

CHAPITRE 5

ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

5.1 Système du premier ordre

Un système du premier ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \tau : \text{constante de temps} \\ K : \text{gain statique} \end{array}$$

On pose : $e(t) \xrightarrow{L} E(p)$ et $s(t) \xrightarrow{L} S(p)$. On se place dans les conditions de Heaviside.
Fonction de transfert et schéma bloc d'un système du premier ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \quad \begin{array}{c} E(p) \rightarrow \boxed{\frac{K}{1 + \tau \cdot p}} \rightarrow S(p) \end{array}$$

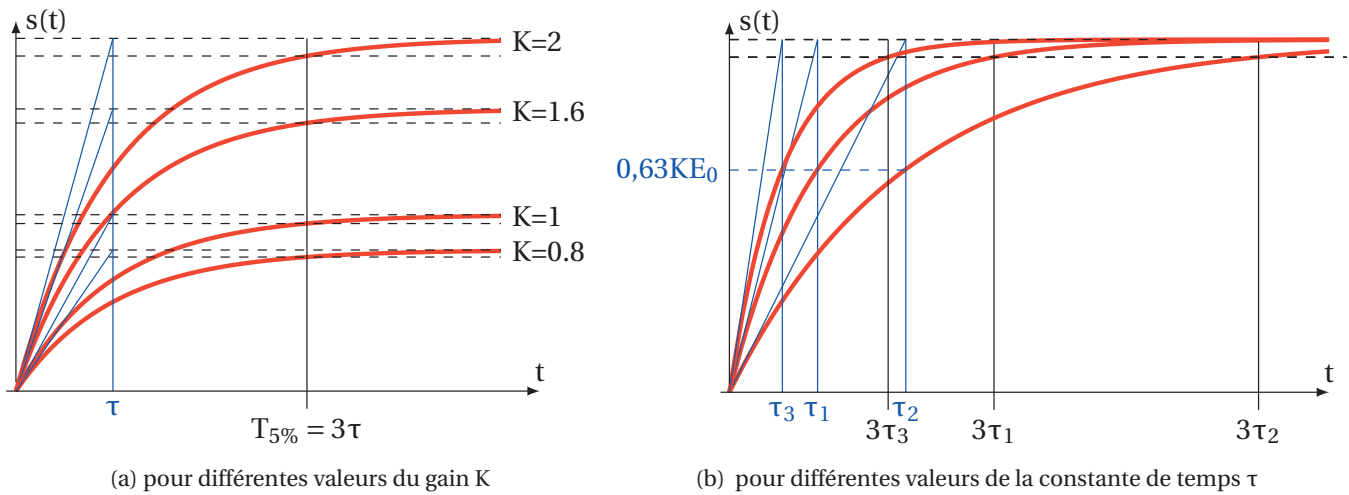
5.1.1 Réponse temporelle à un échelon

Pour une entrée en échelon : $e(t) = E_0 \mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside alors :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Les figures 5.1 montrent l'influence du gain K et de la constante de temps τ sur la réponse temporelle.

- Valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot S(p)) = K \cdot E_0$.
- Tangente à l'origine $\lim_{t \rightarrow 0} (\dot{s}(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot (p \cdot S(p))) = \frac{K \cdot E_0}{\tau}$.
- Temps de réponse à 5% : $T_{5\%} = 3 \cdot \tau$.
- Pour $t = \tau$: $s(\tau) \approx 0,63 \cdot K \cdot E_0$.

FIGURE 5.1 – Réponse à un échelon d'un 1^{er} ordre

5.1.2 Représentation fréquentielle

On obtient la fonction de transfert complexe en posant $p = j \cdot \omega$:

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 + \tau \cdot j \cdot \omega}$$

et on en déduit :

— la partie réelle :

$$\operatorname{Re}(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$$

— la partie imaginaire :

$$\operatorname{Im}(j \cdot \omega) = \frac{-K \cdot \tau \cdot \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$$

— le module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log(A(\omega)) = 20 \cdot \log\left(\frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}\right)$$

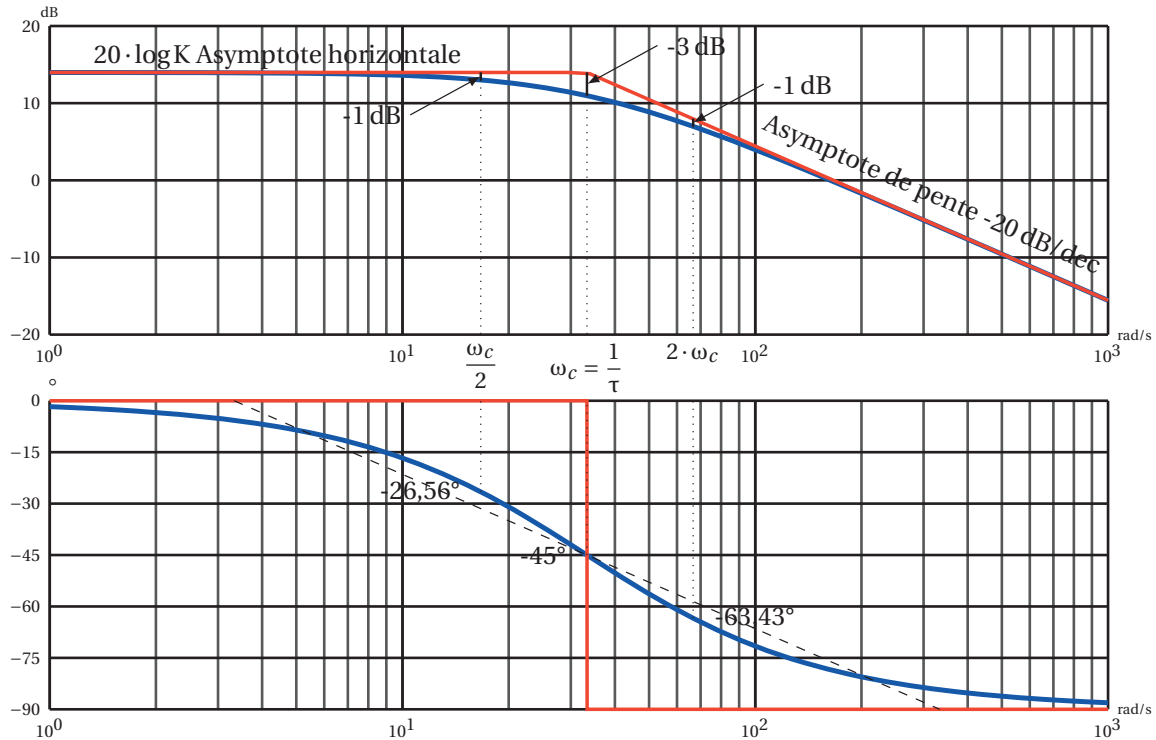
soit en développant,

$$A_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)$$

La figure 5.2 présente l'allure des diagrammes de Bode d'un système du premier ordre.

Diagramme d'amplitude : le diagramme d'amplitude présente deux asymptotes

- une horizontale lorsque $\omega \rightarrow 0$: $\lim_{\omega \rightarrow 0} (A_{dB}) = 20 \cdot \log K$;
- une asymptote de pente -20dB/dec lorsque $\omega \rightarrow \infty$;
- les asymptotes se croisent pour la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$;

FIGURE 5.2 – Diagrammes de Bode - système du 1^{er} ordre

- le diagramme asymptotique en amplitude est assez proche de la courbe réelle et suffit en général pour étudier la fonction;
- pour la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$, l'écart par rapport au point d'intersection des asymptotes est de -3dB ;
- pour les pulsations double $2 \cdot \omega_c$ et moitié $\frac{\omega_c}{2}$ l'écart est de -1dB par rapport aux asymptotes.

Diagramme des phases : le diagramme des phases présente lui aussi deux asymptotes

- lorsque $\omega \rightarrow 0$, $\lim_{\omega \rightarrow 0} (\Phi(\omega)) = 0$;
- lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\Phi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} \text{rad} (= -90^\circ)$.
- Le diagramme asymptotique à la forme d'une marche d'escalier, il n'est pas suffisamment précis pour représenter correctement l'évolution de la phase. Pour mieux approcher le tracé, il est possible de tracer le segment passant par les points $(\log(\frac{1}{10\tau}), 0)$ et $(\log(\frac{10}{\tau}), -90)$ (en pointillés sur le graphe, attention ce n'est pas une tangente).
- Quelques valeurs particulières de l'argument :
 - pulsation de cassure : $\Phi(\omega_c) = -45^\circ$
 - pulsation moitié : $\Phi(\frac{\omega_c}{2}) = -\arctan(\tau \cdot \frac{\omega_c}{2}) \approx -26,56^\circ$
 - pulsation double : $\Phi(2 \cdot \omega_c) = -\arctan(\tau \cdot 2 \cdot \omega_c) \approx -63,43^\circ$

5.1.3 Premier ordre au numérateur

Soit la fonction définie par le polynôme du premier degré :

$$N_1(p) = (1 + \tau \cdot p).$$

On se propose de comparer ce polynôme à la fonction de transfert du premier ordre :

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p}.$$

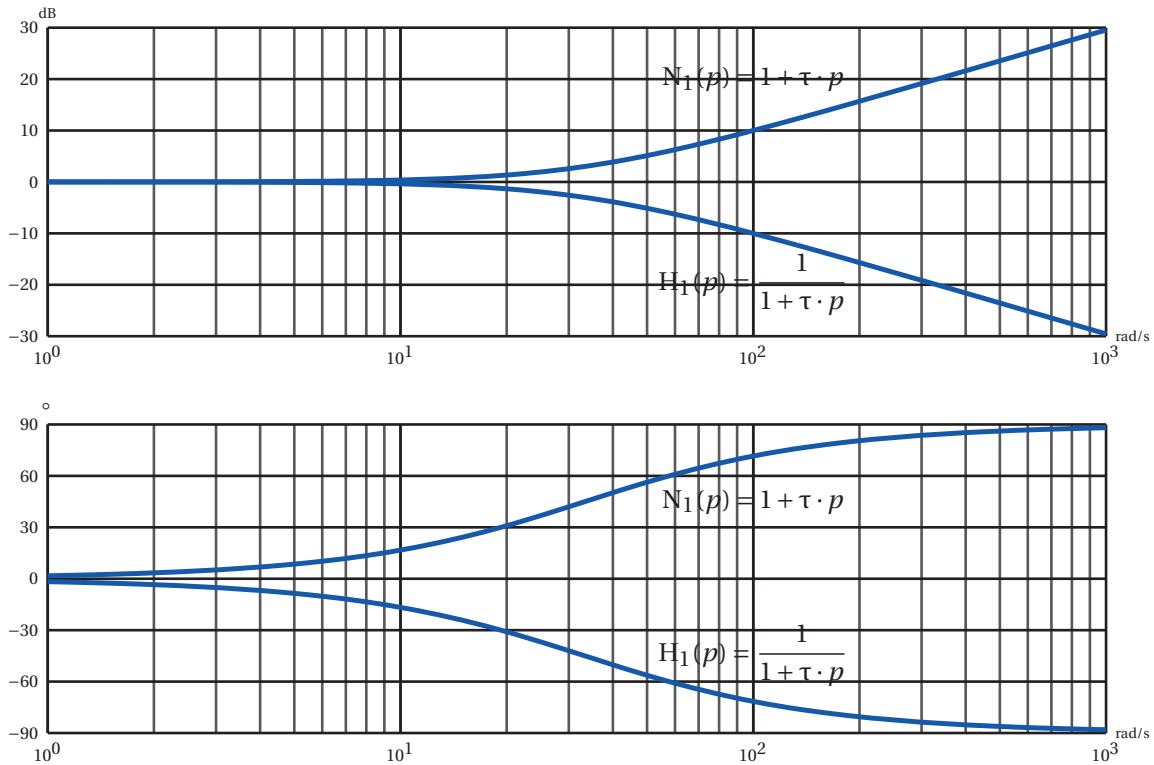


FIGURE 5.3 – Diagrammes de Bode - 1^{er} ordre au numérateur

— le module se déduit directement de $|N_1(j \cdot \omega)| = \left| \frac{1}{H_1(j \cdot \omega)} \right|$,
soit en décibel

$$20 \log(|N_1(j \cdot \omega)|) = 20 \log\left(\left| \frac{1}{H_1(j \cdot \omega)} \right|\right) = -20 \log(|H_1(j \cdot \omega)|)$$

— l'argument se déduit de la même manière

$$\arg(N_1(j \cdot \omega)) = \arg\left(\frac{1}{H_1(j \cdot \omega)}\right) = -\arg(H_1(j \cdot \omega))$$

On constate donc que le tracé (fig. 5.3) des diagrammes de Bode d'un polynôme du premier ordre est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du diagramme de Bode d'une fonction de transfert du premier ordre (pour un gain unitaire $K=1$). Cela est généralisable quel que soit l'ordre de la fonction de transfert.

5.2 Système du second ordre

5.2.1 Rappels

Un système du second ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2 \cdot z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

avec

- K : gain
- ω_n : pulsation propre rad s^{-1}
- z : coefficient (facteur) d'amortissement

La fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2 \cdot z}{\omega_n} \cdot p + 1}$$

5.2.2 Réponse temporelle

L'allure temporelle de la sortie dépend du facteur d'amortissement z (figure 5.4) :

- $0 < z < 1$: réponse temporelle oscillatoire amortie (pseudo périodique) ;
- $z = 1$: réponse temporelle apériodique critique ;
- $1 < z$: réponse apériodique.

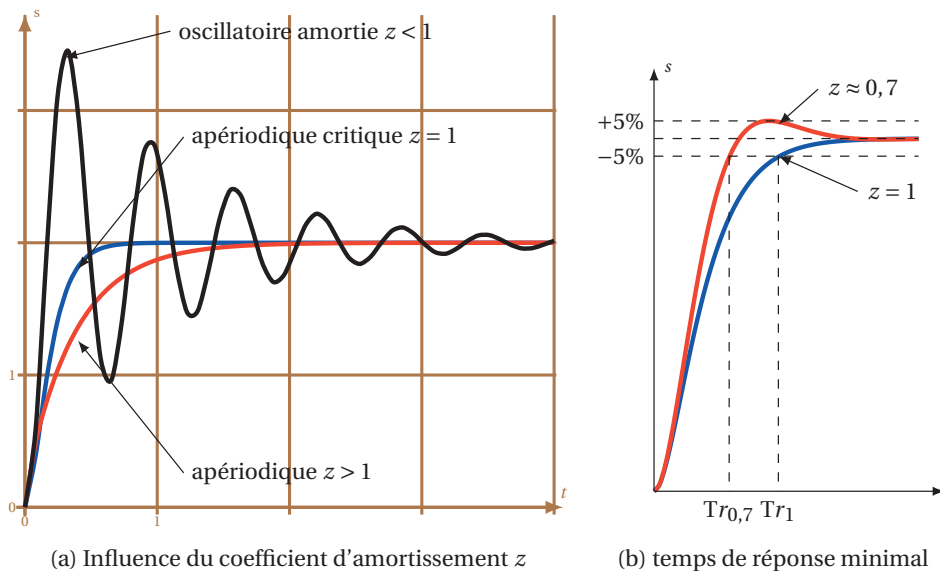


FIGURE 5.4 – Réponses temporelles système du 2nd ordre

Pour la réponse temporelle pseudo périodique ($0 < z < 1$), on peut noter :

1. l'étude complète est décrite dans le manuel de première année

- le dépassement relatif : $d = \frac{s_{\max} - s_{\infty}}{s_{\infty}} = e^{\frac{-\pi \cdot z}{\sqrt{1-z^2}}}$;
- la pseudo période : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-z^2}}$;
- l'instant du premier maximum : $T_{pm} = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-z^2}}$.

Le temps de réponse minimum sans dépassement est obtenu pour $z = 1$.

Le temps de réponse minimum est obtenu lorsque la réponse temporelle est tangente à la limite supérieure de l'encadrement (figure 5.4b), pour le premier maximum, alors $d = e^{\frac{-\pi \cdot z}{\sqrt{1-z^2}}} = 0,05$ soit $z = 0,6901067 \approx 0,7$ ce n'est pas $\frac{\sqrt{2}}{2}$!

L'abaque page ?? donne $T_r \cdot \omega_n$ en fonction de z .

5.2.3 Représentation fréquentielle

À partir de la fonction de transfert d'un second ordre (equ ??) on détermine la fonction de transfert complexe :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \cdot 2 \cdot z \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}$$

On déduit :

- la partie réelle :

$$\text{Re}(\omega) = \frac{K \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot z \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

- la partie imaginaire :

$$\text{Im}(\omega) = -\frac{2 \cdot K \cdot z \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot z \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

- le module :

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot z \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

- le module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log K - 10 \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot z \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right)$$

— l'argument :

$$\Phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2 \cdot z \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Nous avons vu, lors de l'étude de la réponse temporelle, que l'allure de cette réponse dépend du coefficient d'amortissement z . Étudions donc dans un premier temps le module et l'influence de z sur celui-ci :

Soit $A_1(u)$, le module réduit déduit du module de la fonction de transfert (5.2.3), en posant $u = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$A_1(u) = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2 \cdot z \cdot u)^2}}$$

Calculons la dérivée par rapport à u

$$\frac{dA_1(u)}{du} = K \frac{d}{du} \left((1-u^2)^2 + (2 \cdot z \cdot u)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = K \frac{4 \cdot u (u^2 + 2 \cdot z^2 - 1)}{\left((1-u^2)^2 + (2 \cdot z \cdot u)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Le numérateur s'annule pour :

— $u = 0$ soit $\omega = 0$ cette racine correspond à une asymptote horizontale dans le diagramme de Bode en amplitude,

— $u^2 + 2 \cdot z^2 - 1 = 0$, cette équation n'admet de racines réelles que pour $z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, la racine est alors $u_r = \frac{\omega_r}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2 \cdot z^2}$ soit $\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot z^2}$.

On appelle **pulsation de résonance** la pulsation

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot z^2}.$$

Pour cette pulsation, le module présente un maximum :

$$A(\omega_r) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot z \cdot \frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{K}{2 \cdot z \cdot \sqrt{1 - z^2}}$$

On définit Q_r , le **coefficient de résonance** (ou facteur de surtension) tel que

$$Q_r = \frac{A(\omega_r)}{A(\omega_0)} = \frac{1}{2 \cdot z \cdot \sqrt{1 - z^2}}$$

Le tracé du module (fig. 5.5) d'un système du second ordre dépend donc de la valeur du coefficient d'amortissement.

— $0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$ présence d'un maximum pour la pulsation de résonance ω_r ;

— $\frac{\sqrt{2}}{2} < z$ pas de maximum.

L'argument lui ne présente pas de maximum :

$$\Phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2 \cdot z \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right).$$

Il est possible d'affiner encore cette étude, en étudiant la forme de la fonction de transfert en fonction de z .

On distingue trois cas en fonction des racines du polynôme du dénominateur de la fonction de transfert du second ordre (??) :

$$D(p) = 1 + \frac{2 \cdot z \cdot p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2} = 0$$

— $0 < z < 1$: les deux racines du dénominateur sont complexes conjuguées, la fonction de transfert ne peut être simplifiée, l'étude a été réalisée précédemment :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2 \cdot z}{\omega_n} p + 1}$$

— $z > 1$: les deux racines sont réelles, la fonction de transfert alors peut se mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions du premier ordre :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

— module :

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T_1^2 \cdot \omega^2} \cdot \sqrt{1 + T_2^2 \cdot \omega^2}}$$

— module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log(\sqrt{1 + T_1^2 \cdot \omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + T_2^2 \cdot \omega^2})$$

— l'argument :

$$\Phi(\omega) = -\arctan(T_1 \cdot \omega) - \arctan(T_2 \cdot \omega)$$

— $z = 1$: le dénominateur possède une racine réelle double, la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T \cdot p)^2}$$

— module :

$$A(\omega) = \frac{K}{1 + T^2 \cdot \omega^2}$$

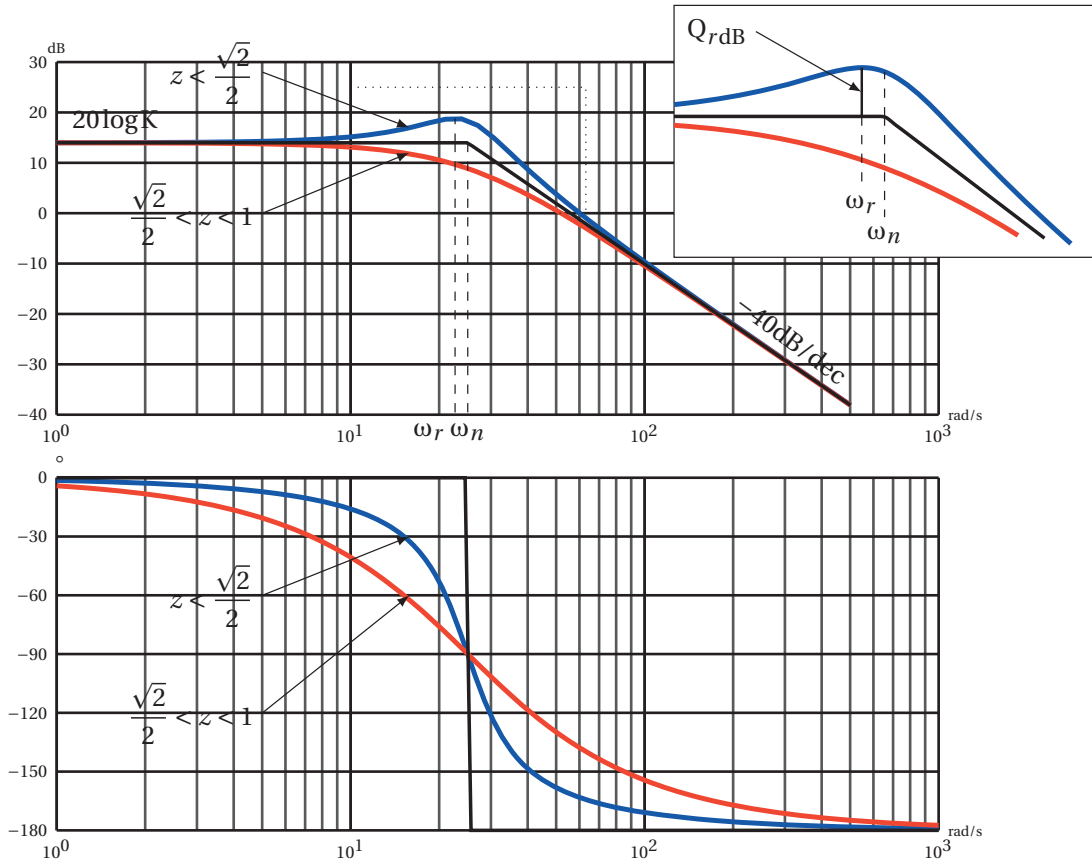
— module en dB :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log K - 10 \log(1 + T^2 \cdot \omega^2)$$

— argument :

$$\Phi(\omega) = -2 \cdot \arctan(T \cdot \omega)$$

Nous allons donc considérer pour l'étude fréquentielle du second ordre, les quatre cas suivant :

FIGURE 5.5 – Diagrammes de Bode 2nd ordre - 2 racines complexes

Cas $0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$ La fonction de transfert s'écrit :
$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \cdot 2 \cdot z \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}$$

À partir du module en dB et de l'argument, on peut tracer les diagrammes de Bode (fig 5.5), on retrouve sur ceux-ci :

diagramme d'amplitude :

- une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \log K$ lorsque $\omega \rightarrow 0$,
- une asymptote de pente -40dB/dec lorsque $\omega \rightarrow +\infty$,
- les deux asymptotes se croisent pour $\omega = \omega_n$ la pulsation propre,
- le diagramme d'amplitude présente un maximum pour la pulsation dite pulsation de résonance $\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot z^2}$, avec

$$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2 \cdot z \cdot \sqrt{1 - z^2}},$$

- le module pour la pulsation propre est : $|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot z}$.

diagramme de phase :

- une asymptote horizontale d'ordonnée 0° lorsque $\omega \rightarrow 0$,
- une d'ordonnée -180° lorsque $\omega \rightarrow +\infty$,
- $\Phi(\omega_n) = \arg(H(j \cdot \omega_n)) = -90^\circ$.

Cas $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z < 1$ On retrouve les mêmes asymptotes que dans le cas précédent, mais le diagramme d'amplitude ne présente pas de maximum, le tracé est toujours sous les asymptotes et très proche de celle-ci (l'écart est au maximum de -6dB si $z = 1$ pour la pulsation ω_n) et $|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot z}$

Cas $z > 1$ Lorsque $z > 1$, la fonction de transfert peut se décomposer en un produit de deux premiers ordres, $H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$, le tracé des diagrammes de Bode est donc la somme graphique des deux tracés du premier ordre (Cf. figure 5.6).

Les deux pulsations de cassure sont $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ (pour la suite que $\omega_1 < \omega_2$).

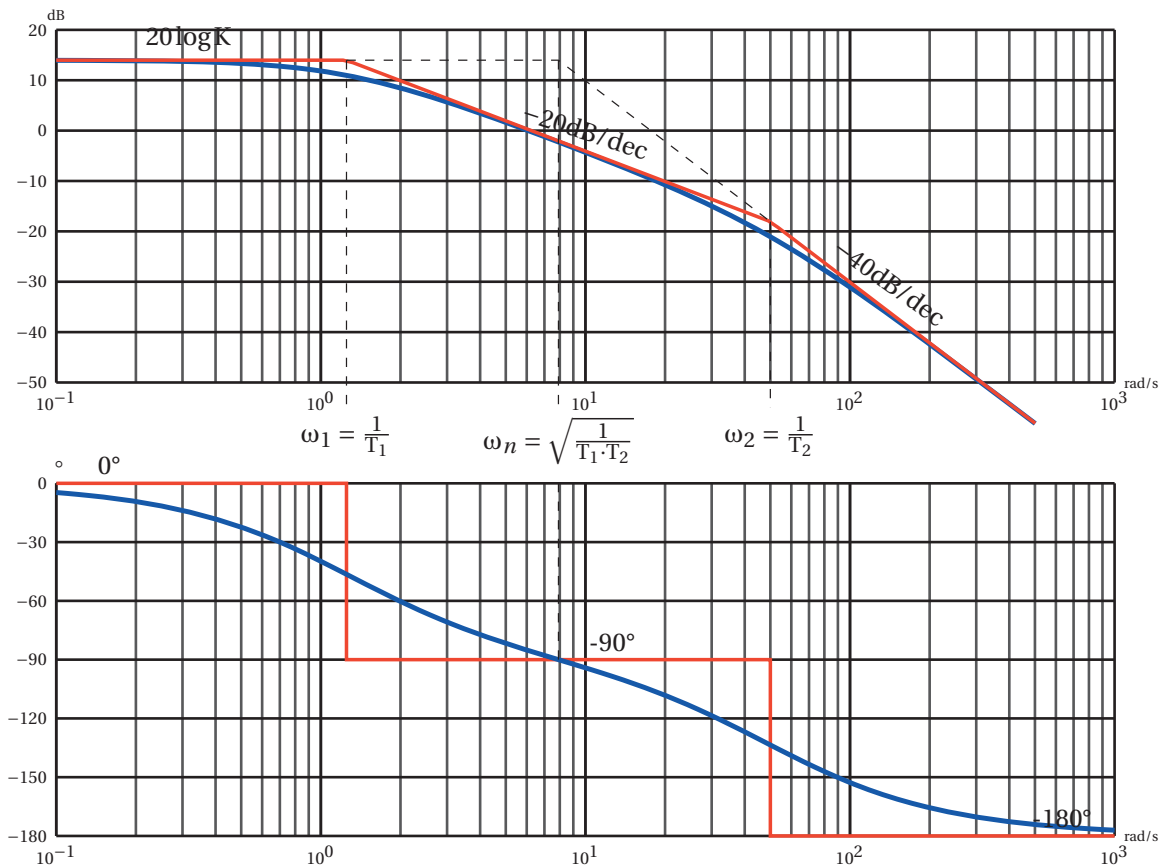


FIGURE 5.6 – Diagrammes de Bode 2nd ordre - 2 racines réelles

Le diagramme d'amplitude présente donc 3 asymptotes :

- une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \log K$ lorsque $\omega \rightarrow 0$, ($\log \omega \rightarrow -\infty$), jusqu'à la pulsation $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$;
- une asymptote² de pente -20dB/dec entre ω_1 et ω_2 ;
- une asymptote de pente -40dB/dec au delà de ω_2 .

Le diagramme des phases présente lui aussi 3 asymptotes :

- une asymptote horizontale d'ordonnée 0° lorsque $\omega \rightarrow 0$, jusqu'à ω_1 ;
- une asymptote horizontale d'ordonnée -90° entre ω_1 et ω_2 ;

2. Parler d'asymptote entre ω_1 et ω_2 est un abus de langage communément admis en automatique.

— une asymptote horizontale d'ordonnée -180° au delà de ω_2 .

Quelques valeurs et points particuliers

— pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$;

— sur le diagramme d'amplitude, l'asymptote horizontale et l'asymptote à -40dB/dec se croisent pour $\omega = \omega_n$;

— l'argument pour la pulsation propre est : $\arg(H(j\omega_n)) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$;

— le module pour la pulsation propre est : $|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot z}$

cas $z = 1$ La fonction de transfert est un premier ordre au carré : $H(p) = \frac{K}{(1 + T \cdot p)^2}$

Le tracé des diagrammes de Bode se déduit donc directement du tracé d'un système du premier ordre, ils possèdent donc les particularités suivantes que l'on retrouve sur la figure 5.7.

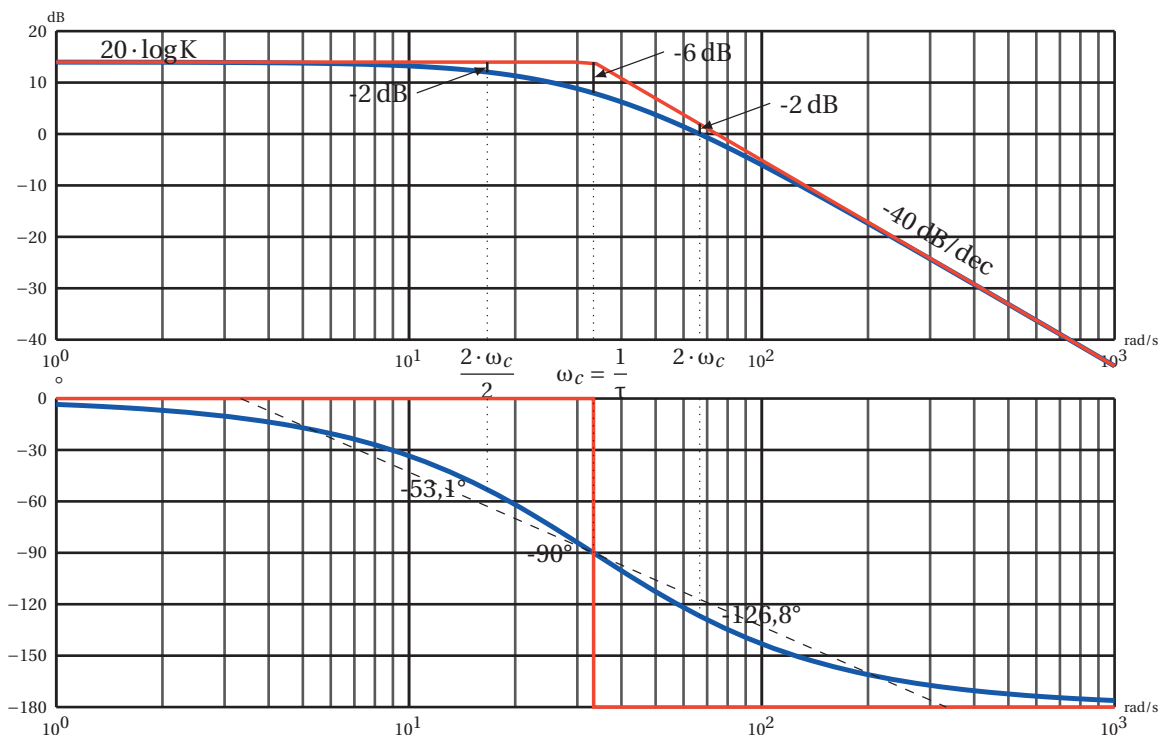


FIGURE 5.7 – Diagrammes de Bode 2nd ordre - 1 racine double

— diagramme d'amplitude

— une asymptote horizontale ($20\log K$) lorsque $\omega \rightarrow 0$ et une asymptote de pente -40dB/dec ($2 \times (-20\text{dB/dec})$) lorsque $\omega \rightarrow \infty$;

— pour la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{T}$, l'écart par rapport à l'asymptote est de -6dB ($2 \times (-3 \text{ dB})$), l'écart par rapport aux asymptotes est de -2dB pour les pulsations double et moitié;

— diagramme des phases

— une asymptote d'ordonnée 0° lorsque $\omega \rightarrow 0$;

— une d'ordonnée -180° lorsque $\omega \rightarrow +\infty$;

— pour ω_c l'argument de la fonction de transfert est de -90° ;

— comme pour un système du premier ordre il est utile de tracer le segment entre $(\log(\frac{1}{10T}), 0^\circ)$ et $(\log(\frac{10}{T}), -180^\circ)$ pour mieux approcher le tracé réel.

5.3 Intégrateur

Fonction de transfert :

$$H_i(p) = \frac{1}{T_i \cdot p}$$

Fonction de transfert complexe :

$$H_i(j\omega) = \frac{1}{T_i \cdot j \cdot \omega}$$

— Module :

$$|H_i(j\omega)| = \frac{1}{T_i \cdot \omega}$$

— Module en dB :

$$|H_i(j\omega)|_{dB} = -20 \log \omega - 20 \log T_i$$

— Argument :

$$\arg(H_i(j\omega)) = -90^\circ$$

Le diagramme d'amplitude (fig 5.8) d'un intégrateur est une droite de pente -20dB/dec passant par $-20 \log T_i$ pour $\omega = 1$ ($\log \omega = 0$).

Le diagramme de phase est une droite horizontale d'ordonnée -90° .

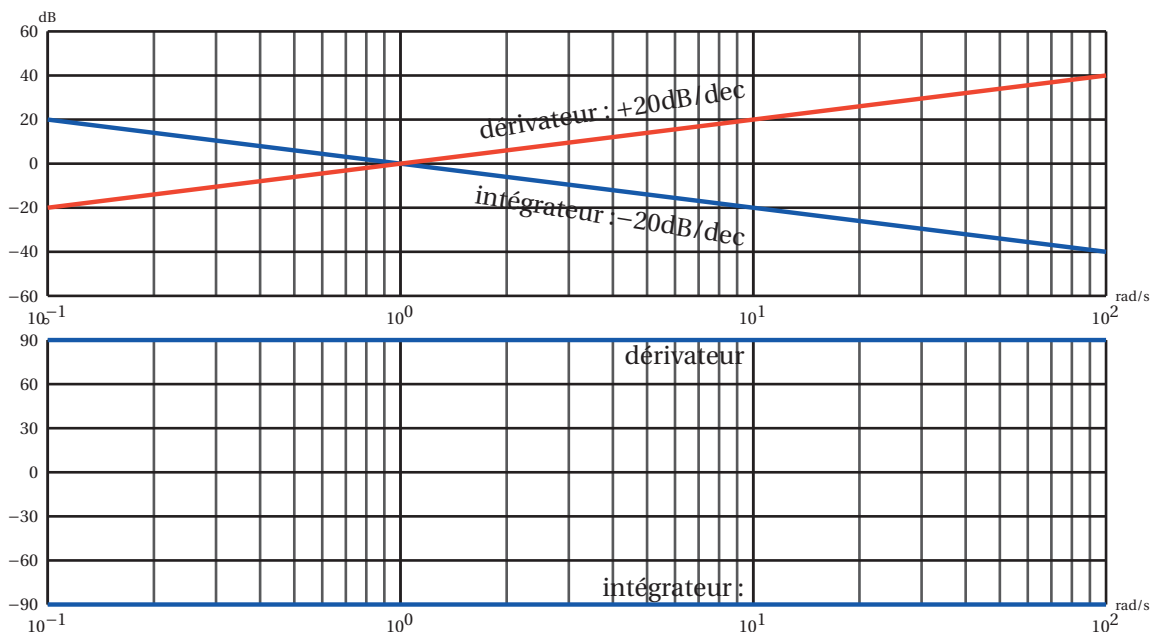
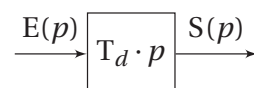


FIGURE 5.8 – Diagrammes de Bode - Intégrateur - Dérivateur

5.4 Dérivateur

Fonction de transfert :

$$H_d(p) = T_d \cdot p$$



Fonction de transfert complexe :

$$H_d(j\omega) = T_d \cdot j \cdot \omega$$

— Module :

$$|H_d(j\omega)| = T_d \cdot \omega$$

— Module en dB :

$$|H_d(j\omega)|_{dB} = +20 \log \omega + 20 \log T_d$$

— Argument :

$$\arg(H_d(j\omega)) = +90^\circ$$

Diagrammes de Bode (fig 5.8)

Le diagramme d'amplitude d'un dérivateur est une droite de pente +20dB/dec passant par +20logT_d pour ω = 1 .

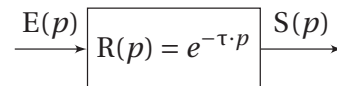
Le diagramme de phase est une droite horizontale d'ordonnée +90° .

5.5 Retard pur

Soit un système tel que la sortie est en retard sur l'entrée d'un temps τ :

$$s(t) = e(t - \tau).$$

Le théorème du retard nous permet d'écrire en passant dans le domaine de Laplace :



$$S(p) = e^{-\tau p} \cdot E(p)$$

La transformée de Laplace d'un retard pur est donc :

$$R(p) = e^{-\tau \cdot p}$$

On en déduit la fonction de transfert complexe :

$$R(j \cdot \omega) = e^{-\tau \cdot j \cdot \omega} = R(j \cdot \omega) = \cos \tau \omega - j \sin \tau \omega$$

Le module est constant,

$$|R(j \cdot \omega)| = 1$$

L'argument est constamment décroissant (Cf. figure 5.9)

$$\arg(R(j \cdot \omega)) = -\tau \omega$$

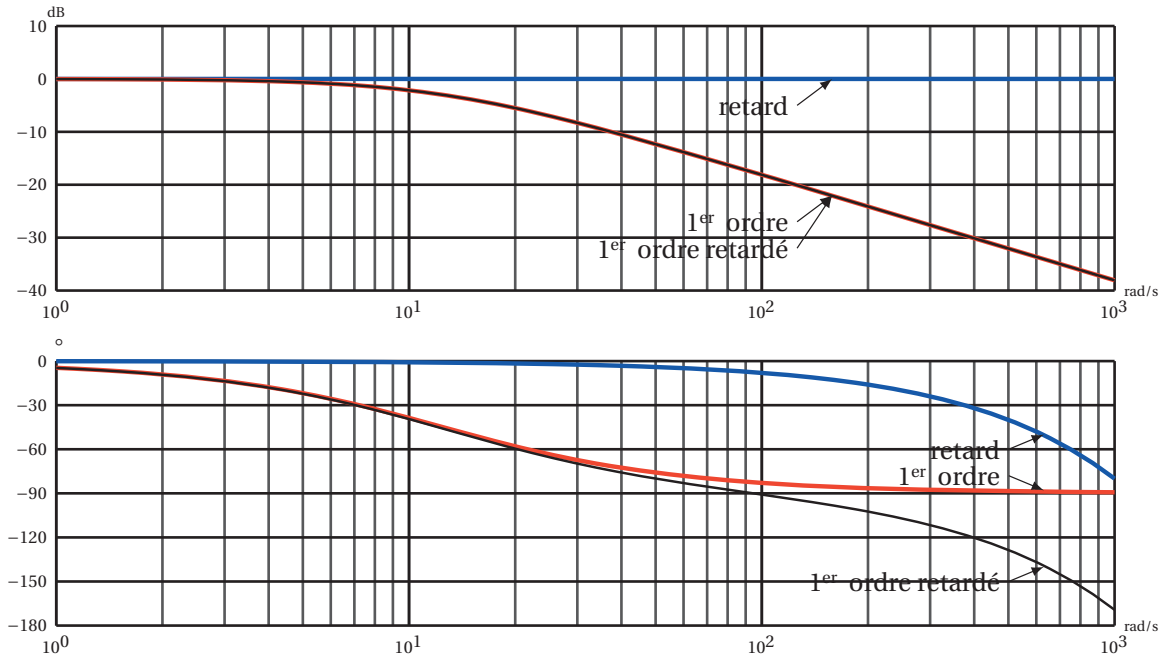


FIGURE 5.9 – Diagrammes de Bode - Influence d'un retard

5.5.1 Influence d'un retard sur le tracé d'un lieu de Bode

Pour évaluer l'effet d'un retard sur le lieu de Bode, nous allons étudier la fonction de transfert d'un retard pur associé à un premier ordre,

$$H(p) = e^{-\tau p} \frac{1}{1 + T \cdot p}$$

Fonction de transfert complexe,

$$H(j \cdot \omega) = e^{-\tau j \cdot \omega} \frac{1}{1 + T \cdot j \cdot \omega}$$

— module :

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{K}{1 + j \cdot \tau \cdot \omega} \right|$$

— argument :

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan(\tau \cdot \omega) - \tau_1 \cdot \omega$$

On remarque sur la figure 5.9 que le module n'est pas influencé par le retard (les deux tracés sont superposés), par contre l'argument est diminué de $\tau \cdot \omega$.

Un retard augmente le déphasage entre l'entrée et la sortie du système. Nous verrons plus loin, lors de l'étude de la stabilité des systèmes asservis, que cet effet est fortement préjudiciable à la stabilité des systèmes

a) Modélisation linéaire d'un retard

En première approximation, un retard peut être modélisé par une fonction de transfert du premier ordre

$$R(p) = e^{-\tau \cdot p} \approx \frac{1}{1 + \tau \cdot p}$$

cette approximation n'est valable que si la pulsation du système reste toujours inférieure à $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

Une meilleure approximation est l'approximation de Padé. Elle consiste à réaliser un développement limité de la fonction de transfert, après l'avoir écrite sous la forme

$$R(p) = e^{-\tau \cdot p} = \frac{e^{-\frac{\tau \cdot p}{2}}}{e^{+\frac{\tau \cdot p}{2}}} = \frac{1 - \frac{\tau}{2} \cdot p}{1 + \frac{\tau}{2} \cdot p}$$

5.6 Généralisation du tracé des diagrammes de Bode

Toute fonction de transfert sans retard peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_m p^m}$$

avec

- n : degré du polynôme du numérateur;
- m : degré du polynôme dénominateur;
- K : le gain statique;
- α : la classe de la fonction de transfert.

Le numérateur et le dénominateur sont deux polynômes, pour les systèmes physiques, le degré global du dénominateur est supérieur au degré du numérateur : $m + \alpha - n \geq 0$.

On peut, en recherchant les racines de chaque polynôme, mettre la fonction de transfert sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod (1 + \tau_i \cdot p) \cdot \prod \left(1 + 2 \frac{z_j}{\omega_{n_j}} p + \frac{p^2}{\omega_{n_j}^2} \right)}{\prod (1 + \tau_k \cdot p) \cdot \prod \left(1 + 2 \frac{z_l}{\omega_{n_l}} p + \frac{p^2}{\omega_{n_l}^2} \right)}$$

La fonction de transfert s'écrit donc comme le produit de plusieurs fonctions élémentaires (premier, deuxième ordre et intégration/dérivation).

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot \dots \cdot H_I(p) \cdot \dots \cdot H_N(p)$$

Ce qui nous permet d'écrire le module et l'argument en dB :

module en dB

$$|H(j \cdot \omega)|_{dB} = 20 \log(|H_1(j \cdot \omega)|) + \dots + 20 \log(|H_I(j \cdot \omega)|) + \dots + 20 \log(|H_N(j \cdot \omega)|)$$

argument

$$Arg(H(j \cdot \omega)) = Arg(H_1(j \cdot \omega)) + \dots + Arg(H_I(j \cdot \omega)) + \dots + Arg(H_N(j \cdot \omega))$$

On obtient ainsi les diagrammes de Bode de la FT en sommant graphiquement les diagrammes de Bode de chaque fonction élémentaire.

Comportement lorsque $\omega \rightarrow \infty$

— Argument

- une fonction du premier ordre apporte un déphasage maximal (à l'infini) de -90° si elle est au dénominateur et de $+90^\circ$ si elle est au numérateur,
- une fonction du second ordre apporte un déphasage maximal de -180° si elle est au dénominateur et de $+180^\circ$ si elle est au numérateur,
- un intégrateur apporte lui un déphasage constant de -90° et le dérivateur de $+90^\circ$.

Ces déphasages s'ajoutant, on peut déduire que le déphasage total de la fonction de transfert lorsque la pulsation augmente tend vers :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(H(j \cdot \omega)) = (n - m - \alpha) \cdot 90^\circ$$

— Module

- le tracé du lieu de Bode d'un premier ordre tend vers une asymptote de pente -20dB/dec s'il est dénominateur et de $+20\text{dB/dec}$ s'il est au numérateur,
- un second ordre tend vers une asymptote de pente -40dB/dec s'il est dénominateur et de $+40\text{dB/dec}$ s'il est au numérateur,
- le lieu de Bode d'un intégrateur est une droite de pente -20dB/dec et de $+20\text{dB/dec}$ pour un dérivateur.

Ces pentes s'ajoutent, on peut donc déduire que l'asymptote finale a une pente de

$$(n - m - \alpha) 20\text{dB/dec}$$

Comportement lorsque $\omega \rightarrow 0$

À partir de la forme factorisée de $H(p)$ décrite plus haut, on déduit que l'allure des lieux de Bode lorsque $\omega \rightarrow 0$ ne dépend que de la classe α de la fonction de transfert et K . En effet, le module en dB et l'argument de chaque fonction du premier et du second ordre sont nuls lorsque $\omega \rightarrow 0$. L'allure des diagrammes de Bode en 0 se déduit donc de :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (H(j \cdot \omega)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(K \cdot \frac{1}{(j \cdot \omega)^\alpha} \right)$$

— $\alpha = 0$

- l'argument tend vers 0,
- le module tend lui vers : $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j \cdot \omega)|_{\text{dB}} = 20 \log K$

— $\alpha > 0$

- l'argument tend vers une asymptote horizontale d'ordonnée : $-\alpha \cdot 90^\circ$.
- le module tend vers une asymptote d'équation : $20 \log K - \alpha \cdot 20 \cdot \log \omega$.

5.7 Exercices

Exercice 1- Second ordre généralisé

Corrigé page 44

Soit $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1 + T \cdot p}{(1 + T_1 \cdot p)(1 + T_2 \cdot p)}$, on se propose d'étudier la réponse fréquentielle pour les cas suivants :

- $T < T_1 < T_2$ avec pour les tracés $T = 0,01\text{ s}$, $T_1 = 0,1\text{ s}$ et $T_2 = 1\text{ s}$;
- $T_1 < T < T_2$ avec pour les tracés $T = 0,1\text{ s}$, $T_1 = 0,01\text{ s}$ et $T_2 = 1\text{ s}$;
- $T_1 < T_2 < T$ avec pour les tracés $T_1 = 0,1\text{ s}$, $T_2 = 0,01\text{ s}$ et $T = 1\text{ s}$.

Q1. Tracer les diagrammes de Bode pour chacun des trois cas.

On sollicite le système par une entrée en échelon d'amplitude E_0

Q2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $S(p)$, en déduire $s(t)$

Q3. Tracer $s(t)$

Exercice 2- Second ordre généralisé-2

Corrigé page 45

Soit la fonction $G(p) = 20 \frac{1 + T \cdot p}{1 + 2z \cdot T \cdot p + T^2 \cdot p^2}$ avec $T = 0,02$ et $z = 0.4$

Q1. Tracer les diagrammes de Bode de $G(p)$.

Exercice 3- Avance de phase - retard de phase

Corrigé page 46

Soit $F(p) = \frac{1 + a \cdot T \cdot p}{1 + T \cdot p}$ avec $T = 0,5\text{ s}$ pour les valeurs suivantes de a : $a = 8$ puis $a = 0,1$.

Q1. Tracer les diagrammes de Bode pour les différentes valeur de a .

Q2. Déterminer le maximum (le minimum) de l'amplitude en fonction de a .

Nous verrons plus loin que cette fonction de transfert correspond à un correcteur à avance de phase ou à retard de phase.

Q3. Pour quelle valeurs de a parle-t-on de correcteur à avance de phase.

Exercice 4- Système à retard

Corrigé page 47

Soit le système décrit par la fonction de transfert

$$H_2(p) = \frac{1 + 0,4 \cdot p}{(1 + 3 \cdot p + 0,2 \cdot p^2)} e^{-0,05 \cdot p}$$

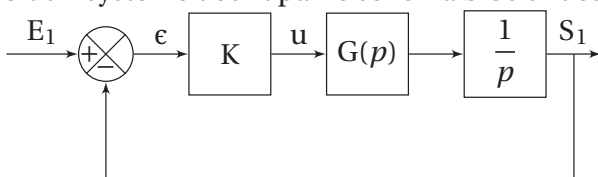
Q1. Tracer les diagrammes de Bode, Black et Nyquist de $H_2(p)$.

Q2. Préciser pour chaque fonction et courbe, les points caractéristiques et les asymptotes.

Exercice 5- Étude d'un système bouclé

Corrigé page 49

Soit un système décrit par le schéma bloc ci-dessous :



Un relevé fréquentiel du mécanisme a permis de préciser la fonction $G(p)$ (tableau 5.1).

Pulsation [rad/s]	0.10	0.18	0.32	0.56	1.00	1.78	3.16
Ampl. [dB]	-6.0	-6.0	-5.8	-5.4	-4.2	-1.2	-11.0
Phase [°]	-1.7	-3.1	-5.6	-10.4	-21.8	-68.6	-147.7
Pulsation [rad/s]	5.62	10.00	17.78	31.62	50.30	80.00	
Ampl. [dB]	-23.1	-33.7	-43.9	-54.0	-62.0	-70.1	
Phase [°]	-166.3	-172.9	-176.1	-177.8	-178.6	-179.1	

TABLE 5.1 – Relevé fréquentiel de $G(p)$

Q1. Tracer les diagrammes de Bode de $G(p)$.

Q2. Déterminer $G(p)$

Q3. Sur ces mêmes diagrammes, tracer les diagrammes de $\frac{1}{p}$ puis les diagrammes de Bode de la FTBO pour $K = 1$.

Q4. Déterminer K pour que la marge de phase soit de $M_p = 45^\circ$.