur effet sur le comportement et l'équilibre des solides. Dans cette première partie, nous allons identifier et modéliser les actions mécaniques.

9.1 Actions mécaniques

9.1.1 Définition

On appelle action mécanique toute cause susceptible de :

- Maintenir un solide au repos : STATIQUE (Solide indéformable)
- Créer ou modifier le mouvement d'un solide : DYNAMIQUE
- Déformer un solide : RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

9.1.2 Nature et classification des actions mécaniques

On distingue deux grandes familles d'actions mécaniques suivant leur mode d'action :

Actions mécaniques de contact : on retrouve ce type d'actions dans toutes les actions entre solides et entre un fluide et un solide. Ces actions agissent sur la surface du solide.

Actions mécaniques à distance : les actions mécaniques à distance caractérisent les actions mécaniques transmises sans contact et agissant principalement sur tout le volume du solide. Les actions à distance sont principalement dues à l'effet de la gravité sur les corps, mais on retrouve aussi ce type d'action avec les phénomènes électromagnétiques.

9.1.3 Actions mécaniques de contact

Compte tenu de la rugosité, des défauts de forme et de la déformation des matériaux (figure 9.1), il est généralement impossible de caractériser exactement le contact réel entre deux solides et la nature des actions transmissibles par ce contact.

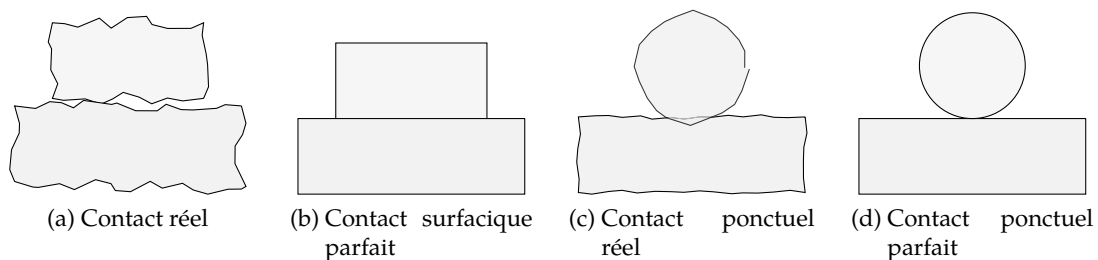


FIGURE 9.1 – Contacts réels et contacts théoriques

Nous considérerons généralement que les contacts entre deux solides sont réalisés par des surfaces parfaites. Les contacts seront donc :

- des contacts surfaciques : au travers d'une surface de contact (plan/plan, cylindre/cylindre, sphère/sphère,...),
- des contacts linéiques : au travers d'une ligne (cylindre/plan, sphère/cylindre,...),
- des contacts ponctuels : au travers d'un point de contact (sphère/plan, ...).

On remarquera, que les deux derniers sont parfaitement théoriques, un contact véritablement ponctuel impliquerait une pression de contact infinie et donc la destruction des solides ! Faire l'hypothèse d'un contact ponctuel ou linéique, c'est supposer que la surface de contact est petite par rapport aux autres dimensions des solides.

9.2 Modèle local / modèle global

9.2.1 Action mécanique à contact surfacique

Définir l'action mécanique transmise à travers un contact surfacique nécessite de définir

- la nature de la surface de contact,
- la normale au plan tangent de contact en chaque point P de la surface de contact (par convention, on oriente la normale vers l'extérieur du solide étudié),
- l'allure de la pression de contact en chaque point P de la surface.

Remarque : dans un premier temps nous supposons que les contacts sont parfaits, sans frottements.

La figure 9.2 montre l'allure deux répartitions possibles de l'action mécanique élémentaire du solide S_2 sur le solide S_1 , la première en supposant une répartition uniforme de la pression de contact entre les deux solides la seconde variable.

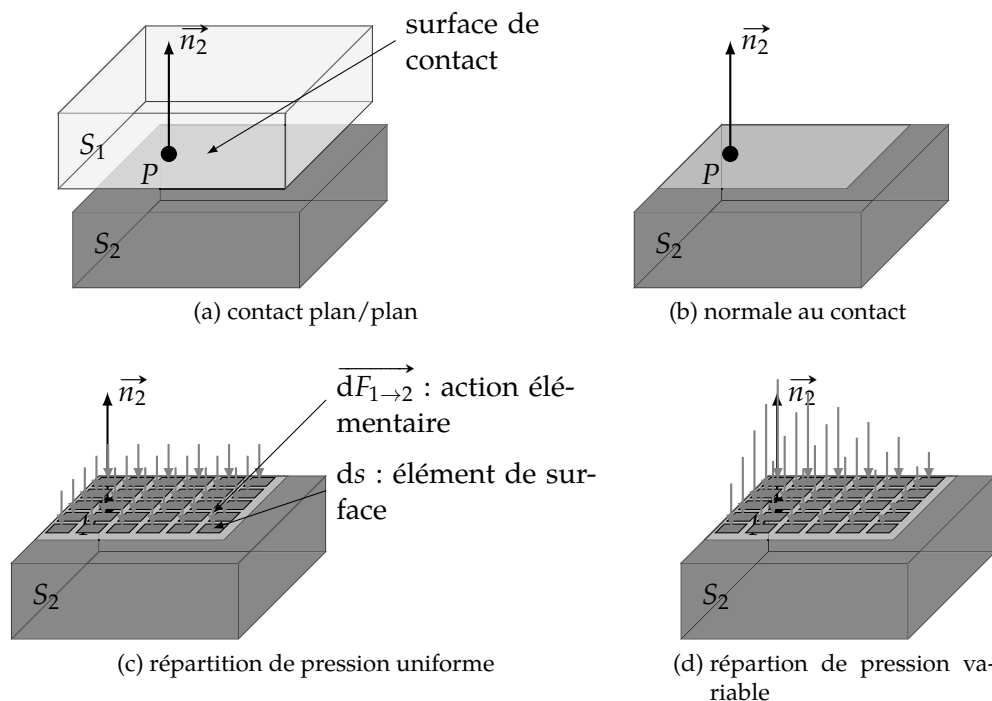


FIGURE 9.2 – Contact surfacique plan : action mécanique du solide S_1 sur le solide S_2

On note $\vec{dF}_{1 \rightarrow 2}(P)$, l'action mécanique élémentaire agissant du solide S_1 vers le solide S_2 . Cette action est orientée vers le solide isolé (ici S_2), elle dépend de la valeur de la pression de contact en chaque point P de la surface de contact.

$$\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(P) = -p(P) \cdot ds \cdot \overrightarrow{n(P)}$$

- $\overrightarrow{n(P)}$: la normale en P dirigée vers l'extérieur du solide isolé,
- $p(P)$: la pression au point P [N/m²],
- ds : l'élément de surface infinitésimal autour du point P sur lequel agit la pression.

La figure 9.3 montre deux possibilités de répartition de pression entre deux cylindres, la première qui suppose une répartition uniforme est très certainement fautive, la seconde est certainement plus proche de la réalité mais beaucoup plus difficile à déterminer.

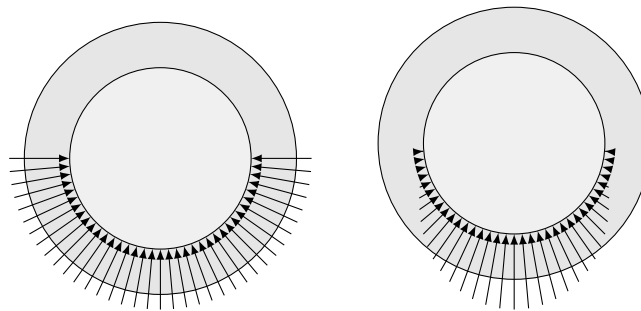
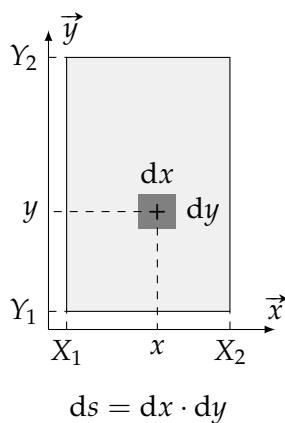


FIGURE 9.3 – Répartition de la pression entre deux cylindres

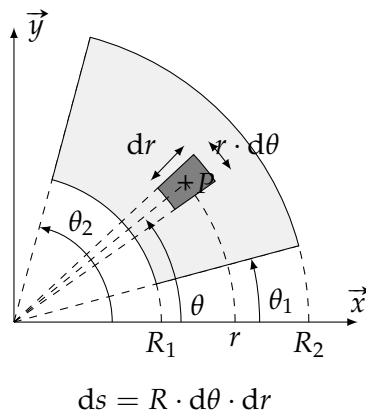
Pour déterminer l'action mécanique globale agissant de S_1 sur S_2 , il suffit d'intégrer sur la surface de contact.

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(P) = \int_{P \in S} -p(P) \cdot ds \cdot \overrightarrow{n(P)}$$

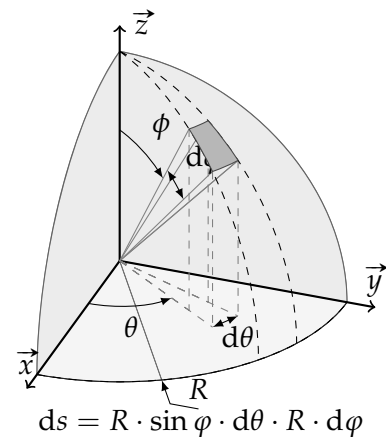
il reste à définir l'élément de surface, en fonction de la forme de la surface, on préférera les coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires ou sphériques en fonction de la nature de la surface (figures 9.4) :



(a) coordonnées cartésiennes



(b) coordonnées polaires



(c) Coordonnées sphériques

FIGURE 9.4 – Élément de surface ds

Pour ces différents cas, l'action globale devient

en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} &= \int_{P \in S} \overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(P) = \int_{P \in S} -p(P) \cdot ds \cdot \overrightarrow{n(P)} \\ \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} &= \int_{y=Y_1}^{y=Y_2} \int_{x=X_1}^{x=X_2} -p(P) \cdot dx \cdot dy \cdot \overrightarrow{n(P)} \end{aligned}$$

en coordonnées polaires :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{r=R_1}^{r=R_2} \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} -p(P) \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot \vec{n}(P)$$

en coordonnées sphériques :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} R \cdot \sin \varphi \cdot d\theta \cdot R \cdot d\varphi \cdot \vec{n}(P)$$

Il faut aussi préciser les coordonnées de $\vec{n}(P)$ dans la base d'intégration :

— dans les deux premiers cas, $\vec{N}(p) = \vec{z}$,

— pour les coordonnées sphériques, $\vec{N}(p) = \begin{cases} R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ R \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ R \cdot \cos \varphi \end{cases}$

9.2.2 Action mécanique à contact linéique

Le contact linéique est défini comme le contact surfacique.

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(P) &= -p_\lambda(P) \cdot d\ell \cdot \vec{n}(P) \\ \vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= \int_{P \in S} -p_\lambda(P) \cdot d\ell \cdot \vec{n}(P) \end{aligned}$$

— la pression est une pression linéique $p_\lambda(P) : [\text{N m}^{-1}]$,

— l'élément d'intégration est homogène à une longueur $d\ell$,

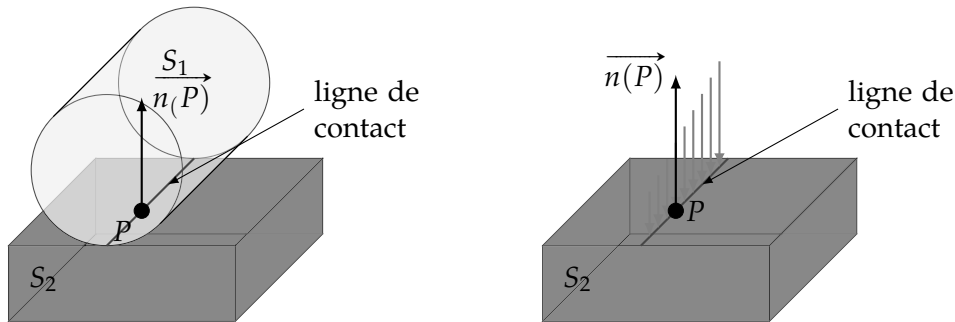


FIGURE 9.5 – Contact linéique

9.2.3 Action mécanique à contact ponctuel parfait

Le contact ponctuel parfait n'existe pas, en effet le contact entre deux corps ne peut se réaliser sans déformation de la zone de contact et sans frottements. On modélise par un contact ponctuel, les contacts dont la surface d'action est très réduite

L'action mécanique ponctuelle est directement représentable par un vecteur au point de contact :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{n}$$

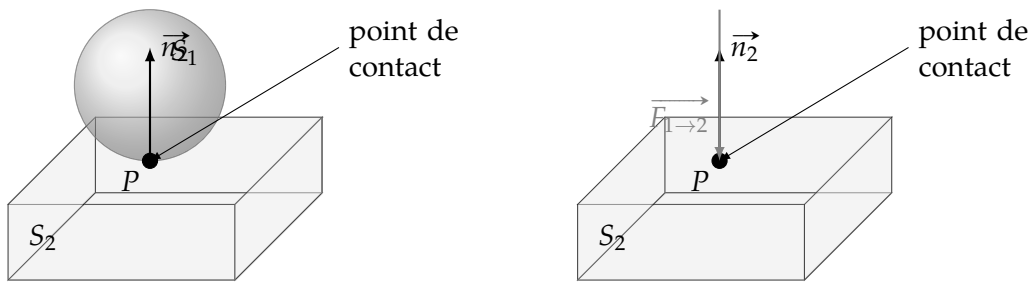


FIGURE 9.6 – Contact ponctuel

Exemple : Barrage poids

la figure 9.7 modélise de façon simple un barrage poids. Un barrage poids, doit pouvoir retenir par son propre poids l'eau accumulée en amont.

On se propose de caractériser l'action mécanique de l'eau, l'effet de la gravité, puis l'action du sol sur le barrage et définir les conditions de l'équilibre.

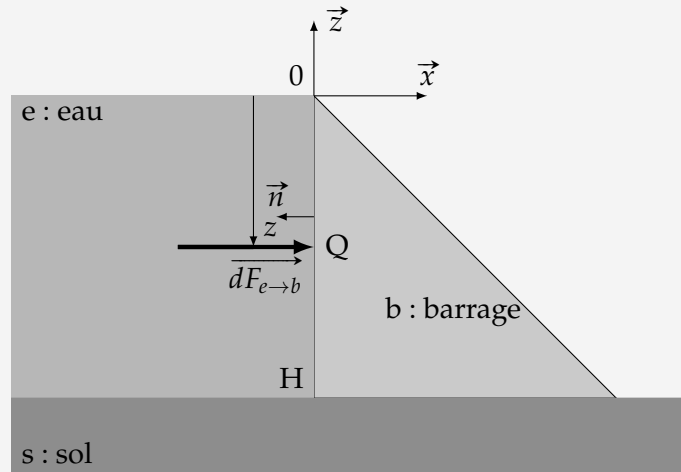


FIGURE 9.7 – barrage poids

On note :

- $\overrightarrow{dF_{e \rightarrow b}(Q)} = -p(h) \cdot ds \cdot \vec{n}$, l'action élémentaire de la pression de l'eau sur le barrage avec
 - $p(h) = h \cdot \rho \cdot g$ la pression à la profondeur h , (ρ masse volumique de l'eau et $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$),
 - ds l'élément de surface sur lequel agit la pression,
 - \vec{n} la normale à la surface du barrage orientée vers l'extérieur du solide.
- le point O est à la surface de l'eau, au milieu du barrage,
- H : la hauteur d'eau = la hauteur du barrage,
- b : la largeur de la base,
- L : la largeur du barrage,
- $\overrightarrow{OQ} = (0, y, z)$.

Action mécanique de l'eau sur le barrage

L'action élémentaire de l'eau sur le barrage s'écrit : $d\vec{F}_{e \rightarrow b} = -p(h) \cdot ds \cdot \vec{n}$, l'action totale s'écrit donc :

$$\vec{F}_{e \rightarrow b} = \int_{Q \in S} d\vec{F}_{e \rightarrow b} \quad [\text{N}]$$

ici, $d\vec{F}_{e \rightarrow b} = -p(h) \cdot ds \cdot \vec{n}$ avec $p(h) = \rho \cdot g \cdot (-z)$ et $\vec{n} = -\vec{x}$

Q1. Tracer l'allure de la pression le long de la paroi du barrage.

Q2. Déterminer $\vec{F}_{e \rightarrow b}$

9.3 Action mécanique à distance

9.3.1 Modèle local

Une action à distance est une action telle la gravité ou le champ magnétique terrestre qui s'applique sur chaque élément de matière qui constitue le corps E.

On peut ainsi en chaque point Q et pour l'élément de volume élémentaire dv associé du solide S , définir l'action élémentaire auquel il est soumis, avec

- $f(Q)$: la fonction qui décrit la répartition de l'action à distance en chaque point de l'espace,
- $\vec{u}(Q)$: le vecteur directeur de cette action.

$$d\vec{F}_{f \rightarrow S}(Q) = f(Q) \cdot \vec{u}(Q) \cdot dv$$

$$\vec{F}_{f \rightarrow S}(Q) = \int_{Q \in S} f(Q) \cdot \vec{u}(Q) \cdot dv$$

L'élément de volume (figure 9.9) dv est défini, soit en coordonnées cartésiennes, soit en coordonnées cylindriques ou sphériques.

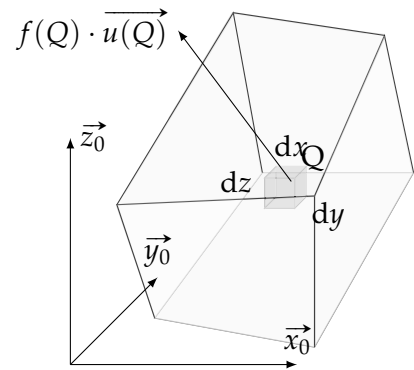
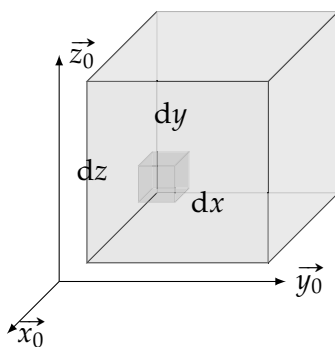
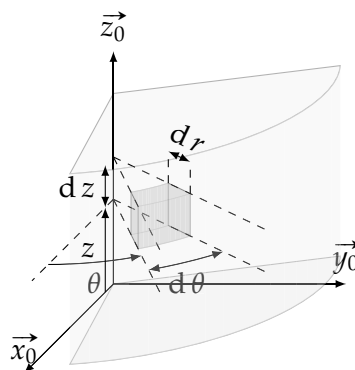


FIGURE 9.8 – Action à distance



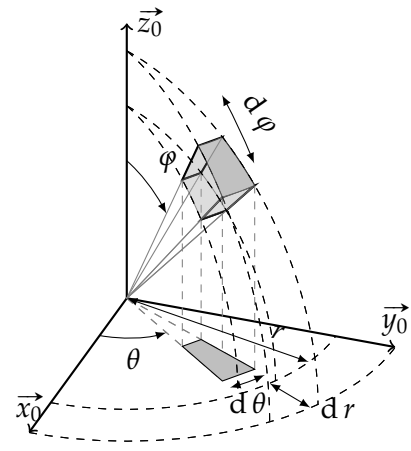
$$dv = dx \cdot dy \cdot dz$$

(a) coordonnées cartésiennes



$$dv = r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz$$

(b) coordonnées cylindriques



$$dv = r \cdot \sin \varphi \cdot d\theta \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr.$$

(c) Coordonnées sphériques

FIGURE 9.9 – Élément de volume

9.3.2 Modélisation de l'action de pesanteur

L'action de la pesanteur est une action à distance, le poids représente l'action de la pesanteur sur le solide S . l'élément d'intégration sur lequel agit la gravité est un élément de masse dm .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_{g \rightarrow S}(Q)} &= \int_{Q \in S} \overrightarrow{g(Q)} \cdot dm = \int_{Q \in S} \overrightarrow{g(Q)} \cdot \rho(Q) \cdot dv \\ \overrightarrow{P_{g \rightarrow S}(Q)} &= - \int_{Q \in S} \rho(Q) \cdot g(Q) \cdot \vec{z}_0 \cdot dv\end{aligned}$$

- $g(Q)$: la gravité au point Q ,
- $\rho(Q)$: la masse volumique au point Q ,
- \vec{z}_0 : vecteur unitaire vertical orienté vers le haut.

Si la gravité et la masse volumique sont constantes dans le solide, alors :

$$\overrightarrow{P_{g \rightarrow S}(Q)} = -\rho \cdot g \int_{Q \in S} \vec{z}_0 \cdot dv = -\rho \cdot g \cdot V \vec{z}_0 = -M \cdot g \cdot \vec{z}_0$$

et V le volume du solide et M sa masse.

9.3.3 Centre d'inertie

On appelle centre d'inertie du système matériel Σ , le point G défini par :

$$\begin{aligned}\int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{GP} dm &= \vec{0} \\ \int_{\Sigma} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm &= \vec{0} \\ \int_{\Sigma} \overrightarrow{GO} dm + \int_{\Sigma} \overrightarrow{OP} dm &= \vec{0}\end{aligned}$$

avec $m_{\Sigma} \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{OP} dm$ et finalement

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{OP} dm$$

Dans un repère cartésien, on note (x_G, y_G, z_G) les coordonnées de \overrightarrow{OG} et (x, y, z) les coordonnées de \overrightarrow{OP} :

$$x_G = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{\Sigma} x \cdot dm, \quad y_G = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{\Sigma} y \cdot dm, \quad z_G = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{\Sigma} z \cdot dm.$$

Remarques :

- Si le système matériel est un solide indéformable, le centre d'inertie est un point fixe du solide;
- Si le système matériel possède un élément de symétrie matérielle, plan ou axe de symétrie, aussi bien du point de vue géométrique que du point de vue de la répartition des masses, le centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie;
- Le centre d'inertie est confondu avec centre de gravité dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme.

a) Centre d'inertie d'un ensemble de corps

Un ensemble matériel Σ est composé de n sous-ensembles matériels Σ_i . À chaque sous-ensemble Σ_i est associé sa masse m_i et son centre d'inertie G_i , alors

$$\overrightarrow{OG_\Sigma} = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}.$$

Le centre d'inertie d'un ensemble de corps est le barycentre des centres d'inertie.

Si les corps sont des solides indéformables immobiles les uns par rapport aux autres, le centre d'inertie de l'ensemble est fixe dans un repère lié à cet ensemble.

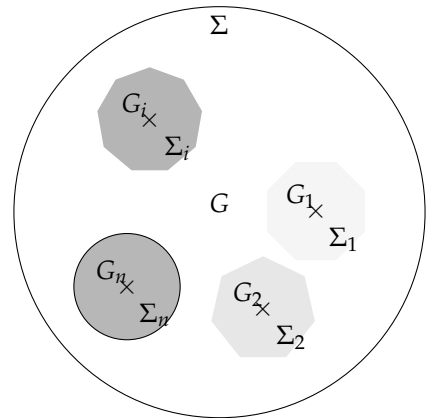


FIGURE 9.10 – Centre d'inertie d'un ensemble de corps

b) Théorèmes de Guldin

Énoncé (Centre d'inertie d'une courbe plane)

Soient (C) une courbe du plan (Π) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (C) . L'aire de la surface engendrée par la rotation de la courbe (C) autour de la droite (Δ) est égal au produit de la longueur de la courbe L par le périmètre décrit par son centre d'inertie $2\pi \cdot r_G$.

$$S = 2\pi \cdot r_G \cdot L$$

On associe à la courbe (C) (figure 9.11a) une masse linéique λ constante, $dm = \lambda \cdot dl$ d'où la masse totale de la courbe $m_c = \lambda \cdot L$.

La position du centre d'inertie de la courbe est calculée par la relation générale :

$$m_c \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} \cdot dm$$

$$\lambda \cdot L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} \cdot \lambda \cdot dl.$$

Après simplification puis en ne prenant que la projection suivant \vec{r} :

$$L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} dl \Rightarrow L \cdot r_G = \int_C r dl$$

Calculons maintenant la surface engendrée par la rotation de la courbe

$$S = \int_S r \cdot d\theta \cdot dl = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_C r \cdot dl = 2\pi \int_C r \cdot dl$$

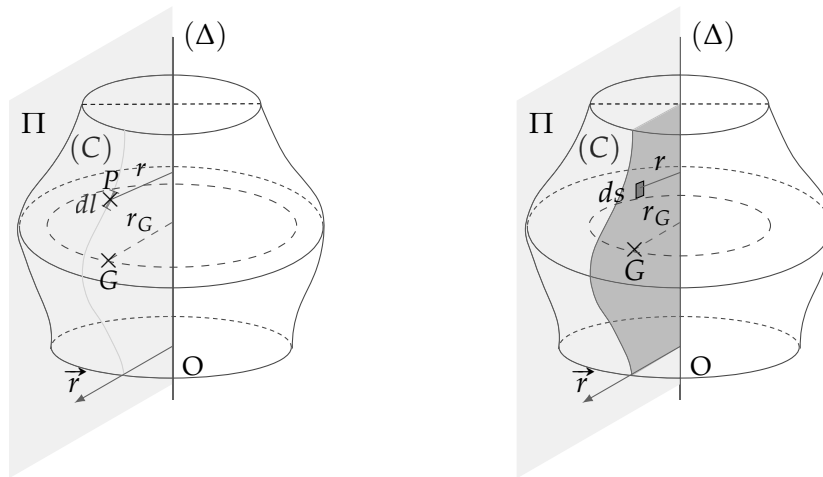
En substituant $\int_C r \cdot dl = L \cdot r_G$ dans cette égalité on retrouve bien le résultat cherché.

Énoncé (Centre d'inertie d'une surface plane homogène) Soient (S) une surface du plan (Π) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (S) .

Le volume engendré par la rotation de la surface plane tournant autour de l'axe (Δ) est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre décrit par son centre d'inertie.

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S$$

On démontre cette égalité comme la précédente. On associe à (S) (figure 9.11b) une masse surfacique $dm = \sigma \cdot ds$ constante et $m_S = \sigma \cdot S$.



(a) Centre d'inertie d'une courbe plane (b) Centre d'inertie d'une surface plane

FIGURE 9.11 – Théorèmes de Guldin

Par définition :

$$m_S \cdot \vec{OG} = \int_S \vec{OP} \cdot dm$$

$$S \cdot \vec{OG} = \int_S \vec{OP} \cdot ds$$

soit en projection suivant \vec{r}

$$S \cdot r_G = \int_S r \cdot ds$$

Le volume engendré par la rotation de la surface (S) s'écrit :

$$V = \int_V r \cdot d\theta \cdot ds = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_S r \cdot ds = 2\pi \int_S r \cdot ds$$

d'où la relation cherchée :

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S.$$

Remarque : l'utilisation des théorèmes de Guldin permet de simplifier le calcul de position du centre d'inertie dans la mesure où l'on connaît les caractéristiques du volume et de la surface balayée.

9.4 Moment d'une action mécanique

9.4.1 Moment d'une action ponctuelle

Le moment d'une force par rapport à un point donné ou à un axe est une grandeur physique traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour du point ou de l'axe.

Ainsi, l'action du pied sur la pédale $\vec{F}_{p \rightarrow 2}$ en P ne suffit pas pour décrire le mouvement de rotation de la pédale.

On appelle moment en A de l'action $\vec{F}_{p \rightarrow 2}$ la quantité

$$\vec{M}_{A, F_{p \rightarrow 2}} = \vec{AP} \wedge \vec{F}_{p \rightarrow 2} \quad [\text{Nm}]$$

Ce vecteur permet de définir l'effet de l'action mécanique à distance du point d'application.

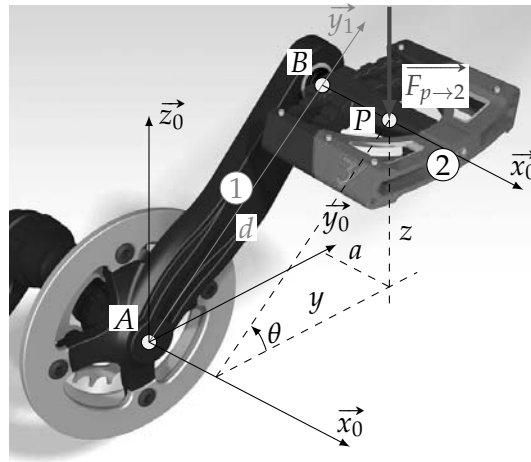


FIGURE 9.12 – Moment d'une action mécanique

Pour l'exemple du pédalier, on trouve

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{A, F_{p \rightarrow 2}}} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \wedge -F_{p \rightarrow 2} \overrightarrow{z_0} \\ &= (d \cdot \overrightarrow{y_1} + a \cdot \overrightarrow{x_0}) \wedge -F_{p \rightarrow 2} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &= -d \cdot \cos \theta \cdot F_{p \rightarrow 2} \cdot \overrightarrow{x_0} + a \cdot F_{p \rightarrow 2} \cdot \overrightarrow{y_0}\end{aligned}$$

La composante du moment en projection sur $\overrightarrow{x_0}$ représente l'action mécanique qui va entraîner la pédale en rotation autour de l'axe du pédalier, l'autre à tendance à « tordre » la pédale autour de l'axe $(A, \overrightarrow{y_0})$.

Remarque : le moment d'une action ponctuelle en son point d'application est nul.

9.4.2 Moment d'une action de pression

Dans le cas d'une action mécanique de pression, le moment est défini par

$$\overrightarrow{M_{O, F_{1 \rightarrow 2}}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \wedge d\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$$

Il est souvent utile de déterminer un point B tel que

$$\overrightarrow{M_{B, F_{1 \rightarrow 2}}} = \overrightarrow{0}$$

en ce point, l'action mécanique est modélisable uniquement par la résultante de l'action de pression.

9.4.3 Moment du poids au centre d'inertie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_{g \rightarrow S}(Q)} &= \int_{Q \in S} \overrightarrow{g(Q)} \cdot dm \\ \overrightarrow{M_{O, g \rightarrow S}} &= \int_Q \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{g(Q)} \cdot dm\end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{g(Q)}$ est constant, alors :

$$\overrightarrow{M_{O, g \rightarrow S}} = \int_Q \overrightarrow{OQ} \cdot dm \wedge \overrightarrow{g}$$

en calculant ce moment au centre d'inertie G :

$$\overrightarrow{M_{G,g \rightarrow S}} = \int_Q \overrightarrow{GQ} \cdot dm \wedge \vec{g}$$

on retrouve sous l'intégrale, la définition du centre d'inertie $\int_Q \overrightarrow{GQ} \cdot dm = \vec{0}$, finalement

$$\overrightarrow{M_{G,g \rightarrow S}} = \vec{0}$$

le moment du poids est nul au centre d'inertie. Cette propriété aussi vraie si $\overrightarrow{g(Q)}$ n'est pas constant.

9.5 Torseur d'action mécanique

9.5.1 Cas d'une action mécanique ponctuelle

On vient de voir qu'une action mécanique doit être représentée à la fois par sa résultante $\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$ et son moment $\overrightarrow{M_{A,R_{1 \rightarrow 2}}} = \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$, où P est le point d'application de la résultante et A le point où on cherche à connaître l'action mécanique.

Par définition, pour une action ponctuelle en son point d'application le moment est nul :

$$\overrightarrow{M_{P,R_{1 \rightarrow 2}}} = \vec{0}$$

On cherche une relation entre le moment d'une action mécanique en deux points, A et B .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{A,R_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B,R_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \end{aligned}$$

en introduisant le point A dans la seconde relation :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{B,R_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B,R_{1 \rightarrow 2}}} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B,R_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B,R_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \end{aligned}$$

Finalement

$$\overrightarrow{M_{B,R_{1 \rightarrow 2}}} = \overrightarrow{M_{A,R_{1 \rightarrow 2}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$$

On reconnaît la relation caractéristique d'un champ de vecteurs equiprojectif, ce champ est un champ caractéristique d'un torseur.

On peut donc décrire une action mécanique à partir d'un torseur, le torseur des actions mécaniques :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A,R_{1 \rightarrow 2}}} = \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\}_A$$

On note :

- $\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$: la résultante de l'action mécanique de l'action de 1 sur 2,
- $\overrightarrow{M_{A,R_{1 \rightarrow 2}}} = \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$: le moment de l'action mécanique de 1 sur 2 au point A (P , le point d'application de l'action ponctuelle).

Si P est le point d'application de l'action ponctuelle, alors le moment est nul en ce point :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{M}_{P, R_{1 \rightarrow 2}} = \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

Le torseur d'une action ponctuelle est un torseur glisseur en son point d'application P .

9.5.2 Cas d'une action de pression

L'action mécanique peut être représentée par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} &= \int_{P \in S} \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2}(P) = \int_{P \in S} -p(P) \cdot ds \cdot \overrightarrow{n}(P) \\ \overrightarrow{M}_{A, F_{1 \rightarrow 2}} &= \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (-p(P) \cdot ds \cdot \overrightarrow{n}(P)) \\ \overrightarrow{M}_{A, F_{1 \rightarrow 2}} &= \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

En B le moment s'écrit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{B, F_{1 \rightarrow 2}} &= \int_{P \in S} \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{M}_{B, F_{1 \rightarrow 2}} &= \int_{P \in S} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \wedge \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{M}_{B, F_{1 \rightarrow 2}} &= \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} + \int_{P \in S} \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{M}_{B, F_{1 \rightarrow 2}} &= \overrightarrow{M}_{A, F_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{BA} \wedge \int_{P \in S} \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

On retrouve la relation du champ des moments d'un torseur

$$\overrightarrow{M}_{B, F_{1 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{M}_{A, F_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2}$$

L'action mécanique d'un champ de pression peut se représenter par un torseur, il s'écrit en A :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{P \in S} \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2}(P) \\ \overrightarrow{M}_{A, F_{1 \rightarrow 2}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_A$$

et en B

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{P \in S} \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2}(P) \\ \overrightarrow{M}_{B, F_{1 \rightarrow 2}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_B$$

Il existe un point Q tel que $\overrightarrow{M}_{Q, F_{1 \rightarrow 2}} = \vec{0}$, en ce point :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{M}_{Q, F_{1 \rightarrow 2}} = \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

en ce point, le torseur est un glisseur.

9.5.3 Cas de la gravité

Le torseur du poids s'écrit au centre d'inertie G :

$$\left\{ \mathcal{P}_{g \rightarrow S} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_{g \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{G, g \rightarrow S}} = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

C'est aussi un torseur glisseur.

9.5.4 Torseur couple

Tous les torseurs d'efforts ne peuvent pas être représentés par un torseur glisseur. Ainsi, l'action mécanique transmise par le stator d'un moteur sur le rotor est un torseur couple.

$$\left\{ \mathcal{C}_{s \rightarrow r} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \overrightarrow{C_{s \rightarrow r}} = C_{sr} \cdot \vec{u} \end{array} \right\}_{\forall P}$$

9.6 Prise en compte des frottements

Le contact réel entre deux solides ne peut se faire sans frottements. Ils sont souvent néfastes si on considère l'énergie dépensée pour les vaincre mais nécessaire pour assurer la stabilité (pneus sur route!).

9.6.1 Contact ponctuel réel

Soient deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel en I (figure 9.13). Le torseur des actions transmissibles par la liaison ponctuelle réelle en I du solide S_1 sur le solide S_2 s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} = N_{12} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{T_{12}} \\ \overrightarrow{M_{I, 1 \rightarrow 2}} = Mp_{12} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{Mr_{12}} \end{array} \right\}_I$$

avec

- \vec{n} , la normale au plan tangent au contact orientée de S_1 vers S_2 ,
- N_{12} , la projection sur \vec{n} de la résultante du torseur $\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$,
- $\overrightarrow{T_{12}}$, la composante dans le plan tangent de $\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$ (la direction est a priori inconnue),
- Mp_{12} , la projection sur \vec{n} du moment du torseur (moment de pivotement autour de l'axe (I, \vec{n})),
- $\overrightarrow{Mr_{12}}$, la composante dans le plan tangent

Le mouvement de S_2 par rapport S_1 est définie par le torseur cinématique suivant :

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \Omega p_{21} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{\Omega r_{21}} \\ \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} \end{array} \right\}_I$$

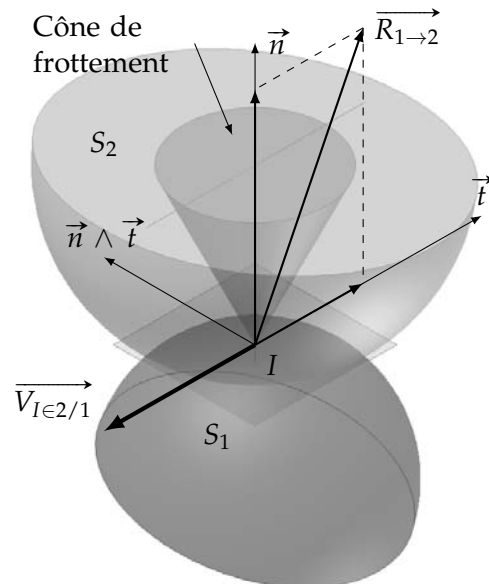


FIGURE 9.13 – Contact ponctuel réel

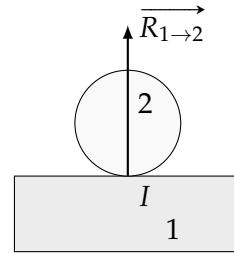
- Ωp_{12} : composante de pivotement autour de (I, \vec{n}) ,
- $\vec{\Omega} r_{12}$: composante de roulement dans le plan tangent,
- $\vec{V}_{I \in 2/1} \cdot \vec{n} = 0$: condition nécessaire au maintien du contact entre S_2 et S_1 .

9.6.2 Lois de Coulomb - Détermination de la résultante

Les lois de Coulomb permettent de déterminer la résultante de l'action réelle entre deux solides en contact ponctuel, en fonction des trois cas suivant :

Absence de frottement : la résultante ne comporte qu'une composante normale, la composante tangentielle est nulle quelque soit le mouvement :

$$\begin{aligned}\vec{R}_{1 \rightarrow 2} &= N_{12} \cdot \vec{n} \\ \vec{T}_{12} &= \vec{0}\end{aligned}$$



Frottement et glissement : la vitesse de glissement est non nulle ($\vec{V}_{I \in 2/1} \neq \vec{0}$ et $\vec{V}_{I \in 2/1} \cdot \vec{n} = 0$).

Les lois de Coulomb précisent alors

- que la composante tangentielle de la résultante est colinéaire au vecteur $\vec{V}_{I \in 2/1}$ mais de sens opposé (les frottements s'opposent au déplacement),
- que le module de l'effort tangentiel est proportionnel à la composante normale,

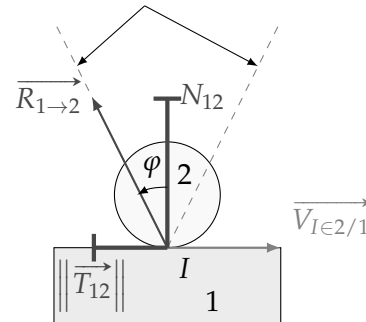
soit :

$$\begin{aligned}\vec{V}_{I \in 2/1} \wedge \vec{T}_{12} &= \vec{0} \\ \vec{V}_{I \in 2/1} \cdot \vec{T}_{12} &< 0 \\ \|\vec{T}_{12}\| &= f \cdot |N_{12}|\end{aligned}$$

On note :

$$f = \tan \varphi$$

généatrices du cône de frottement



f est le coefficient (facteur) de frottement entre les deux solides, il dépend de la nature des matériaux en contact, de la qualité des surfaces frottantes et de la lubrification.

La résultante de l'action de contact entre les deux solides est sur le cône de frottement (figure 9.13).

On note φ le demi-angle au sommet du cône de frottement.

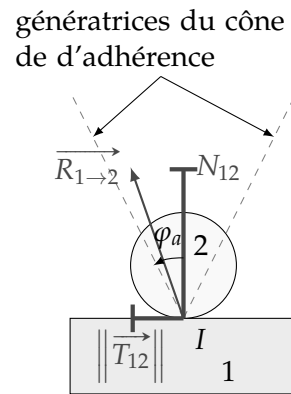
La résultante ne peut se trouver que sur le cône.

Frottement sans mouvement $\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$, le module de la composante tangentielle n'est alors connu que par une inégalité,

$$\|\vec{T}_{12}\| \leq f_a \cdot |N_{12}|$$

et sa direction ne peut être déterminée (la résultante est dans le cône de frottement).

$$f_a > f \quad \text{avec} \quad f_a = \tan \varphi_a$$

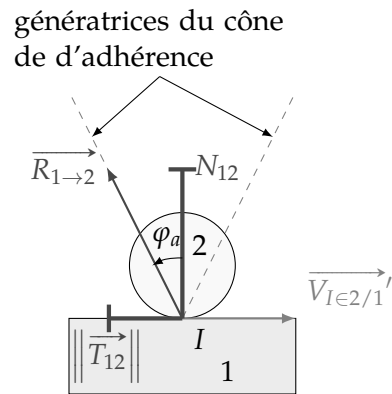


On constate expérimentalement que l'effort nécessaire pour initier le déplacement d'un corps sur un autre est supérieur à l'effort nécessaire pour maintenir le glissement.

Dans le cas de l'adhérence, on ne connaît pas l'effort tangentiel, si ce n'est par sa borne supérieure, pour étudier les efforts on suppose alors que le mouvement va se déclencher. On suppose que le solide est à la limite du glissement dans une direction supposée déduite des des efforts appliqués, avec $\vec{V}_{I \in 2/1}'$ la vitesse supposée en I entre les deux solides.

On détermine alors l'effort tangentiel comme dans le cas précédent :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{I \in 2/1}' \wedge \vec{T}_{12} &= \vec{0} \\ \vec{V}_{I \in 2/1}' \cdot \vec{T}_{12} &< 0 \\ \|\vec{T}_{12}\| &= f_a \cdot |N_{12}| \end{aligned}$$



Roulement sans glissement : $\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$, si les frottements ne sont pas nuls, alors on se trouve dans le cas précédent avec

$$\|\vec{T}_{12}\| \leq f_a \cdot |N_{12}|.$$

On détermine la composante tangentielle en se mettant à la limite du glissement (dérapage), et on applique les conclusions précédentes.

À ce frottement, peut se rajouter un frottement de roulement, décrit plus loin.

Quelques valeurs de f et f_a Les deux coefficients sont déterminés expérimentalement.

Surface en contact	f_a	f
Acier sur acier (sec)	0,60	0,40
Acier sur acier (visqueux)	0,10	0,05
Acier sur bois	0,20 à 0,60	-
Acier sur glace	0,04	-
Aluminium sur aluminium	1,10	-
Aluminium sur acier	0,6	0,5
Bois sur bois	0,25 à 0,50	-
Câble en acier sur poulie en acier	0,20	0,15
Caoutchouc sur acier	0,40	0,30
Caoutchouc sur béton	0,50 à 0,90	-
Caoutchouc sur glace	0,05 à 0,30	-
Pneus en bon état sur pavage sec	0,90	0,80
Pneus usés sur pavage humide	0,10 à 0,20	0,05 à 0,10
Téflon sur téflon	0,04	-
Téflon sur acier	0,04	0,04

Plusieurs paramètres influent sur ces coefficients, entre autres : la nature des surfaces, la rugosité des surfaces, la lubrification, la déformation locale, la vitesse.

Tous ces paramètres font que les valeurs de ces coefficients ne sont que des valeurs moyennes à manipuler avec précaution. De manière générale et compte tenu de la remarque précédente, dans les calculs, on ne considère qu'un seul type de coefficient, le coefficient de frottement.

9.6.3 Détermination du moment $\overrightarrow{M}_{I,1 \rightarrow 2}$

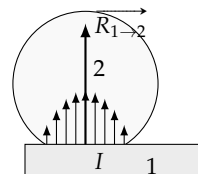
Par analogie avec le frottement de glissement, on définit un couple de résistance au pivotement et un couple de résistance au roulement. Ces couples résistants interviennent dès que le contact ne peut plus être considéré comme ponctuel mais suivant une surface localisée (écrasement), la répartition non homogène des actions élémentaires de contact créant alors ces moments résistants.

Les lois de contact entre deux solides sont complexes, et des lois semblables aux lois de Coulomb pour les frottements de glissement ont été formulées pour modéliser ces phénomènes.

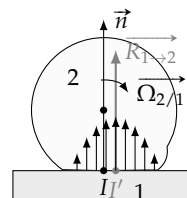
Résistance au roulement : si $\overrightarrow{\Omega}_{r21} \neq \vec{0}$, alors

si $\overrightarrow{\Omega}_{r12} \neq \vec{0}$, alors

$$\|\overrightarrow{Mr}_{12}\| = h \cdot |N_{12}|$$



Répartition symétrique de la pression de contact :
 $h = 0$



Répartition asymétrique de la pression de contact :
 $h = \|\overrightarrow{II'}\|$

avec h le coefficient de frottement de roulement;

Résistance au pivotement : si $\Omega_{p12} \neq 0$, alors

$$|Mp_{12}| = k \cdot |N_{12}|$$

avec k le coefficient de frottement de pivotement..

Remarque : les deux coefficients h et k sont homogènes à une longueur.

9.6.4 Frottements fluides - visqueux

Le modèle des lois de Coulomb pour les frottements est parfois insuffisant pour décrire la nature du contact entre deux solides.

Il est parfois nécessaire de remplacer ou de compléter ce modèle par la prise en compte d'un effet dû à la vitesse de déplacement.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -f_v \cdot \vec{V}_{I \in 2/1}$$

avec f_v en $[\text{N s m}^{-1}]$.

Dans ce modèle, l'action mécanique d'un solide sur l'autre est inversement proportionnelle à la vitesse de déplacement relative.

9.7 Actions mécaniques particulières

9.7.1 Action mécanique développée par un ressort de traction-compression

Soit deux solides (1) et (2) liés par un ressort de traction-compression :

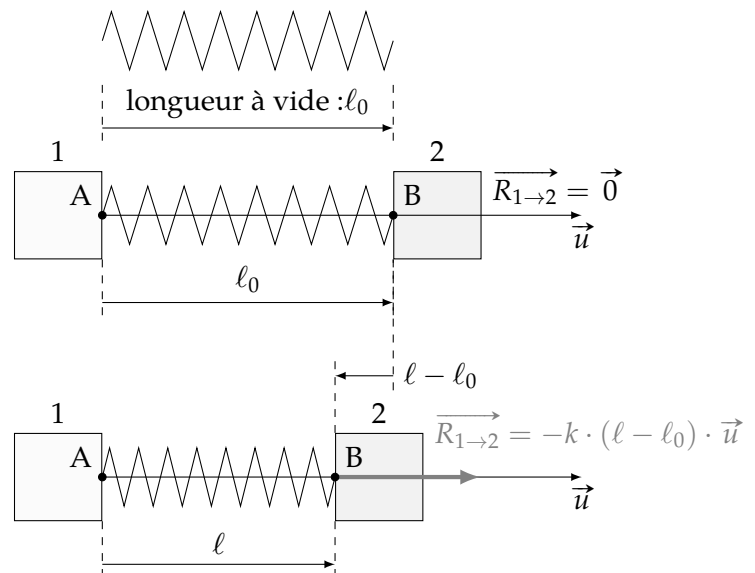
- de longueur à vide : ℓ_0 [m];
- de raideur : k $[\text{N m}^{-1}]$;
- A et B, les points d'application de l'action du ressort sur les solides 1 et 2;
- d'axe (A, \vec{u}) .

L'action mécanique développée par le solide (1) sur le solide (2) par ressort est proportionnelle à variation de longueur du ressort :

$$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = -k \cdot (\ell - \ell_0) \cdot \vec{u}$$

L'action mécanique développée par le ressort est donc modélisable par un torseur glisseur :

$$\{\mathcal{R}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall P \in (B, \vec{u})}$$



9.7.2 Action mécanique développée par un ressort spiral

L'action mécanique appliquée par le ressort spiral, du solide 1 sur le solide 2 (figure 9.14) est un couple proportionnel à la différence angulaire.

$$\vec{C}_{1 \rightarrow 2} = -k_c \cdot (\theta - \theta_0) \cdot \vec{z}_1$$

avec : k_c la raideur du ressort $[\text{N rad}^{-1}]$.

Le torseur associé à l'action mécanique d'un ressort spiral est un torseur couple

$$\{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_{\forall P}$$

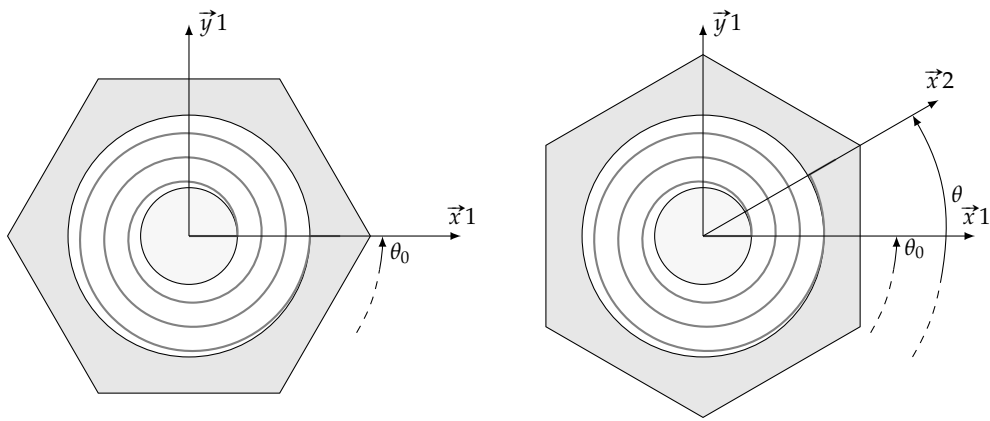


FIGURE 9.14 – Ressort spiral

9.7.3 Action mécanique d'un moteur

De la même manière l'action mécanique appliqué par le stator d'un moteur sur le rotor est modélisée par un torseur couple :

$$\{C_{s \rightarrow r}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{C}_m = C_m \cdot \vec{u} \end{array} \right\}_{\forall P}$$

avec \vec{u} l'axe de rotation du rotor.

9.7.4 Action transmissible par un engrenage

a) Engrenage droit

Dans le cas d'un engrenage droit à dentures parallèles, l'action mécanique transmise par une roue dentée sur l'autre se fait suivant la droite d'action. Elle est représentable par un torseur glisseur en I .

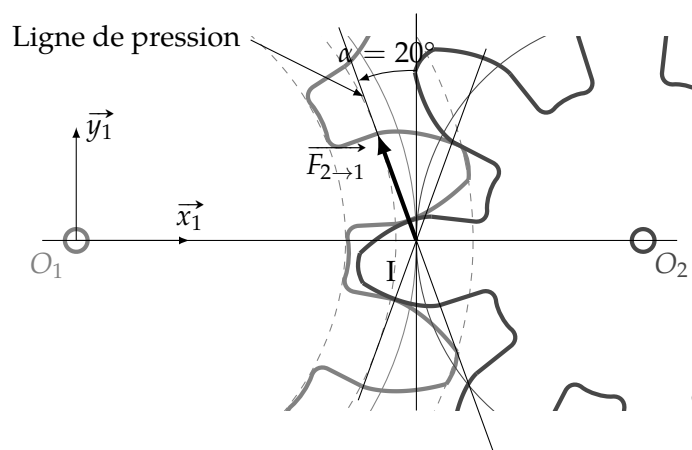


FIGURE 9.15 – Action mécanique dans un engrenage

Le torseur de l'action mécanique de la roue 2 sur la roue 1 s'écrit en I :

$$\{A_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

soit en projection dans la $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon_1 \cdot F_{2 \rightarrow 1} \cdot \sin \alpha & 0 \\ \epsilon_2 \cdot F_{2 \rightarrow 1} \cdot \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_I}$$

avec $\epsilon_1 = \pm 1$ et $\epsilon_2 = \pm 1$ en fonction du repère et du sens de rotation de la roue 1. Dans le cas de la figure 9.15, on a :

$$\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{ccc} +F_{2 \rightarrow 1} \cdot \sin 20^\circ & 0 \\ -F_{2 \rightarrow 1} \cdot \cos 20^\circ & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_I}$$

b) Engrenage hélicoïdal

Pour un engrenage droit à denture hélicoïdale, il est nécessaire de prendre en compte l'angle d'hélice.

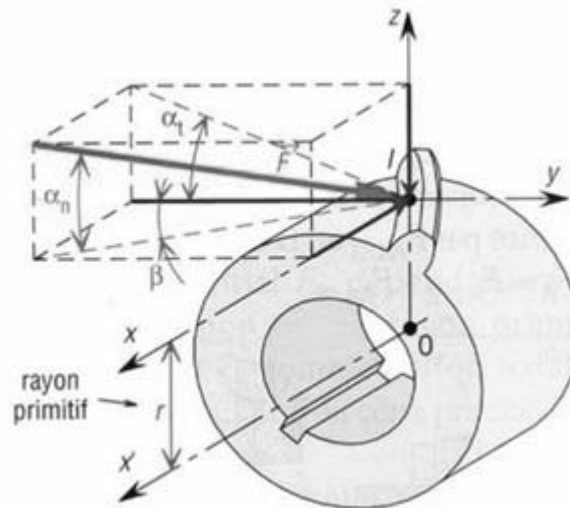


FIGURE 9.16 – Action mécanique sur une denture hélicoïdale (crédit Pierre Provot)

9.8 Torseur des actions transmissibles par les liaisons normalisées

Dans cette partie nous traiterons que le cas des liaisons parfaites, c'est-à-dire sans frottements.

9.8.1 Liaison Sphère-Plan (ponctuelle) parfaite

Nous avons déjà vu que le torseur de l'action ponctuelle parfaite s'écrit en I , le point de contact entre les deux solides :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \\ M_{I, F_{1 \rightarrow 2}} = \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

Dans toute base contenant le vecteur normal au plan tangent : $(\vec{n}, \vec{?}, \vec{?})$, le torseur de l'action transmissible par une liaison ponctuelle est de la forme :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{ll} F_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\substack{I \\ (\vec{n}, \vec{?}, \vec{?})}}$$

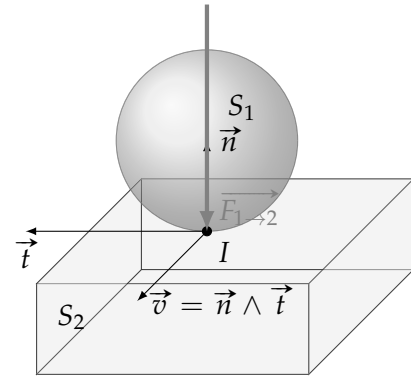


FIGURE 9.17 – Liaison sphère plan

Cette forme est valable en tout point P de l'axe (I, \vec{n})

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{ll} F_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\substack{\forall P \in (I, \vec{n}) \\ (\vec{n}, \vec{?}, \vec{?})}}$$

Ce torseur est un torseur glisseur.

- $(\vec{n}, \vec{?}, \vec{?})$: indique que cette forme est valable dans toute base contenant le vecteur \vec{n} ,
- $\forall P \in (I, \vec{n})$ précise que le torseur à la forme proposée en tout point de l'axe (I, \vec{n}) .

Relation entre le torseur cinématique et le torseur des actions mécaniques

Le torseur cinématique d'une liaison sphère-plan s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{ll} \omega_1 & 0 \\ \omega_2 & V_2 \\ \omega_3 & V_3 \end{array} \right\}_{\substack{\forall P \in (I, \vec{n}) \\ (\vec{n}, \vec{?}, \vec{?})}}$$

Dans le cas d'une liaison ponctuelle parfaite, alors le comoment des deux torseurs est nul.

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} \otimes \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = 0$$

9.8.2 Liaison Appui-Plan

Le torseur d'un contact surfacique plan de normale \vec{n} s'écrit en un point O :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{P \in S} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q) \\ \vec{M}_{O, F_{1 \rightarrow 2}} = \int_{Q \in S} \vec{OQ} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_O$$

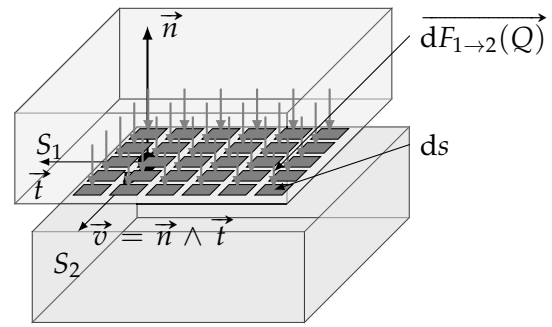


FIGURE 9.18 – Liaison appui plan

On considère

— que la surface de contact est rectangulaire :

$$S = 2 \cdot a \times 2 \cdot b,$$

— que la pression de contact est uniforme :

$$p(Q) = p_0 \text{ constant}$$

Le torseur s'écrit donc :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -p \int_{P \in S} ds \cdot \vec{n} = -p \cdot S \cdot \vec{n} \\ \vec{M}_{O, F_{1 \rightarrow 2}} = -p \int_{Q \in S} \vec{OQ} \wedge ds \cdot \vec{n} \end{array} \right\}_O$$

Déterminons le moment en O , on pose $\vec{OQ} = x \cdot \vec{t} + y \cdot \vec{v}$ avec $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{v})$ une base orthonormée directe.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O, F_{1 \rightarrow 2}} &= -p_0 \int_{Q \in S} \vec{OQ} \wedge ds \cdot \vec{n} \\ \vec{M}_{O, F_{1 \rightarrow 2}} &= -p_0 \int_{Q \in S} (x \cdot \vec{t} + y \cdot \vec{v}) \wedge ds \cdot \vec{n} \\ \vec{M}_{O, F_{1 \rightarrow 2}} &= p_0 \int_{Q \in S} x \cdot ds \cdot \vec{v} - p_0 \int_{Q \in S} y \cdot ds \cdot \vec{t} \end{aligned}$$

On pose :

$$- M_t(O) = -p_0 \int_{Q \in S} y \cdot ds$$

$$- M_v(O) = p_0 \int_{Q \in S} x \cdot ds$$

Le torseur de l'action transmissible par la liaison appui plan s'écrit donc :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n} \\ \vec{M}_{O, F_{1 \rightarrow 2}} = M_t(O) \cdot \vec{t} + M_v(O) \cdot \vec{v} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{ll} F_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & M_t(O) \\ 0 & M_v(O) \end{array} \right\}_{(\vec{n}, \vec{t}, \vec{v})}_O$$

Montrons que cette forme est vraie en tout point $P = (n, t, v)$ de l'espace.

Déterminons le moment en P de l'action de pression :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{P, 1 \rightarrow 2} &= \vec{M}_{O, 1 \rightarrow 2} + \vec{PO} \wedge F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n} \\ \vec{M}_{P, 1 \rightarrow 2} &= M_t(O) \cdot \vec{t} + M_v(O) \cdot \vec{v} + (n \cdot \vec{n} + t \cdot \vec{t} + v \cdot \vec{v}) \wedge F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n} \\ \vec{M}_{P, 1 \rightarrow 2} &= M_t(O) \cdot \vec{t} + M_v(O) \cdot \vec{v} - t \cdot F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v} + v \cdot F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{t} \\ \vec{M}_{P, 1 \rightarrow 2} &= (M_t(O) + v \cdot F_{1 \rightarrow 2}) \cdot \vec{t} + (M_v(O) - t \cdot F_{1 \rightarrow 2}) \cdot \vec{v} \\ \vec{M}_{P, 1 \rightarrow 2} &= M_t(P) \cdot \vec{t} + M_v(P) \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Le torseur s'écrit donc en P :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n} \\ \overrightarrow{M_{P, F_{1 \rightarrow 2}}} = M_t(P) \cdot \vec{t} + M_v(P) \cdot \vec{v} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} F_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & M_t(P) \\ 0 & M_v(P) \end{array} \right\}_{\substack{P \\ (\vec{n}, \vec{t}, \vec{v})}}$$

Le torseur a bien la même forme en tout point de l'espace, la forme canonique de ce torseur est donc :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n} \\ \overrightarrow{M_{P, F_{1 \rightarrow 2}}} = M_t \cdot \vec{t} + M_v \cdot \vec{v} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} F_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & M_t \\ 0 & M_v \end{array} \right\}_{\substack{\forall P \\ (\vec{n}, \vec{t}, \vec{v})}}$$

Remarque 1 : on comprend bien ici que même forme n'implique pas même valeur, le torseur en P à la même forme que le torseur en O mais les moments en P et en O sont différents.

Remarque 2 : définir le torseur d'une liaison sous sa forme la plus générale laisse la liberté de choisir le point et la base de réduction les plus judicieux pour les calculs, mais une fois que ce point est choisi, les valeurs sont imposées.

Remarque 3 : on note en général le torseur de l'action mécanique transmissible par la liaison sous la forme :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{\substack{P \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$$

9.8.3 Relation entre torseur cinématique et torseur des efforts transmissibles par une liaison parfaite

Reprenons l'exemple de l'appui plan de l'exemple précédent.

Dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le torseur des actions transmissibles par une liaison appui plan de normale \vec{z} s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{array} \right\}_{\substack{\forall P \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} = Z_{12} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{P, 1 \rightarrow 2}} = L_{12} \cdot \vec{x} + M_{12} \cdot \vec{y} \end{array} \right\}_P$$

Le torseur cinématique de cette même liaison s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_{\substack{\forall P \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \omega_z \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} = V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} \end{array} \right\}_P$$

Calculons le comoment des deux torseurs :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} &= \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \cdot \overrightarrow{M_{P, 1 \rightarrow 2}} \\ \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} &= (Z_{12} \cdot \vec{z}) \cdot (V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y}) + (\omega_z \cdot \vec{z}) \cdot (L_{12} \cdot \vec{x} + M_{12} \cdot \vec{y}) \\ \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} &= 0 \end{aligned}$$

Le comoment du torseur cinématique et du torseur des efforts transmissible d'une liaison parfaite est nul. Cette propriété est généralisable à tous les torseurs d'action transmissible par une liaison normalisée parfaite. Le torseur cinématique et le torseur des efforts transmissibles d'une liaison sont

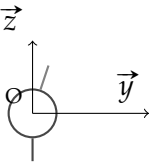
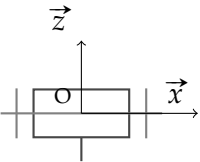
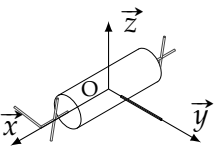
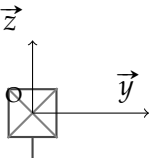
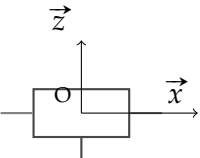
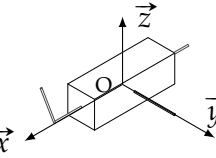
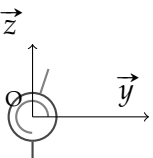
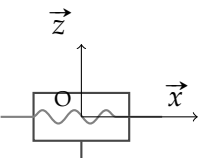
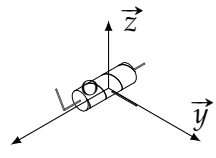
deux torseurs duaux.

9.8.4 Tableau des liaisons normalisées

On retrouve dans chaque tableau :

- n_c : le nombre d'inconnue cinématique ;
- n_s : le nombre d'inconnue statique ;
- les symboles normalisés plans ;
- le symbole 3D.

Remarque : dans les tableaux qui suivent, $(\vec{?}, \vec{?}, \vec{z})$ se lit toute base comportant le vecteur \vec{z} .

Liaison Pivot Liaison Pivot d'axe (O, \vec{x})		
Torseur cinématique $\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{x}) \\ (\vec{x}, \vec{?}, \vec{?})}}, n_c = 1$		Torseur des actions transmissibles $\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{x}) \\ (\vec{x}, \vec{?}, \vec{?})}}, n_s = 5$
		
Liaison Glissière Liaison Glissière de direction \vec{x}		
$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \\ (\vec{x}, \vec{?}, \vec{?})}}, n_c = 1$		$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \\ (\vec{x}, \vec{?}, \vec{?})}}, n_s = 5$
		
Liaison Hélicoïdale Liaison Hélicoïdale d'axe (O, \vec{x})		
$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{x}) \\ (\vec{x}, \vec{?}, \vec{?})}}, V_x = \frac{p}{2 \cdot \pi} \omega_x, n_c = 1$		$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{x}) \\ (\vec{x}, \vec{?}, \vec{?})}}, L = -\frac{p}{2 \cdot \pi} X, n_s = 5$
		

Liaison Pivot Glissant Liaison Pivot Glissant d'axe (O, \vec{x})	
$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{x}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}, n_c = 2$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{x}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}, n_s = 4$

Liaison Sphérique Liaison Sphérique de centre C	
$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{C \\ \forall B}}, n_c = 3$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{C \\ \forall B}}, n_s = 3$

Liaison Sphérique à doigt Liaison Sphérique à doigt de centre C et de doigt $ax \in Ox$	
$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{C \\ \forall B}}, n_c = 2$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{Bmatrix}_{\substack{C \\ \forall B}}, n_s = 4$

Liaison Appui Plan Liaison Appui Plan de normale \vec{z}	
$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_z \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \\ (\vec{y}, \vec{z}, \vec{z})}}, n_c = 3$	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \\ (\vec{y}, \vec{z}, \vec{z})}}, n_s = 3$

Liaison Sphère Cylindre - Linéaire Annulaire Liaison Sphère Cylindre de centre C et d'axe (C, \vec{x})		
$\begin{cases} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{cases}, n_c = 4$ $(\vec{x}, ?, ?)_{\underset{C}{}}$	$\begin{cases} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{cases}, n_s = 2$ $(\vec{x}, ?, ?)_{\underset{C}{}}$	
Liaison Cylindre Plan - Linéaire Rectiligne Liaison Cylindre Plan de normale \vec{z} et de droite (I, \vec{x}) , I un point de la droite de contact		
$\begin{cases} \omega_x & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{cases}, n_c = 4$ $\forall P \in (I, \vec{x})_{\underset{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}{}}$	$\begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{cases}, n_s = 2$ $\forall P \in (I, \vec{x})_{\underset{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}{}}$	
Liaison Sphère Plan - ponctuelle liaison Sphère Plan de normale (I, \vec{z}) , I point de contact		
$\begin{cases} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{cases}, n_c = 5$ $\forall P \in (I, \vec{z})_{\underset{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}{}}$	$\begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{cases}, n_s = 1$ $\forall P \in (I, \vec{z})_{\underset{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}{}}$	