

1.1. Modélisation cinématique des mécanismes

1.1.1. Problématique

Il est souvent nécessaire d'établir un modèle permettant d'étudier aussi bien les mouvements du mécanisme que les efforts qu'il doit supporter. En effet le système réel, soit parce qu'il n'existe pas encore (en phase de conception) soit parce qu'il est trop complexe n'est en général pas adapté à l'étude. La modélisation va intervenir aussi bien au niveau de la conception d'un mécanisme que dans l'analyse à posteriori d'un mécanisme existant.

- Dans le premier cas on se pose alors la question suivante : Comment transmettre une puissance, obtenir une trajectoire particulière, résister à des efforts, ... ? La réponse consiste à définir un ensemble de liaisons élémentaires associées pour obtenir le résultat souhaité. Après cette étape il reste à concevoir à partir de ce modèle les pièces qui composent le mécanisme.
- Dans le second cas, le mécanisme étant donné, on se propose alors de le modéliser par un schéma qui va en permettre une analyse plus simple. À partir de cette modélisation on pourra en étudier le comportement tant au niveau des mouvements (trajectoire, vitesse, accélération) qu'au niveau des efforts transmis et ceux qui doivent encaisser les liaisons.

1.1.2. Modèle cinématique

Un solide dans un mécanisme est lié aux solides voisins et les mouvements relatifs sont limités par la nature des surfaces en contact. À partir de ces surfaces en contact et des mouvements relatifs on choisit alors de modéliser le contact par une (ou plusieurs) liaison(s) cinématique(s). Le torseur cinématique est le principal outil de cette caractérisation :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{1/0} \\ \overrightarrow{V}_{A \in 1/0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{array} \right\}_{\substack{A \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}} .$$

Ce torseur caractérise les 6 mouvements élémentaires possibles (3 rotations, 3 translations) entre deux solides.

Le principal problème que l'on rencontre lors de cette phase est la différence entre la réalité et le modèle. En effet, les défauts de réalisation des surfaces (rugosité, défaut de forme, tolérance), la présence nécessaire de jeu, la déformation des pièces, l'usure, ..., rendent cette modélisation difficile et souvent dépendante du point de vue.

On appelle modèle cinématique d'un mécanisme, le modèle construit autour des hypothèses suivantes :

- des pièces indéformables,

- des liaisons sans jeu,
- des surfaces de contact géométriquement parfaites,
- des surfaces de contact simples (plan, sphère, cylindre, hélicoïde).

À partir de ces hypothèses, on modélise la liaison entre les deux solides par une liaison normalisée. Ces liaisons élémentaires permettent de caractériser les mouvements simples entre les pièces (rotations, translations, combinées ou non).

1.2. Liaisons normalisées

1.2.1. Paramétrage des liaisons

La liaison entre les deux solides est caractérisée par le torseur cinématique du mouvement relatif entre les deux solides. Les coordonnées de ce torseur cinématique sont les paramètres de la liaison.

1.2.2. Tableau des liaisons

Les tableaux en annexe (page ??) présentent les liaisons normalisées. La norme applicable est la norme NF EN ISO 3952-1.

Pour chaque liaison on retrouve

- la désignation normalisée, le torseur cinématique associé, le torseur des efforts transmissibles ;
- une représentation géométrique de la liaison ;
- le symbole ISO en perspective et les deux vues planes ;
- les torseurs sont écrits sous la forme la plus générale possible.

1.3. Chaînes de solides

1.3.1. Structure des mécanismes - graphe de structure

Un mécanisme est constitué de solides reliés par des liaisons cinématiques. L'ensemble de ces liaisons et des solides forme une chaîne de solides.

Cette chaîne peut-être représentée par un graphe dit graphe de structure (ou graphe des liaisons). Sur ce graphe, les solides sont les nœuds et les liaisons les arcs. Il est d'usage de préciser le solide référentiel.

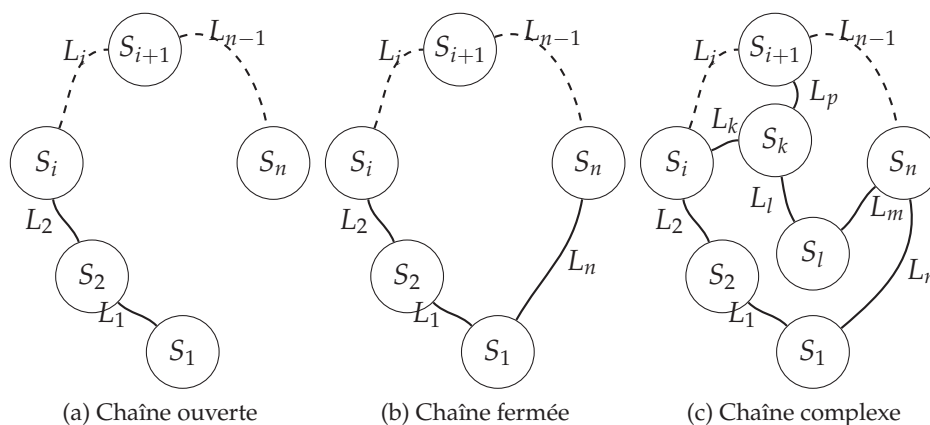


FIGURE 1.1. – Chaînes de solides

a). Classe d'équivalence cinématique

On appelle classe d'équivalence cinématique, un ensemble de solides n'ayant aucun mouvement relatif. Cet ensemble de solides est considéré comme un seul solide dans les études qui suivent. Lors de l'étude d'un mécanisme, on commence par définir les classes d'équivalence puis on recherche les liaisons entre ces classes d'équivalence.

b). Chaînes ouvertes

Une chaîne de solide est dite ouverte (fig 1.1a) lorsque la structure correspond à un ensemble de solides liés les uns aux autres sans bouclage. On retrouve cette structure dans les mécanismes de type robot, grue, manipulateur, ...

c). Chaînes fermées

Une chaîne de solide est dite fermée (fig 1.1b) lorsque le graphe présente une boucle.

d). Chaînes complexes

La chaîne de solides est dite complexe (fig 1.1c) lorsqu'elle présente plusieurs boucles imbriquées.

Nombre cyclomatique Le nombre cyclomatique γ caractérise la complexité de la chaîne, il précise le nombre minimal de boucles qu'il est nécessaire d'étudier pour définir complètement le mécanisme. Une chaîne fermée simple a un nombre cyclomatique de 1.

$$\gamma = L - N + 1$$

avec L, le nombre de liaisons du mécanisme et N, le nombre de solides du mécanisme.

1.3.2. Analyses géométrique et cinématique des mécanismes

a). Étude géométrique d'un mécanisme en chaîne fermée

Pour réaliser l'étude géométrique d'un système en boucle fermée (fig 1.1b), il suffit d'écrire la relation vectorielle reliant les points caractéristiques de chaque solide.

Soit O_i , le point caractéristique du solide S_i , la relation de fermeture de la chaîne géométrique s'écrit :

$$\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \dots + \overrightarrow{O_{i-1}O_i} + \dots + \overrightarrow{O_{n-1}O_n} + \overrightarrow{O_nO_1} = \vec{0}.$$

En projetant cette équation vectorielle dans une base orthonormée, on obtient 3 équations scalaires reliant les différents paramètres géométriques.

Remarque : Dans le cas d'un mécanisme plan, on obtient 2 équations scalaires, déduites de la projection de cette relation sur les axes du plan.

Exemple : robot marcheur

Soit le robot marcheur de la figure 1.2

Les six pattes du robot sont identiques et sont synchronisées trois par trois selon la technique du « trépied » alterné. Au sein de chaque flanc la patte du centre est décalée angulairement par rapport aux deux autres de l'angle β rad

- le carter (0) est supposé fixe ;
- le maneton (1) pivote par rapport au carter autour de l'axe (O, \vec{z}_0) et en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) avec la patte (2) ;
- la patte (2) pivote autour de l'axe (A, \vec{z}_0) avec le guide (3),

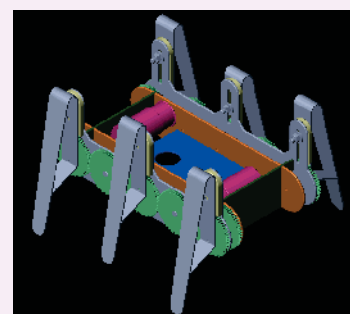
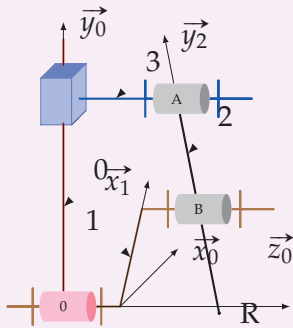


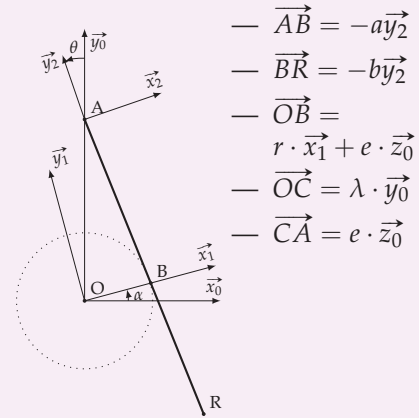
FIGURE 1.2. – Robot marcheur

elle est simultanément entraînée par le maneton (2) par une liaison en B

- le guide (3) coulisse le long de (O, \vec{y}_0) par rapport au carter (0).



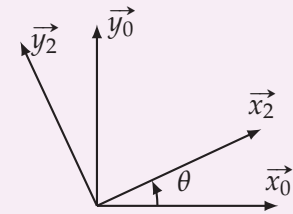
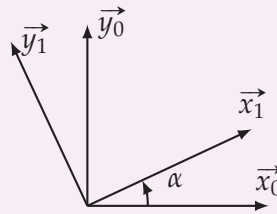
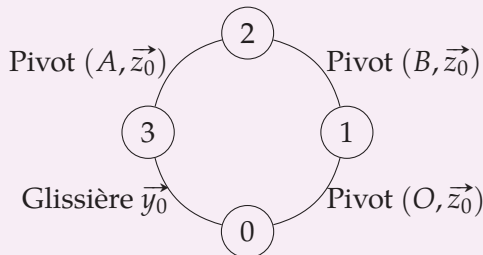
(a) Schéma cinématique



(b) Données

FIGURE 1.3. – Modélisation

À partir de ces schémas, on peut tracer le graphe de structure (on reconnaît une chaîne fermée simple) et les figures de changements de base.



On en déduit :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{1/0} &= \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{\Omega}_{2/0} &= \vec{\Omega}_{2/3} + \vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 + \vec{0} \end{aligned}$$

Étude géométrique :

La fermeture géométrique s'écrit :

$$\vec{OC} + \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$$

soit en projection dans $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

$$\begin{cases} a \cdot \sin \theta - r \cdot \cos \alpha = 0 \\ \lambda - a \cdot \cos \theta - r \sin \alpha = 0 \\ e - e = 0 \end{cases}$$

À partir de ces relations, il est assez facile d'obtenir les relations entre θ et α puis entre λ et α .

Pour θ :

$$\sin \theta = \frac{r}{a} \cdot \cos \alpha$$

$$\theta = \arcsin \left(\frac{r}{a} \cdot \cos \alpha \right)$$

puis λ

$$\lambda = a \cdot \cos \theta + r \sin \alpha$$

$$\lambda = a \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \theta} + r \sin \alpha$$

$$\lambda = a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \cdot \cos \alpha \right)^2} + r \sin \alpha$$

b). Étude cinématique d'un mécanisme en chaîne fermée

Soit, un mécanisme en chaîne fermée composé de n solides et n liaisons (fig 1.1b). Pour chaque liaison L_i , on peut écrire le torseur cinématique entre les deux solides S_i et S_{i+1} de la liaison au point O_i caractéristique de la liaison.

$$\left\{ \mathcal{V}_{(i+1)/i} \right\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega}_{(i+1)/i}}{V_{O_i \in (i+1)/i}} \right\}_{O_i}$$

La fermeture cinématique s'obtient en écrivant la somme des torseurs en un même point :

$$\left\{ \mathcal{V}_{1/2} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{2/3} \right\} + \dots + \left\{ \mathcal{V}_{(i-1)/i} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{i/(i+1)} \right\} + \dots + \left\{ \mathcal{V}_{n/1} \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

Cette relation permet d'obtenir 2 équations vectorielles, et après projection 6 équations scalaires.

À partir de ce système d'équation, on déduit le degré de mobilité du mécanisme.

Remarque : cette somme de torseur ne peut se calculer que si les torseurs sont écrits en un même point.

Exemple : robot marcheur (suite)

on continue l'exemple du robot marcheur

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/2} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{1/0} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{0/3} \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

avec les torseurs cinématiques :

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/2} \right\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega}_{3/2} = \omega_{32} \cdot \vec{z}_0}{\vec{0}} \right\}_{\forall Q \in (A, \vec{z}_0)}, \quad \left\{ \mathcal{V}_{1/0} \right\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0}{\vec{0}} \right\}_{\forall Q \in (O, \vec{z}_0)}$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \omega_{21} \cdot \vec{z}_0}{\vec{0}} \right\}_{\forall Q \in (B, \vec{z}_0)}, \quad \left\{ \mathcal{V}_{0/3} \right\} = \left\{ \frac{\vec{0}}{V_{C \in 0/3} = -\dot{\lambda} \cdot \vec{y}_0}} \right\}_{\forall Q}$$

On écrit la fermeture cinématique en O :

$$\overrightarrow{V_{O \in 3/2}} = \overrightarrow{V_{A \in 3/2}} + \overrightarrow{\Omega}_{3/2} \wedge \overrightarrow{AO} = \omega_{32} \cdot \vec{z}_0 \wedge (-e \cdot \vec{z}_0 - \lambda \cdot \vec{y}_0) = \lambda \cdot \omega_{32} \cdot \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{V_{O \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BO} = \omega_{21} \cdot \vec{z}_0 \wedge (-r \cdot \vec{x}_1 - e \cdot \vec{z}_0) = -r \cdot \omega_{21} \cdot \vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{V_{O \in 2/1}} = -r \cdot \omega_{21} \cdot \cos \alpha \cdot \vec{y}_0 + r \cdot \omega_{21} \cdot \sin \alpha \cdot \vec{x}_0$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/2} \right\} = \left\{ \frac{\omega_{32} \cdot \vec{z}_0}{\lambda \cdot \omega_{32} \cdot \vec{x}_0} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \lambda \cdot \omega_{32} \\ 0 & 0 \\ \omega_{32} & 0 \end{array} \right\}_{\substack{O \\ (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{21} \cdot \vec{z}_0 \\ -r \cdot \omega_{21} \cdot \cos \alpha \cdot \vec{y}_0 + r \cdot \omega_{21} \cdot \sin \alpha \cdot \vec{x}_0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & +r \cdot \omega_{21} \cdot \sin \alpha \\ 0 & -r \cdot \omega_{21} \cdot \cos \alpha \\ \omega_{21} & 0 \end{array} \right\}_{\substack{O \\ (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}},$$

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10} & 0 \end{array} \right\}_{\substack{O \\ (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}}, \quad \{\mathcal{V}_{0/3}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}_{C \in 0/3} = -\dot{\lambda} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\lambda} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\substack{O \\ (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}}.$$

d'où le système de 6 équations de la fermeture cinématique.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} & & & 0 & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \\ & \omega_{32} & +\omega_{21} & +\dot{\alpha} & = 0 \\ \lambda \cdot \omega_{32} & +r \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{21} & & & = 0 \\ & -r \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{21} & & -\dot{\lambda} & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array} \right.$$

En notant que $\vec{\Omega}_{3/2} = \vec{\Omega}_{3/0} - \vec{\Omega}_{2/0}$ on déduit que $\omega_{32} = -\dot{\theta}$.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} & & & 0 & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \\ -\dot{\theta} & +\omega_{21} & +\dot{\alpha} & & = 0 \\ -\lambda \cdot \dot{\theta} & +r \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{21} & & & = 0 \\ & -r \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{21} & & -\dot{\lambda} & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array} \right.$$

On reconnaît un système de 6 équations avec ici, 4 inconnues que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\lambda & r \cdot \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -r \cdot \cos \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \\ \omega_{21} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le rang de ce système est $r_c = 3$. Pour résoudre ce système, il faut choisir un paramètre (il est souvent judicieux pour l'étude cinématique, de choisir, soit le paramètre d'entrée (ici, $\dot{\alpha}$) ou le paramètre de sortie, on appelle ce paramètre le paramètre pilote).

Le nombre de paramètre qu'il est nécessaire d'imposer pour résoudre le système est le **degré de mobilité** du mécanisme, ici $m = 1$.

On met alors le système sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -\dot{\theta} & +\omega_{21} & = -\dot{\alpha} \\ -\lambda \cdot \dot{\theta} & +r \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{21} & = 0 \\ & -r \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{21} & -\dot{\lambda} = 0 \end{array} \right.$$

soit le système :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -\lambda & r \cdot \sin \alpha & 0 \\ 0 & -r \cdot \cos \alpha & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \\ \omega_{21} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la résolution donne :

$$\dot{\lambda} = -\frac{r \cdot \lambda \cdot \cos \alpha}{r \cdot \sin \alpha - \lambda} \cdot \dot{\alpha}, \quad \dot{\theta} = \frac{r \cdot \sin \alpha}{r \cdot \sin \alpha - \lambda} \cdot \dot{\alpha}, \quad \omega_{21} = \frac{\lambda}{r \cdot \sin \theta - \lambda} \cdot \dot{\alpha}.$$

Avec : $\lambda = a \cdot \cos \theta + r \sin \alpha$ on peut écrire :

$$\dot{\theta} = \frac{r \cdot \sin \alpha}{r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \alpha} \cdot \dot{\alpha} = -\frac{r \cdot \sin \alpha}{a \cdot \cos \theta} \cdot \dot{\alpha}$$

On retrouve la dérivée de la relation géométrique entre θ et α .

Remarque : On remarque que ce système de $E_c = 6$ équations avec un rang $r_c = 3$. Nous verrons plus loin que la quantité $h = E_c - r_c = 3$ représente le degré d'hyperstaticité de ce mécanisme.

1.3.3. Liaisons cinématiquement équivalentes

On appelle liaison cinématiquement équivalente entre deux pièces, la liaison qui se substituerait à l'ensemble des liaisons réalisées entre ces pièces avec ou sans pièce intermédiaire.

La liaison équivalente doit avoir le même comportement que l'ensemble des liaisons auquel elle se substitue.

On considère deux types de liaisons équivalentes : les liaisons en série et les liaisons en parallèles. Pour déterminer la liaison équivalente, on pourra soit réaliser une étude du point de vue cinématique, soit du point de vue statique.

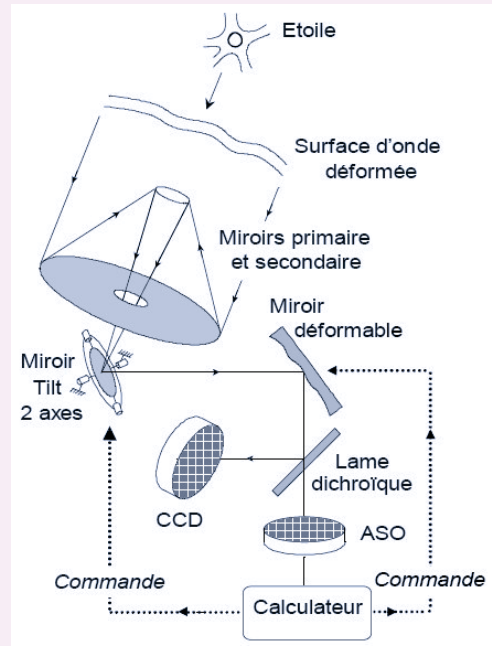
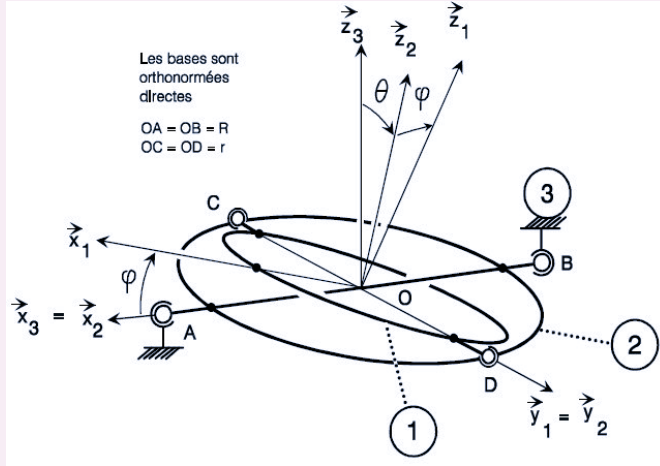


FIGURE 1.4. – Liaisons équivalentes

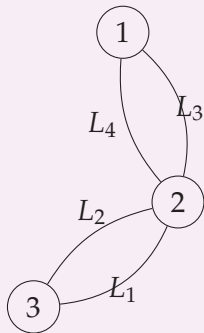
Exemple : Miroir de tilt

Le miroir de tilt est utilisé dans le Very Large Télescope pour diriger la lumière issue du miroir secondaire vers l'optique adaptative.

Le miroir de tilt est installé sur une structure mécanique permettant d'orienter le faisceau, il est solidaire du solide orientable 1 (figure ??).



Le graphe des liaisons est le suivant :



On trouve à la fois dans ce schéma,

- des liaisons en parallèle entre (1) et (2) et entre (2) et (3)
- des liaisons en série

FIGURE 1.5. – Miroir de tilt

$$L_1 : \left\{ \mathcal{V}_{2/3}^{L_1} \right\} = \begin{pmatrix} \omega_{Ax} & 0 \\ \omega_{Ay} & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{pmatrix}_{A, (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}, \left\{ \mathcal{A}_{3 \rightarrow 2}^{L_1} \right\} = \begin{pmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{pmatrix}_{A, (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} ;$$

$$L_2 : \left\{ \mathcal{V}_{2/3}^{L_2} \right\} = \begin{pmatrix} \omega_{Bx} & 0 \\ \omega_{By} & 0 \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix}_{B, (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}, \left\{ \mathcal{A}_{3 \rightarrow 2}^{L_2} \right\} = \begin{pmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{pmatrix}_{B, (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} ;$$

$$L_3 : \left\{ \mathcal{V}_{1/2}^{L_3} \right\} = \begin{pmatrix} \omega_{Cx} & 0 \\ \omega_{Cy} & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix}_{C, (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}, \left\{ \mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}^{L_3} \right\} = \begin{pmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{pmatrix}_{C, (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} ;$$

$$L_4 : \left\{ \mathcal{V}_{1/2}^{L_4} \right\} = \begin{pmatrix} \omega_{Dx} & 0 \\ \omega_{Dy} & 0 \\ \omega_{Dz} & 0 \end{pmatrix}_{D, (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}, \left\{ \mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}^{L_4} \right\} = \begin{pmatrix} X_D & 0 \\ Y_D & 0 \\ Z_D & 0 \end{pmatrix}_{D, (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} .$$

a). Liaisons en parallèle

Lorsque plusieurs liaisons relient directement deux solides, les liaisons sont dites en parallèle (fig 1.6).

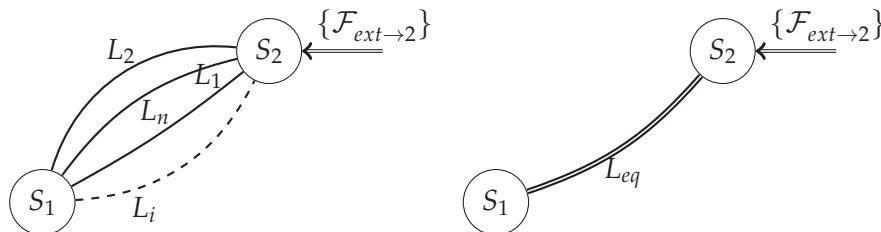


FIGURE 1.6. – Liaisons parallèles

Étude cinématique L'ensemble des liaisons L_i en parallèle impose le mouvement du solide **2** par rapport au solide **1**, le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ représente ce mouvement.

On note : $\{\mathcal{V}_{2/1}^i\}$, le torseur cinématique de la liaison L_i entre les deux solides S_1 et S_2 .

Chaque liaison élémentaire L_i ne peut que respecter le mouvement global du solide **2** par rapport au solide **1**, on peut donc écrire :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}^i\} = \{\mathcal{V}_{2/1}\}$$

Le comportement cinématique de la liaison équivalente L_{eq} doit aussi respecter le mouvement global du solide **2** par rapport au solide **1** :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}\}$$

d'où la condition que doit respecter le torseur de la liaison équivalente :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}^1\} = \{\mathcal{V}_{2/1}^2\} = \dots = \{\mathcal{V}_{2/1}^i\} = \dots = \{\mathcal{V}_{2/1}^n\}$$

Pour déterminer, à partir de l'étude cinématique, la liaison équivalente à n liaisons en parallèle, il suffit de résoudre le système de $6 \cdot n$ équations déduit des égalités de torseurs ci-dessus.

Étude statique Pour déterminer la liaison équivalente, on isole le solide **2**.

Il est soumis :

- Aux actions transmissibles par chaque liaison L_i ;
 $\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^1\}, \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^2\}, \dots, \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^i\}, \dots, \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^n\}$;
- Aux autres actions extérieures : $\{\mathcal{F}_{ext \rightarrow 2}\}$.

Le P.F.S s'écrit donc :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^1\} + \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^2\} + \dots + \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^i\} + \dots + \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^n\} + \{\mathcal{F}_{ext \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

soit

$$\sum_{i=1}^n \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^i\} + \{\mathcal{F}_{ext \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

La liaison équivalente doit respecter le même équilibre :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{eq}\} + \{\mathcal{F}_{ext \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

On déduit donc :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{eq}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^i\}$$

Miroir de tilt - suite

Étude cinématique Déterminons, par une étude cinématique, la liaison équivalente entre (1) et (2), les deux liaisons sont en parallèle, la liaison équivalente doit donc être telle que :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}^4\} = \{\mathcal{V}_{2/1}^3\}$$

On écrit les deux torseurs en D

$$\overrightarrow{V_{D \in 2/1^3}} = \overrightarrow{V_{C \in 2/1^3}} + (\omega_{Cx} \cdot \vec{x}_2 + \omega_{Cy} \cdot \vec{y}_2 + \omega_{Cz} \cdot \vec{z}_2) \wedge 2 \cdot r \cdot \vec{y}_2 = 2 \cdot r \cdot \omega_{Cx} \cdot \vec{z}_2 - 2 \cdot r \cdot \omega_{Cz} \cdot \vec{x}_2$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \omega_x^{eq} \\ \omega_y^{eq} \\ \omega_z^{eq} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}^O = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_{Cx} & -2 \cdot r \cdot \omega_{Cz} \\ \omega_{Cy} & 0 \\ \omega_{Cy} & 2 \cdot r \cdot \omega_{Cx} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}^C = \left\{ \mathcal{V}_{1/2}^{L_2} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{Dx} \\ \omega_{Dy} \\ \omega_{Dy} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}^D$$

ce qui permet d'écrire les 6 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{Cx} = \omega_{Dx} \\ \omega_{Cy} = \omega_{Dy} \\ \omega_{Cz} = \omega_{Dz} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot r \cdot \omega_{Cz} = 0 \\ 0 = 0 \\ 2 \cdot r \cdot \omega_{Cx} = 0 \end{array} \right.$$

Le torseur cinématique de la liaison équivalente est donc :

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1}^{eq} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \omega_y^{eq} \\ 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}^D$$

On trouve donc une liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_2) .

Remarque : on note dans cette étude que v_y^{eq} est 2 fois nul, c'est à dire une fois de trop. Nous verrons plus loin que cela correspond à un degré d'hyperstaticité $h = 1$.

Étude statique : Retrouvons ce résultat par une étude statique.

$$\left\{ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{eq} \right\} = \left\{ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^3 \right\} + \left\{ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^4 \right\}$$

$$\text{On écrit les deux torseurs en D : } \left\{ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{eq} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_C & 2 \cdot r \cdot Z_C \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 2 \cdot r \cdot X_C \end{array} \right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}^D$$

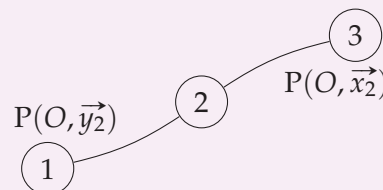
$$\left\{ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{eq} \right\} = \left\{ \mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}^{L_2} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{array} \right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}^D + \left\{ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^4 \right\} + \left\{ \begin{array}{cc} X_C & 2 \cdot r \cdot Z_C \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 2 \cdot r \cdot X_C \end{array} \right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}^D$$

$$\left\{ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{eq} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_D + X_C & 2 \cdot r \cdot Z_C \\ Y_D + Y_C & 0 \\ Z_D + Z_C & 2 \cdot r \cdot X_C \end{array} \right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}^D = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12}^{eq} & L_{12}^{eq} \\ Y_{12}^{eq} & 0 \\ Z_{12}^{eq} & N_{12}^{eq} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}^D$$

On retrouve le torseur des actions mécaniques d'une liaison pivot d'axe (D, \vec{y}_2) .

Remarque : On note que cette liaison équivalente comporte 6 paramètres alors que 5 suffisent pour une liaison pivot. Cette surabondance d'inconnue est caractéristique du degré d'hyperstaticité de ce mécanisme, $h = 1$.

Les deux autres liaisons en parallèles sont équivalentes aussi à une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_2) . Le graphe de liaisons devient :



b). Liaisons en série

Des liaisons sont dites en série lorsque le graphe a la structure 1.4b. On retrouve en fait la structure d'une chaîne ouverte.

Étude cinématique On recherche le torseur cinématique du mouvement du solide 2 par rapport au solide 1 : $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$. En décomposant sur les solides intermédiaires, on obtient :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{2/j}\} + \{\mathcal{V}_{j/i}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{i/1}\}$$

On constate que, le torseur cinématique de la liaison équivalente à plusieurs liaisons en série est égal à la somme des torseurs cinématiques des liaisons de la chaîne.

Remarque : chaque torseur doit être écrit au même point avant de calculer la somme.

Étude statique On suppose les solides en équilibre, on néglige le poids des pièces, les actions extérieures appliquées sur le solide S_n sont représentées par le torseur d'action mécanique $\{\mathcal{F}_{ext \rightarrow n}\}$.

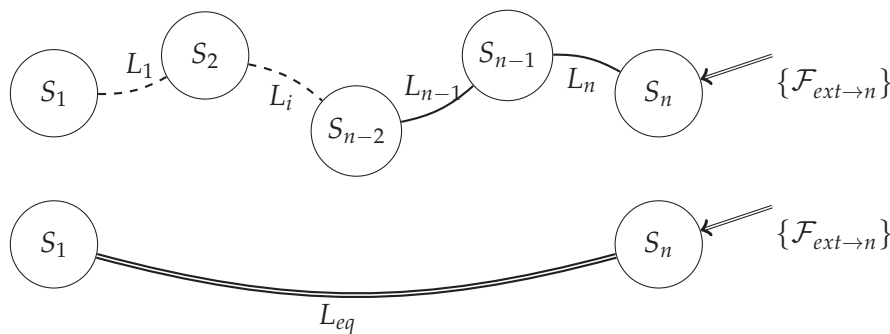


FIGURE 1.7. – Liaisons en série - Étude statique

On note

- $\{\mathcal{A}_{(n-1) \rightarrow n}\}$, le torseur des actions transmissibles par la liaison L_n entre les solides S_n et S_{n-1} ,
- $\{\mathcal{A}_{eq}\}$, le torseur des actions transmissibles par la liaison équivalente L_{eq} entre les solide S_1 et S_n .

La liaison équivalente doit se comporter du point de vue des efforts transmissibles comme l'ensemble des liaisons en série. Si on applique le PFS au solide S_n , on peut donc écrire dans un cas comme dans l'autre :

- pour les liaisons en série

$$\{\mathcal{A}_{(n-1) \rightarrow n}\} + \{\mathcal{F}_{ext \rightarrow n}\} = \{0\}$$

- pour la liaison équivalente

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow n}^{eq}\} + \{\mathcal{F}_{ext \rightarrow n}\} = \{0\}$$

On en déduit que

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow n}^{eq}\} = \{\mathcal{A}_{(n-1) \rightarrow n}\}$$

En appliquant ensuite le PFS sur le solide S_{n-1} , on déduit :

$$\{\mathcal{A}_{(n-1) \rightarrow n}\} = \{\mathcal{A}_{(n-2) \rightarrow (n-1)}\}$$

Finalement en isolant successivement chacun des solides jusqu'au solide S_2 , on en déduit que tous les torseurs des actions de liaisons doivent être égaux et égaux à celui de la liaison équivalente.

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow n}^{eq}\} = \{\mathcal{A}_{(n-1) \rightarrow n}\} = \{\mathcal{A}_{(n-2) \rightarrow (n-1)}\} = \{\mathcal{A}_{(n-3) \rightarrow (n-2)}\} = \dots = \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\}$$

Exemple : Miroir de tilt - suite

Déterminons maintenant la liaison équivalente aux deux liaisons en série

Étude cinématique : Les deux liaisons sont en série, elles sont déjà définies au même point, il suffit de faire la somme des deux torseurs

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}_{3/1}^{eq}\} &= \{\mathcal{V}_{3/2}^{eq}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}^{eq}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y^{eq} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)_O} + \begin{Bmatrix} \omega_x^{eq} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)_O} \\ \{\mathcal{V}_{3/1}^{eq}\} &= \begin{Bmatrix} \omega_x^{eq} & 0 \\ \omega_y^{eq} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{0_O} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \end{aligned}$$

La liaison équivalente est donc une liaison sphérique à doigt.

Étude statique : les deux torseurs doivent être égaux et égaux au torseur équivalent.

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 3}^{eq}\} = \begin{Bmatrix} X_{13}^{eq} & L_{13}^{eq} \\ Y_{13}^{eq} & M_{13}^{eq} \\ Z_{13}^{eq} & N_{13}^{eq} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)_O} = \begin{Bmatrix} X_{12}^{eq} & L_{12}^{eq} \\ Y_{12}^{eq} & 0 \\ Z_{12}^{eq} & N_{12}^{eq} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)_O} = \begin{Bmatrix} X_{23}^{eq} & 0 \\ Y_{23}^{eq} & M_{23}^{eq} \\ Z_{23}^{eq} & N_{23}^{eq} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)_O}$$

On retrouve bien le torseur des actions transmissibles par une liaison sphérique à doigt :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 3}^{eq}\} = \begin{Bmatrix} X_{13}^{eq} & 0 \\ Y_{13}^{eq} & 0 \\ Z_{13}^{eq} & N_{13}^{eq} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)_O}$$

c). Récapitulatif

Le tableau ci dessous récapitule les différents modes de calcul des liaisons équivalentes.

	Étude cinématique	Étude statique
Liaisons en série	Somme des torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}_{2/1}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{2/(j)}\} + \{\mathcal{V}_{j/i}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{i/1}\}$	Égalité des torseurs des actions transmissibles $\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{eq}\} = \{\mathcal{A}_{(n-1) \rightarrow n}\} = \dots = \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\}$
Liaisons en parallèle	Égalité des torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}_{2/1}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}^1\} = \dots = \{\mathcal{V}_{2/1}^i\} = \{\mathcal{V}_{2/1}^n\}$	Somme des torseurs des actions transmissibles $\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{eq}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^i\}$

1.4. Représentation schématique des mécanismes

1.4.1. Schéma cinématique

Le schéma cinématique d'un mécanisme est un modèle filaire du mécanisme utilisant les symboles normalisés des liaisons. Ce modèle est utile tant au niveau de la conception que de l'analyse à posteriori pour réaliser l'étude cinématique ou dynamique (trajectoire, vitesse, efforts, etc.).

Quelques règles et conseils pour établir un schéma cinématique :

- Le schéma peut être réalisé en une vue en perspective ou en plusieurs vues en projection. La position relative des liaisons doit être respectée (perpendicularité, parallélisme, alignement, orientation précise, etc.);
- Les pièces sont dessinées très succinctement par un simple trait en général qui relie les différentes liaisons;
- On ne doit pas privilégier une position particulière dans la représentation;
- Le schéma doit être clair et permettre la compréhension du mécanisme;
- Le schéma cinématique ne doit comporter que des pièces indéformables (pas de ressort);
- Dans certain cas, une représentation plane peut suffire pour décrire le mécanisme.

Vous trouverez dans la suite de ce cours, un grand nombre de schémas cinématiques.

1.4.2. Schéma cinématique minimal

Le schéma cinématique minimal est obtenu en remplaçant si possible, les liaisons en série et ou en parallèle par les liaisons normalisées équivalentes.

Le schéma cinématique minimal fait « disparaître » des solides et des liaisons, il est à utiliser avec précaution et uniquement pour l'étude cinématique et la compréhension cinématique du mécanisme. Il ne doit pas être utilisé pour réaliser des calculs d'hyperstatisme ou des calculs d'effort dans les liaisons.

1.4.3. Schéma technologique

Il est parfois nécessaire afin de mieux comprendre le fonctionnement d'un mécanisme, de compléter le schéma cinématique en ajoutant des constituants technologiques tels les ressorts, les courroies, les clapets d'un circuit hydraulique, ...

On peut aussi préciser la forme de certaines pièces et décomposer les liaisons en liaisons élémentaires plus proche de la réalisation technologique. Ainsi on représentera une liaison pivot réalisée par deux roulements par une liaison sphère-cylindre (linéaire annulaire) et une liaison sphérique (rotule)

Ce schéma est alors appelé un schéma technologique.

1.5. Mobilité et hyperstatisme

1.5.1. Degré de mobilité d'un mécanisme

Le degré de mobilité m caractérise le nombre de mouvements indépendants d'un mécanisme.

- un mécanisme est immobile lorsque $m = 0$;
- un système est mobile de mobilité m lorsque $m > 0$;

Attention : m ne peut être négatif.

On définit aussi de manière complémentaire, les notions de mobilité utile m_u et mobilité interne m_i avec

$$m = m_u + m_i.$$

Mobilité utile m_u : c'est la ou les mobilités souhaitées du mécanisme.

Mobilité interne m_i : c'est une mobilité qui caractérise le mouvement d'une pièce indépendamment des autres pièces (rotation d'une pièce sur elle-même).

Cette notion de mobilité interne est étendue aux mobilités du mécanisme qui ne concerne que des pièces internes dont le mouvement n'entraîne pas de mouvement des pièces en relation avec le milieu extérieur.

- La rotation propre d'un piston d'une pompe hydraulique autour de son axe

1.5.2. Degré d'hyperstaticité d'un mécanisme

Le degré d'hyperstaticité h d'un mécanisme caractérise la surabondance des degrés de liaisons de ce mécanisme. Ainsi une table avec quatre pieds est hyperstatique de degré $h = 1$ car trois pieds suffisent pour la poser sur le sol.

- Un système est dit *isostatique* ($h = 0$) s'il est possible de déterminer la totalité des inconnues de liaison en appliquant le principe fondamental de la statique à chacune des pièces du mécanisme.
- On dit qu'un système est *hyperstatique* ($h \geq 0$) si toutes les inconnues de liaison ne sont pas déterminables. Chaque inconnue non déterminable par le P.F.S est un degré d'hyperstaticité.

1.5.3. Détermination du degré de mobilité

Soit un mécanisme formé de N solides reliés par L liaisons (figure 1.8). Le nombre de cycles indépendants du mécanisme est :

$$\gamma = L - N + 1.$$

Pour analyser complètement le mécanisme, il faut donc étudier les γ boucles du mécanisme.

Pour chaque liaison élémentaire L_j on écrit le torseur cinématique $\{V_{(i+1)/i}\}$. Chaque torseur comporte n_{c_i} inconnues cinématiques (quelques exemples dans le tableau 1.1).

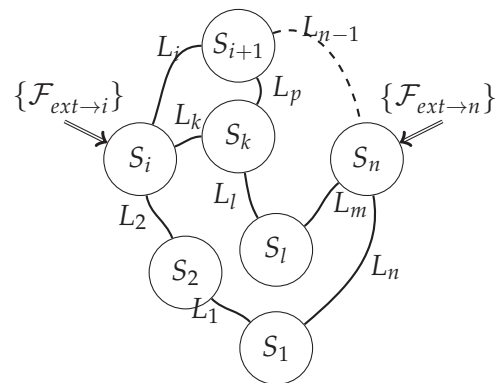


FIGURE 1.8. – chaîne complexe

Liaison	Torseur	n_{c_i}
liaison pivot	$\begin{Bmatrix} \omega_{xi} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_i}$ $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$	$n_{c_i} = 1$
liaison pivot glissant	$\begin{Bmatrix} \omega_{xi} & V_{xi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_i}$ $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$	$n_{c_i} = 2$
liaison sphérique	$\begin{Bmatrix} \omega_{xi} & 0 \\ \omega_{yi} & 0 \\ \omega_{zi} & 0 \end{Bmatrix}_{P_i}$ $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$	$n_{c_i} = 3$

TABLE 1.1. – Inconnues cinématiques

Pour chacune des boucles indépendantes, on exprime la fermeture cinématique, ainsi pour la boucle (figure 1.8) constituée des solides $\{S_i, S_{i+1}, S_k\}$:

$$\{\mathcal{V}_{i/k}\} + \{\mathcal{V}_{k/(i+1)}\} + \{\mathcal{V}_{(i+1)/i}\} = \{0\}.$$

On obtient ainsi 6 équations par boucle soit E_c équations pour le mécanisme complet et comportant I_c inconnues cinématiques avec :

$$E_c = 6 \cdot \gamma$$

$$I_c = \sum_{j=1}^L n_{c_j}.$$

Le rang de ce système est noté r_c avec $r_c \leq \min E_c, I_c$ (il n'est pas possible, sans écrire complètement le système de connaître le rang – équations liées ou nulles–).

Le degré de mobilité correspond aux inconnues cinématiques que l'on ne peut déterminer lors de la résolution du système soit :

$$m = I_c - r_c.$$

Si

- $m = 0$ le mécanisme est immobile ;
- $m > 0$ le système est mobile de mobilité m .

a). Détermination intuitive du degré de mobilité

Dans le cas des mécanismes peu complexes, il est possible de déterminer le degré de mobilité à partir de l'analyse du mécanisme (lecture du dessin d'ensemble, schéma cinématique, vue 3D, etc.).

On recherche les mobilités utiles :

- en identifiant la chaîne cinématique de la (des) mobilité(s) utile(s) (de (des) l'actionneur(s) vers la sortie) ;
- en recherchant la chaîne cinématique de réglage.

Pour identifier les mobilités internes, on s'intéresse aux liaisons à plusieurs degrés de liberté (pivot glissant, sphère cylindre, sphérique).

Chaque mouvement ainsi identifié est une mobilité.

Cette détermination intuitive est souvent suffisante pour résoudre un problème élémentaire.

Nous allons déterminer à partir de l'exemple du robot marcheur, le degré de mobilité et d'hyperstaticité du mécanisme.

Exemple : robot marcheur - Détermination du degré de mobilité

On continue l'exemple du robot marcheur de la page 3

Le graphe de structure est constitué d'une seule boucle :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{B \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{A \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}} \quad \text{Pivot } (A, \vec{z}_0) \quad n_c = 1$$

$$\{\mathcal{V}_{0/3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{VP \\ (\vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})}} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}} \quad \text{Glissière } \vec{y}_0 \quad n_c = 1$$

On commence par écrire les différents torseurs cinématiques et on identifie les inconnues cinématiques.

Chaque liaison pivot comporte $n_c = 1$ inconnue cinématique ainsi que la liaison glissière aussi.

Bilan global : Le système comporte une seule boucle de 4 liaisons $L = 4$ donc

- $I_c = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ inconnues cinématiques ;
- $I_s = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$ inconnues cinématiques
- le nombre cyclomatique est donc :

$$\gamma = L - N + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$$

- on peut donc écrire, au maximum ; $E_c = 6 * \gamma = 6$ équations cinématiques avec $I_c = 4$ inconnues cinématiques. Le rang r_c de ce système d'équation est au maximum de 4 mais il peut être inférieur :

$$r_c \leq \min(E_c, I_c)$$

Degré de mobilité : nous allons déterminer le degré de mobilité par une étude cinématique.

La fermeture cinématique a été réalisée dans l'étude précédente page 5, nous avons trouvé le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llll} & & & 0 = 0 \\ & & & 0 = 0 \\ & \omega_{32} & +\omega_{21} & +\omega_{10} = 0 \\ \lambda \cdot \omega_{32} & +r \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{21} & & = 0 \\ & -r \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{21} & -V_{30} & = 0 \\ & & & 0 = 0 \end{array} \right.$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda & r \cdot \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -r \cdot \cos \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{32} \\ \omega_{21} \\ \omega_{10} \\ V_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système comporte bien $E_c = 6$ équations avec $I_c = 4$ inconnues.

On constate que le système ne comporte que 3 équations indépendantes et 4 inconnues, il s'écrit donc :

$$\begin{cases} \omega_{32} & +\omega_{21} & +\omega_{10} & = 0 \\ \lambda \cdot \omega_{32} & +r \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{21} & & = 0 \\ & -r \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{21} & -V_{30} & = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, il est nécessaire de fixer 1 paramètre (ici ω_{10} , donc le degré de mobilité est

$$m = 1.$$

Soit un système de 3 équations à 4 inconnues.

$$\begin{cases} \omega_{32} & +\omega_{21} & = -\omega_{10} \\ \lambda \cdot \omega_{32} & +r \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{21} & = 0 \\ & -r \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{21} & -V_{30} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & r \cdot \sin \alpha & 0 \\ 0 & -r \cdot \cos \alpha & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{32} \\ \omega_{21} \\ V_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{10} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On peut maintenant résoudre le système en prenant comme paramètre ω_{10} . Le rang du système est donc bien $r_c = 3$, on retrouve bien le degré de mobilité

$$m = I_c - r_c$$

Les trois équations *inutiles* sont appelées équations supplémentaires et déterminées par :

$$E_c - r_c = 3$$

Nous verrons plus loin que le nombre d'équations supplémentaires de l'étude cinématique donne le degré d'hyperstaticité du mécanisme :

$$h = E_c - r_c$$

Ce degré de mobilité correspond au mouvement principal (le seul possible) : la rotation du solide (1) entraîne le mouvement oscillant du pied (2).

Cette mobilité peut être déduite du mécanisme *intuitivement*.

1.5.4. Détermination du degré d'hyperstaticité

Soit un mécanisme (figure 1.8) formé de N solides reliés par L liaisons. On applique le P.F.S à chaque solide hormis le bâti, ainsi pour le solide S_i :

$$\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow i}\} + \{\mathcal{A}_{k \rightarrow i}\} + \{\mathcal{A}_{(i+1) \rightarrow i}\} + \{\mathcal{F}_{ext \rightarrow 1}\} = \{0\}.$$

Pour chaque équilibre nous pouvons donc écrire un système de 6 équations. Il est possible d'étudier l'équilibre de $N - 1$ solides (les autres équilibres se déduisent de ceux-ci) d'où pour la totalité du mécanisme un nombre total d'équation de

$$E_s = 6 \cdot (N - 1).$$

Remarque : Écrire le P.F.S suppose que le système est en équilibre, nous supposons ici, que les masses

sont négligeables et/ou les vitesses constantes pour pouvoir l'appliquer.

Nous verrons par la suite qu'il est possible de réaliser les calculs avec des efforts nuls, en effet l'objectif n'est pas l'équilibre des pièces ou l'étude du mouvement mais la détermination des mobilités et de l'hyperstaticité du mécanisme et le résultat de ce calcul ne dépend pas des efforts extérieurs.

Chaque torseur d'action transmissible par une liaison L_i du solide S_{i-1} sur S_i ($\{\mathcal{A}_{(i-1) \rightarrow i}\}$) comporte n_{s_i} inconnues. Le tableau 1.2 présente quelques liaisons et les inconnues de liaisons associées.

Liaison	Torseur	n_{s_i}
liaison pivot	$\begin{Bmatrix} X_i & 0 \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_{P_i}$ $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$	$n_{s_i} = 5$
liaison pivot glissant	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_{P_i}$ $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$	$n_{s_i} = 4$
liaison sphérique	$\begin{Bmatrix} X_i & 0 \\ Y_i & 0 \\ Z_i & 0 \end{Bmatrix}_{P_i}$ $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$	$n_{s_i} = 3$

TABLE 1.2. – Inconnues de liaisons

Le nombre total d'inconnues statiques pour les L liaisons est donc :

$$I_s = \sum_{i=1}^L n_{s_i}.$$

L'étude globale du mécanisme se ramène donc à l'étude d'un système linéaire de E_s équations avec I_s inconnues. Ce système est un système linéaire dont le rang est noté r_s .

Le degré d'hyperstaticité h correspond au nombre d'inconnues de liaison que l'on ne peut pas déterminer par la résolution du système :

$$h = I_s - r_s$$

- $h = 0$, il est alors possible de déterminer toutes les inconnues de liaison, le système est *isostatique*
- $h > 0$, il y a plus d'inconnues que d'équations indépendantes, le système est *hyperstatique*. Le nombre d'inconnues de liaison non déterminées représente le degré d'hyperstaticité.

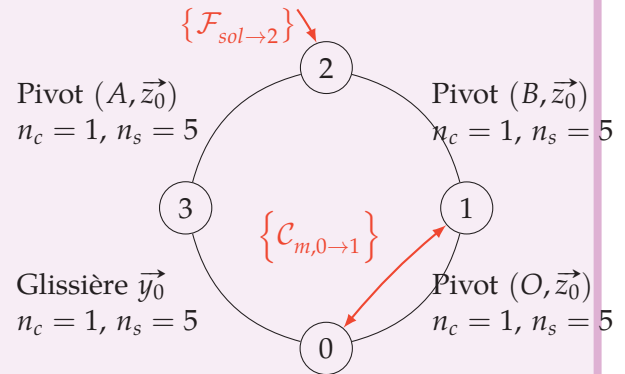
Exemple : robot marcheur - détermination du degré d'hyperstaticité

On continue l'exemple du robot marcheur de la page 3

On complète cet exemple en rajoutant des actions mécaniques.

- un couple moteur de $0 \rightarrow 1$ modélisé par le torseur couple : $\{C_{m,0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{\forall P}$
- une action mécanique modélisant l'action du sol sur le pied (2) modélisé par le torseur glisseur au point R : $\{F_{sol \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} F \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_R$

Le graphe de structure est constitué d'une seule boucle :



On commence par écrire les différents torseurs d'action transmissibles par les liaisons et on identifie les inconnues de liaison :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} &= \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{B \\ (\vec{?}, \vec{?}, \vec{z}_0)}} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{A \\ (\vec{?}, \vec{?}, \vec{z}_0)}} \\ \{\mathcal{A}_{3 \rightarrow 0}\} &= \begin{Bmatrix} X_{30} & L_{30} \\ 0 & M_{30} \\ Z_{30} & N_{30} \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \\ (\vec{?}, \vec{y}_0, \vec{0})}} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{?}, \vec{?}, \vec{z}_0)}} \end{aligned}$$

Chaque liaison pivot comporte $n_s = 5$ inconnues "statiques". La liaison glissière aussi.

Bilan global : Le système comporte 4 solides

- on peut au maximum isoler $N - 1 = 3$ ensembles indépendants soit $E_s = 6 \cdot (N - 1) = 18$ équations de la statique avec $I_c = 20$ inconnues.

À partir de ce simple bilan et avant tout calcul, on peut dire :

- que le mécanisme est **au moins** hyperstatique d'ordre $h = 2$, en effet le rang du système d'équation de la statique est au maximum de 18 :

$$r_s \leq \min(I_c, E_c)$$

degré d'hyperstaticité Pour déterminer le degré d'hyperstaticité, nous devons isoler $N - 1 = 3$ solides (ou ensemble de solides) indépendant du mécanisme afin de chercher à déterminer toutes les inconnues de liaisons.

Isolons le solide 3 : il est soumis à deux actions mécaniques de liaisons, la glissière entre (0) et (3) et la pivot en A entre (2) et (3). On choisit d'écrire le PFS en A dans la base

$(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 3}\} + \{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 3}\} = \{0\}$$

$$- \begin{Bmatrix} X_{30} & L_{30} \\ 0 & M_{30} \\ Z_{30} & N_{30} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_A} + \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_A} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_A}$$

ce qui nous permet d'écrire le premier système de 6 équations (3 pour la résultante, 3 pour le moment) :

$$\begin{cases} X_{23} - X_{30} = 0 \\ Y_{23} + 0 = 0 \\ Z_{23} - Z_{30} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_{23} - L_{30} = 0 \\ M_{23} - M_{30} = 0 \\ N_{30} = 0 \end{cases}$$

Isolons le solide 2 : Il est soumis aux deux actions mécaniques de liaisons (pivot en A, et pivot en B) et à l'action mécanique extérieure en R.

$$\{\mathcal{A}_{3 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{F}_{sol \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

On choisit d'écrire le PFS en A dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2} &= \overrightarrow{M}_{B,1 \rightarrow 2} + \overrightarrow{AB} \wedge (X_{12} \cdot \vec{x}_0 + Y_{12} \cdot \vec{y}_0 + Z_{12} \cdot \vec{z}_0) \\ \overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2} &= L_{12} \cdot \vec{x}_0 + M_{12} \cdot \vec{y}_0 - a \cdot \vec{y}_2 \wedge (X_{12} \cdot \vec{x}_0 + Y_{12} \cdot \vec{y}_0 + Z_{12} \cdot \vec{z}_0) \\ \overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2} &= (L_{12} - a \cdot \cos \theta \cdot Z_{12}) \cdot \vec{x}_0 + (M_{12} - a \cdot \sin \theta \cdot Z_{12}) \cdot \vec{y}_0 \\ &\quad + a \cdot (\cos \theta \cdot X_{12} + \sin \theta \cdot Y_{12}) \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{M}_{A,sol \rightarrow 2} &= \vec{0} + \overrightarrow{AR} \wedge F \cdot \vec{y}_0 \\ \overrightarrow{M}_{A,sol \rightarrow 2} &= -(a+b) \cdot \vec{y}_2 \wedge F \cdot \vec{y}_0 = (a+b) \cdot \sin \theta \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Le PFS s'écrit donc :

$$- \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_A} + \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} - a \cdot \cos \theta \cdot Z_{12} \\ Y_{12} & M_{12} - a \cdot \sin \theta \cdot Z_{12} \\ Z_{12} & a \cdot (\cos \theta \cdot X_{12} + \sin \theta \cdot Y_{12}) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_A} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & (a+b) \cdot \sin \theta \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_A} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_A}$$

et finalement les 6 équations du second équilibre

$$\begin{cases} -X_{23} + X_{12} + 0 = 0 \\ -Y_{23} + Y_{12} + F = 0 \\ -Z_{23} + Z_{12} + 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -L_{23} + L_{12} - a \cdot \cos \theta \cdot Z_{12} + 0 = 0 \\ -M_{23} + M_{12} - a \cdot \sin \theta \cdot Z_{12} = 0 \\ a \cdot \cos \theta \cdot X_{12} + a \cdot \sin \theta \cdot Y_{12} + (a+b) \cdot \sin \theta \cdot F = 0 \end{cases}$$

Isolons le solide 1 : Il est soumis à 2 actions mécaniques de liaison (pivot en B et en O) et au couple moteur.

$$\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}\} - \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{C}_{m,0 \rightarrow 1}\} = \{0\}$$

On choisit d'écrire le PFS en O dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} &= \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}} + r \cdot \vec{x}_1 \wedge (X_{12} \cdot \vec{x}_0 + Y_{12} \cdot \vec{y}_0 + Z_{12} \cdot \vec{z}_0) \\ \overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} &= (L_{12} + r \cdot Z_{12} \cdot \sin \alpha) \cdot \vec{x}_0 + (M_{12} - r \cdot Z_{12} \cdot \cos \alpha) \cdot \vec{y}_0 \\ &\quad + (-r \cdot X_{12} \cdot \sin \alpha + r \cdot Y_{12} \cdot \cos \alpha) \cdot \vec{z}_0\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} X_{01} \\ Y_{01} \\ Z_{01} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_O} - \left\{ \begin{array}{c} X_{12} \\ Y_{12} \\ Z_{12} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_O} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_O} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_A}$$

d'où les 6 équations du dernier équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{01} - X_{12} + 0 = 0 \\ Y_{01} - Y_{12} = 0 \\ Z_{01} - Z_{12} + 0 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} L_{01} - L_{12} + r \cdot Z_{12} \cdot \sin \alpha + 0 = 0 \\ M_{01} - M_{12} - r \cdot Z_{12} \cdot \cos \alpha + 0 = 0 \\ 0 - r \cdot X_{12} \cdot \sin \alpha + r \cdot Y_{12} \cdot \cos \alpha + C_m = 0 \end{array} \right.$$

L'équilibre complet est traduit par les 18 équations suivantes avec 20 inconnues.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{23} - X_{30} = 0 \\ Y_{23} + 0 = 0 \\ Z_{23} - Z_{30} = 0 \\ -X_{23} + X_{12} + 0 = 0 \\ -Y_{23} + Y_{12} + F = 0 \\ -Z_{23} + Z_{12} + 0 = 0 \\ X_{01} - X_{12} + 0 = 0 \\ Y_{01} - Y_{12} = 0 \\ Z_{01} - Z_{12} + 0 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} L_{23} - L_{30} = 0 \\ M_{23} - M_{30} = 0 \\ N_{30} = 0 \\ -L_{23} + L_{12} - a \cdot \cos \theta \cdot Z_{12} + 0 = 0 \\ -M_{23} + M_{12} - a \cdot \sin \theta \cdot Z_{12} = 0 \\ a \cdot \cos \theta \cdot X_{12} + a \cdot \sin \theta \cdot Y_{12} + (a + b) \cdot \sin \theta \cdot F = 0 \\ L_{01} - L_{12} + r \cdot Z_{12} \cdot \sin \alpha + 0 = 0 \\ M_{01} - M_{12} - r \cdot Z_{12} \cdot \cos \alpha + 0 = 0 \\ -r \cdot X_{12} \cdot \sin \alpha + r \cdot Y_{12} \cdot \cos \alpha + C_m = 0 \end{array} \right.$$

Il reste à déterminer le rang de ce système.

Plutôt que de chercher le rang de tout le système, il est souvent préférable de réorganiser les système, et le résoudre par morceau. On peut constater que le système peut se décomposer en deux parties :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{23} = 0 \\ -Y_{23} + Y_{12} + F = 0 \\ Y_{01} - Y_{12} = 0 \\ a \cdot \cos \theta \cdot X_{12} + a \cdot \sin \theta \cdot Y_{12} + (a + b) \cdot \sin \theta \cdot F = 0 \\ -r \cdot X_{12} \cdot \sin \alpha + r \cdot Y_{12} \cdot \cos \alpha + C_m = 0 \\ X_{01} - X_{12} = 0 \\ -X_{23} + X_{12} = 0 \\ X_{23} - X_{30} = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Z_{23} - Z_{30} = 0 \\ -Z_{23} + Z_{12} = 0 \\ Z_{01} - Z_{12} = 0 \\ L_{23} - L_{30} = 0 \\ M_{23} - M_{30} = 0 \\ N_{30} = 0 \\ -L_{23} + L_{12} - a \cdot \cos \theta \cdot Z_{12} + 0 = 0 \\ -M_{23} + M_{12} - a \cdot \sin \theta \cdot Z_{12} = 0 \\ L_{01} - L_{12} + r \cdot Z_{12} \cdot \sin \alpha + 0 = 0 \\ M_{01} - M_{12} - r \cdot Z_{12} \cdot \cos \alpha + 0 = 0 \end{array} \right.$$

Le premier sous-système comporte 8 équations avec 7 inconnues,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Y_{23} & & = 0 \\ -Y_{23} + Y_{12} & & = -F \\ -Y_{12} & + Y_{01} & = 0 \\ a \cdot \sin \theta \cdot Y_{12} & + a \cdot \cos \theta \cdot X_{12} & = -(a+b) \cdot \sin \theta \cdot F \\ r \cdot Y_{12} \cdot \cos \alpha & - r \cdot X_{12} \cdot \sin \alpha & = -C_m \\ & - X_{12} & + X_{01} & = 0 \\ & + X_{12} & & - X_{23} & = 0 \\ & & & X_{23} & - X_{30} & = 0 \end{array} \right.$$

Le rang de sous système est donc de 7. Il y a donc une équation supplémentaire qui va relier C_m à F

$$C_m = -r \cdot F \cdot \frac{-\cos(\alpha) \cdot a \cdot \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{(a \cdot \cos(\theta))}$$

Il est possible de déterminer ensuite toutes les inconnues :

$$Y_{23} = 0; Y_{12} = -F, Y_{01} = -F, X_{12} = \frac{C_m - r \cdot F}{r \cdot \sin \alpha}, X_{01} = X_{12}, X_{23} = X_{12}, X_{30} = X_{12}.$$

et le second comporte 10 équations avec 13 inconnues, le rang est de 10, il n'est pas possible de déterminer toutes les inconnues, il faut en fixer au moins 3 pour résoudre : ici on eut choisir Z_{23} , L_{23} et M_{23} .

$$\left\{ \begin{array}{lcl} & - Z_{30} & = Z_{23} \\ & - Z_{12} & = -Z_{23} \\ & - Z_{12} & + Z_{01} & = 0 \\ & & L_{30} & = -L_{23} \\ & & M_{30} & = M_{23} \\ & & & N_{30} & = 0 \\ -a \cdot \cos \theta \cdot Z_{12} & & + L_{12} & = L_{23} \\ -a \cdot \sin \theta \cdot Z_{12} & & + M_{12} & = M_{23} \\ -r \cdot Z_{12} \cdot \sin \alpha & & - L_{12} & + L_{01} & = 0 \\ -r \cdot Z_{12} \cdot \cos \alpha & & - M_{12} & - M_{01} & = 0 \end{array} \right.$$

En conclusion,

- Le rang du système complet est donc $r_s = 7 + 10 = 17$,
- 3 inconnues de liaison ne sont pas déterminables,

Le mécanisme est donc hyperstatique de degré

$$h = I_s - r_s = 3$$

Le système de $E_s = 18$ équations et $I_s = 20$ inconnues de liaison, de rang $r_s = 17$ comporte donc 17 équations utiles à la détermination des inconnues et 1 équation supplémentaire : $E_s - r_s = 1$.

Le nombre d'équation supplémentaire de l'étude statique donne le degré de mobilité du mécanisme :

$$m = E_s - r_s$$

a). Influence du degré d'hyperstaticité sur la réalisation du mécanisme

Aux inconnues hyperstatiques correspondent des conditions de cotation entre les liaisons que doit respecter le mécanisme afin de fonctionner correctement malgré l'hyperstatisme,

Ainsi pour que les 4 pied d'un chaise (hypertatisme de degré $h = 1$), touchent le sol, il est nécessaire que les 4 pieds soient coplanaires. Cette condition va impliquer des conditions de réalisation plus strictes que

pour un tabouret à 3 pieds.

- lorsque le degré d'hyperstaticité est lié à une inconnue de résultante cela implique de respecter lors de la réalisation du mécanisme une contrainte dimensionnelle.
- lorsque le degré d'hyperstaticité est lié à une inconnue de moment cela implique de respecter lors de la réalisation du mécanisme une contrainte angulaire (parallélisme, perpendicularité, planéité,...).

Exemple : robot marcheur - influence des défauts géométriques et dimensionnels

On voit sur les deux figures ci-dessous l'influence de deux défauts sur le montage du mécanisme, un défaut de longueur d'un des bras, ou un défaut de parallélisme, interdiront le montage du mécanisme.

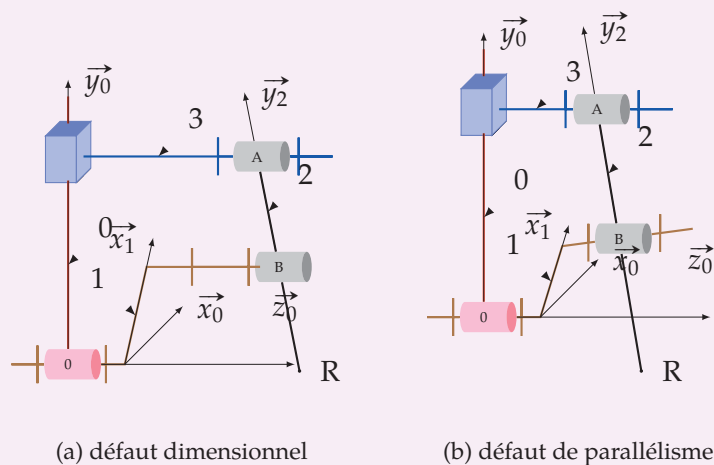


FIGURE 1.9. – Défauts

1.5.5. Isostaticité

Un mécanisme hyperstatique est un mécanisme dans lequel les liaisons sont surabondantes, on pourrait donc obtenir le même fonctionnement avec une structure plus simple.

Est-il pour autant judicieux d'essayer de le transformer pour le rendre isostatique ?

La qualité principale d'un mécanisme hyperstatique est sa rigidité. La contrepartie de cette qualité est son principal défaut, les mécanismes hyperstatiques sont plus difficiles à réaliser donc plus coûteux.

On réserve donc les solutions hyperstatiques chaque fois que la rigidité doit l'emporter sur le coût, dans les autres cas on préfère les solutions isostatiques.

a). Recherche d'isostaticité

À partir de l'étude statique, on identifie les inconnues de liaisons surabondantes. Pour chaque inconnue de liaison non déterminable, il faut ajouter un degré de liberté dans la chaîne cinématique. Il peut aussi nécessaire de rajouter des pièces dans le mécanisme.

Il s'agit donc de remplacer certaines liaisons par des liaisons qui permettent d'annuler les inconnues surabondantes.

1.5.6. Relations entre mobilité et hyperstatisme

On se propose de rechercher des relations entre les paramètres du mécanisme (nombre de pièces, liaisons, nombre cyclomatique, etc.) et le degré de mobilité et/ou d'hyperstaticité. Nous allons mener cette étude du point de vue statique et du point de vue cinématique.

Pour un système mécanique formé de N solides, et L liaisons nous avons :

$$\begin{aligned}\gamma &= L - N + 1 \\ E_s &= 6 \cdot (N - 1) \\ E_c &= 6 \cdot \gamma\end{aligned}$$

À partir de l'étude statique on déduit le degré d'hyperstaticité, le nombre d'équations supplémentaires donnant le degré de mobilité :

$$h = I_s - r_s \quad \text{et} \quad m = E_s - r_s$$

d'où

$$m - h = E_s - I_s$$

De même, à partir de l'étude cinématique on déduit le degré de mobilité mais aussi le degré d'hyperstaticité (équations supplémentaires de l'étude cinématique) :

$$m = I_c - r_c \quad \text{et} \quad h = E_c - r_c$$

d'où

$$m - h = I_c - E_c$$

Les deux relations $m - h = I_c - E_c$ et $m - h = E_s - I_s$ sont équivalentes en effet.

Pour chaque liaison, le nombre d'inconnues cinématiques est le complément à 6 du nombre d'inconnues statiques.

$$\begin{aligned}n_{si} &= 6 - n_{ci} \\ I_s &= \sum_{i=1}^L n_{si} = \sum_{i=1}^L (6 - n_{ci})\end{aligned}$$

On peut donc écrire en développant :

$$I_s = 6 \cdot L - \sum_{i=1}^L n_{ci} = 6 \cdot L - I_c.$$

Puis en remplaçant et en réorganisant :

$$\begin{aligned}m - h &= E_s - 6 \cdot L + I_c \\ m - h &= 6 \cdot (N - 1) - 6 \cdot L + I_c \\ m - h &= -6 \cdot (L - N + 1) + I_c\end{aligned}$$

On reconnaît le nombre cyclomatique γ , la relation devient :

$$m - h = -6 \cdot \gamma + I_c$$

d'où la relation

$$m - h = I_c - E_c$$

Le paramètre $m - h$ est parfois appelé *indice de mobilité*.

Les relations $m - h = I_c - E_c$ et $m - h = E_s - I_s$ sont deux relations équivalentes qui permettent de relier les notions de mobilité et d'hyperstaticité. Il suffit de déterminer un deux paramètres m ou h pour obtenir le second. Il est souvent « facile » de déterminer intuitivement le degré de mobilité par une simple étude du mécanisme.

1.5.7. Mécanismes plans

Lorsque un mécanisme peut être considéré comme un mécanisme plan, c'est à dire : qu'il existe un plan tel que

point de vue cinématique : tous les vecteurs vitesses de rotation sont perpendiculaires à ce plan et toutes les vitesses linéaires dans ce plan

point de vue statique : tous les moments des actions mécaniques extérieures et des actions de liaisons sont perpendiculaires à ce plan, toutes les résultantes de ces actions sont dans ce plan.

La modélisation plane d'un mécanisme ne peut comporter que 3 types de liaisons. Compte tenu de la modélisation plane, ces torseurs ne comporte que 3 inconnues, les 3 autres sont nulles par hypothèse.

Liaison	torseur cinématique ¹	torseur des actions transmissibles
Articulation d'axe normal au plan d'étude	$\begin{Bmatrix} [0] & 0 \\ [0] & 0 \\ \omega_z & [0] \end{Bmatrix}_{O(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, n_{ci} = 1$	$\begin{Bmatrix} X & [0] \\ Y & [0] \\ [0] & 0 \end{Bmatrix}_{O(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, n_{si} = 2$
Glissière la direction \vec{u} est dans le plan	$\begin{Bmatrix} [0] & V_u \\ [0] & 0 \\ 0 & [0] \end{Bmatrix}_{O(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})}, n_{ci} = 1$	$\begin{Bmatrix} 0 & [0] \\ Y_v & [0] \\ [0] & N_z \end{Bmatrix}_{O(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})}, n_{si} = 2$
Ponctuelle la normale au contact \vec{n} est dans le plan.	$\begin{Bmatrix} [0] & 0 \\ [0] & V_t \\ \omega_z & [0] \end{Bmatrix}_{O(\vec{n}, \vec{t}, \vec{z})}, n_{ci} = 2$	$\begin{Bmatrix} X_n & [0] \\ 0 & [0] \\ [0] & 0 \end{Bmatrix}_{O(\vec{n}, \vec{t}, \vec{z})}, n_{si} = 1$

Pour un mécanisme plan de normale \vec{z}

TABLE 1.3. – Liaisons dans le plan

Il est alors possible de réaliser une étude de mobilité et d'hyperstaticité dans le plan, Le principe de l'étude est identique à l'étude spatiale, mais on limite alors aux trois équations non nulles.

Les relations de mobilité et d'hyperstaticité sont équivalentes en prenant garde que le nombre d'équations que l'on peut écrire lors d'une étude statique ou cinématique n'est que de 3. De même, le nombre d'inconnues cinématiques ou statique d'un torseur ne peut dépasser 3. Nous pouvons donc écrire :

$$m - h = E_s - I_s \quad \text{avec} \quad E_s = 3 \cdot (N - 1)$$

$$m - h = I_c - E_c \quad \text{avec} \quad E_c = 3 \cdot \gamma$$

$$n_{si} = 3 - n_{ci}$$

Remarque importante : dire qu'un mécanisme est plan, c'est déjà faire des hypothèses sur l'orientation des liaisons (toutes les rotations sont perpendiculaires au plan d'étude donc parallèles) cela revient à simplifier le modèle d'étude. Cette hypothèse risque de faire disparaître des degrés d'hyperstaticité.

1. la notation $[0]$ précise que la valeur 0 est imposée par le modèle plan

Exemple : Robot marcheur - modélisation plane

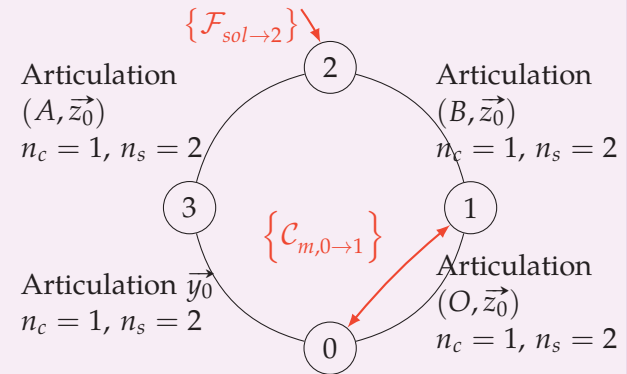
Le robot marcheur peut aussi être étudié comme un mécanisme plan d'un point de vue cinématique

- tous les vecteurs de rotation sont suivant \vec{z}_0
- tous les vitesses linéaires sont dans un plan parallèles à $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

D'un point de vue statique, si on considère que la distance (OA) est négligeable, alors le modèle plan est aussi envisageable.

Avec cette hypothèse plane, le graphe

des liaisons et les torseurs deviennent



Torseurs en modélisation plane :

Torseurs cinématiques

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} [0] & 0 \\ [0] & 0 \\ \omega_{21} & [0] \end{Bmatrix}_{\substack{B \\ (\vec{?}, \vec{?}, \vec{z}_0)}}$$

$$\{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} [0] & 0 \\ [0] & 0 \\ \omega_{32} & [0] \end{Bmatrix}_{\substack{A \\ (\vec{?}, \vec{?}, \vec{z}_0)}}$$

$$\{\mathcal{V}_{0/3}\} = \begin{Bmatrix} [0] & 0 \\ [0] & V_{03} \\ 0 & [0] \end{Bmatrix}_{\substack{\text{VP} \\ (\vec{?}, \vec{y}_0, \vec{?})}}$$

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} [0] & 0 \\ [0] & 0 \\ \omega_{10} & [0] \end{Bmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{?}, \vec{?}, \vec{z}_0)}}$$

Torseurs des actions transmissibles

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & [0] \\ Y_{12} & [0] \\ [0] & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{B \\ (\vec{?}, \vec{?}, \vec{z}_0)}}$$

$$\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & [0] \\ Y_{23} & [0] \\ [0] & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{A \\ (\vec{?}, \vec{?}, \vec{z}_0)}}$$

$$\{\mathcal{A}_{3 \rightarrow 0}\} = \begin{Bmatrix} X_{30} & [0] \\ 0 & [0] \\ [0] & N_{30} \end{Bmatrix}_{\substack{\text{VP} \\ (\vec{?}, \vec{y}_0, \vec{?})}}$$

$$\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & [0] \\ Y_{01} & [0] \\ [0] & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{?}, \vec{?}, \vec{z}_0)}}$$

Étude cinématique : Le degré de mobilité du mécanisme n'a pas changé, $m = 1$. Le mécanisme plan comporte $I_c = 4$ inconnues, avec une seule boucle $\gamma = 1$, on peut donc écrire $E_c = 3 \cdot \gamma = 3$ équations. Le système est donc décrit par un système de 4 inconnues et 3 équations.

Étude statique : Le mécanisme plan comporte $I_s = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$ inconnues, on peut écrire $E_c = 3 \cdot (N - 1) = 9$ équations. Le mécanisme est donc décrit par un système de 9 équations et 8 inconnues. Il y a une équation supplémentaire qui correspond au degré de mobilité $m = 1 = E_s - r_s$. Le rang du système est donc $r_s = 8$, le mécanisme est donc isostatique $h = I_s - r_s = 0$.

On remarque que l'étude du modèle plan ne donne pas du tous le même résultat que l'étude spatiale. Il ne faut donc utiliser l'étude plane qu'avec précautions.

1.6. Pythoneries

Pour cette partie du cours, il est évident que tous les algorithmes traitant des matrices sont à maîtriser, principalement le pivot de Gauss.

- Résolution matricielle
- détermination du rang

1.7. Exercices

Exercice 1- Écrou flottant

Corrig page 31

La table coulissante est constituée d'une table mobile qui coulisse sur deux colonnes parallèles fixées sur le bâti, elle est entraînée par un mécanisme vis-écrou.

Q1. Identifier les liaisons du mécanisme (figure 1.11a) puis tracer le graphe des liaisons.

Q2. Tracer le schéma cinématique 3D.

Q3. Déterminer la liaison équivalente entre la table et les deux supports.

Q4. Évaluer le degré de mobilité (sans calculs). En déduire le degré d'hyperstaticité.

Le mécanisme de la figure 1.11b est les schéma cinématique minimal du mécanisme de la figure 1.11a

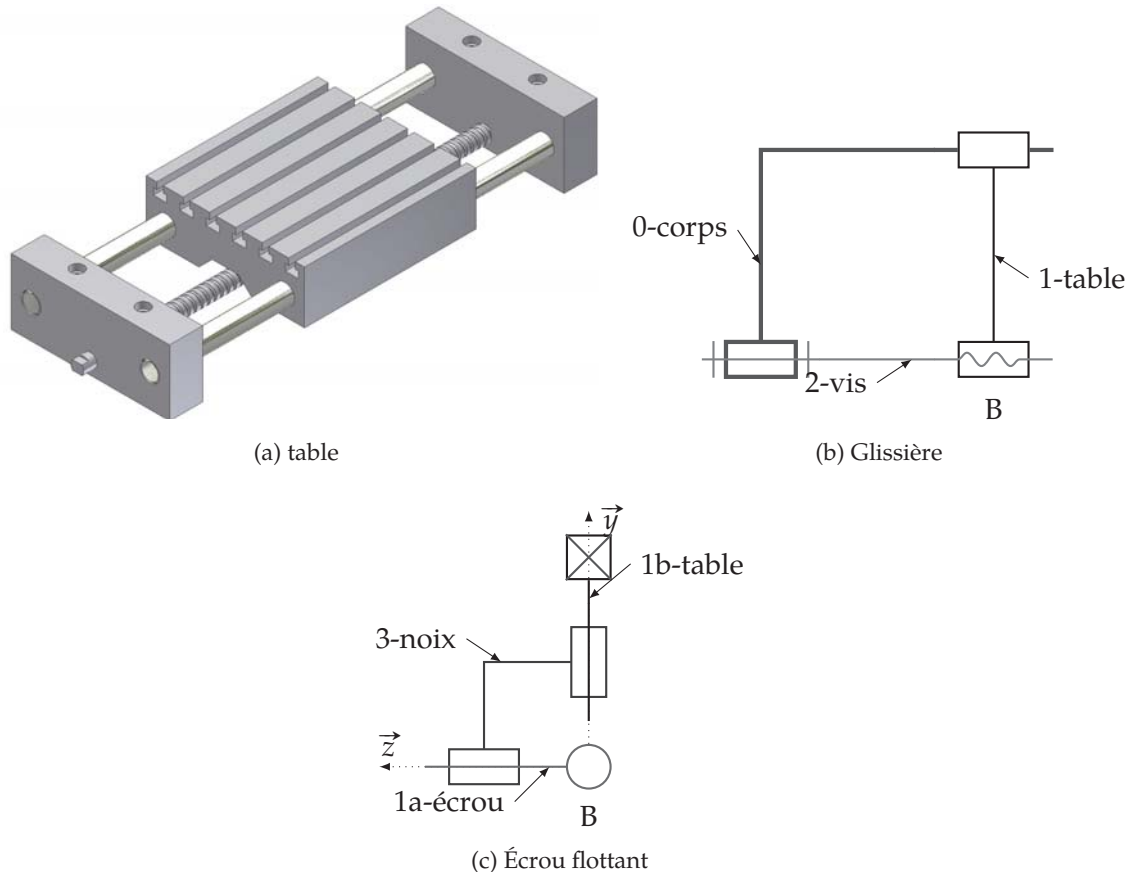


FIGURE 1.11. – Écrou flottant

On se propose de rendre ce mécanisme isostatique. Pour cela, on intègre entre la glissière et l'écrou le mécanisme de la figure 1.11c. Celui-ci est constitué de deux liaisons pivots glissants perpendiculaires liées entre elles, la première est en liaison avec la glissière, la seconde avec l'écrou.

Q5. Évaluez sans calcul le degré de mobilité puis le degré d'hyperstaticité du mécanisme sans la modification.

Q6. Tracez le schéma cinématique en perspective du mécanisme modifié puis le graphe de structure.

Q7. À partir d'une étude cinématique, montrez que le mécanisme est isostatique.

Exercice 2- Pompe à boues

d'après concours général

Corrig page 31

Cette pompe à boues (figure 1.12), utilisée dans la centrale de traitement des eaux usées de Marseille, est prévue pour assurer un débit nominal de $1 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$

Un moteur (non représenté) de 21 kW entraîne le vilebrequin (1) à une fréquence de rotation constante de 0,8 tr/s par l'intermédiaire de deux étages de réduction (non représentés). Le mécanisme bielle-manivelle

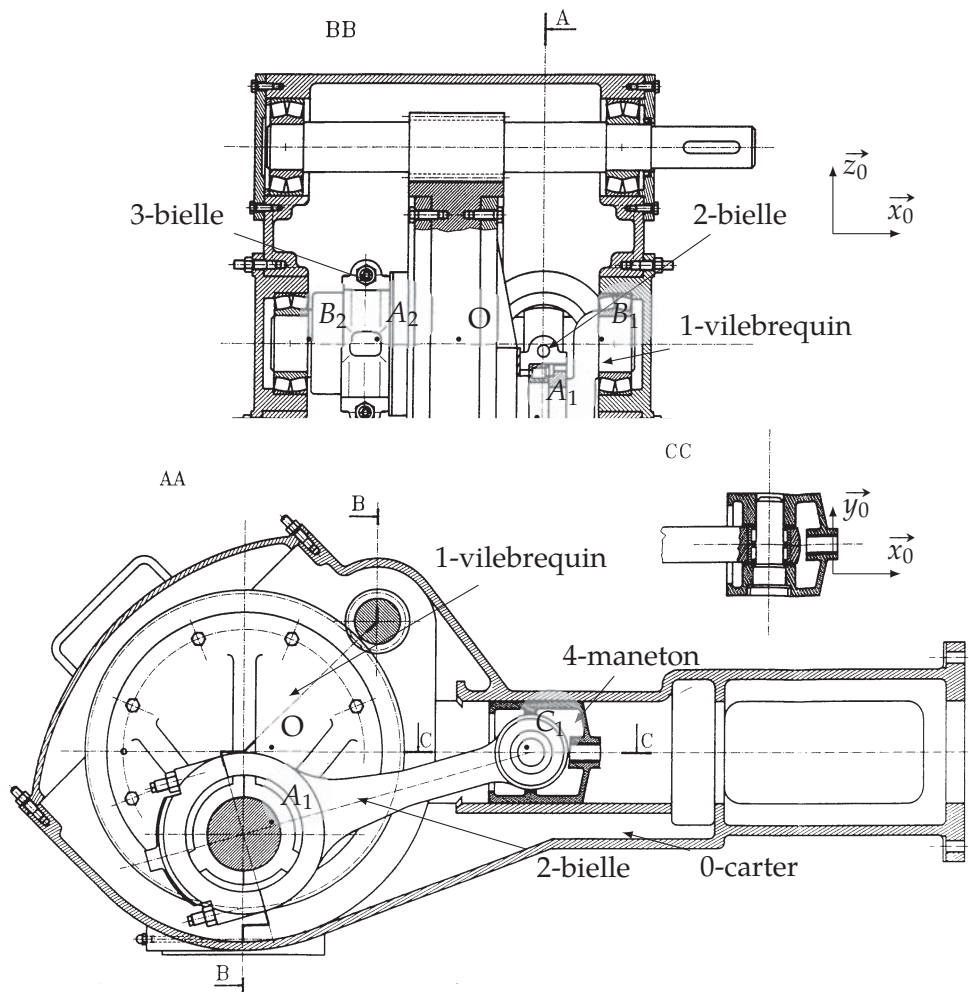


FIGURE 1.12. – Pompe à boues

transforme le mouvement de rotation en un mouvement rectiligne alternatif du piston double effet (seul le guide du piston – maneton (4)– est représenté).

- L'excentricité $e = 100$ mm.
- L'entraxe entre la tête et le pied de bielle est $L = 525$ mm.
- La pompe comprend deux systèmes bielle - manivelle décalés de 90° (carter(0) - (vilebrequin(1) bielle(2), maneton(4)) et (carter(0) - (vilebrequin(1) bielle(3), maneton(5))).

Q1. Modélisation cinématique

Q1a. Le vilebrequin est en liaison en B_1 et B_2 avec le carter, préciser les constituants réalisant la liaison, proposer un modèle pour chaque liaison élémentaire, en déduire la liaison équivalente (on conservera pour la suite la liaison équivalente).

Q1b. Identifier les autres liaisons de la pompe à boues

Q1c. Tracer le graphe de structure du mécanisme complet

Q2. Tracer le schéma cinématique 3D du mécanisme.

Q3. Évaluer le degré d'hyperstaticité du mécanisme (ne pas prendre en compte l'arbre moteur).

Q4. Proposer plusieurs solutions pour rendre le mécanisme bielle - manivelle isostatique.

Q5. Déterminer la loi d'entrée sortie du mécanisme.

Q6. Sachant que chaque système bielle-manivelle pompe pendant la phase aller et la phase retour, déterminer la loi de débit de sortie de la pompe.

Exercice 3- Groupe d'exploitation hydraulique

Extrait CCP 2000

Corrigé page 33

Le barrage hydroélectrique de Serre-Ponçon est équipé de turbines Pelton.

L'étude porte sur une partie du groupe d'exploitation hydraulique représentée et modélisée sur la figure 1.13.

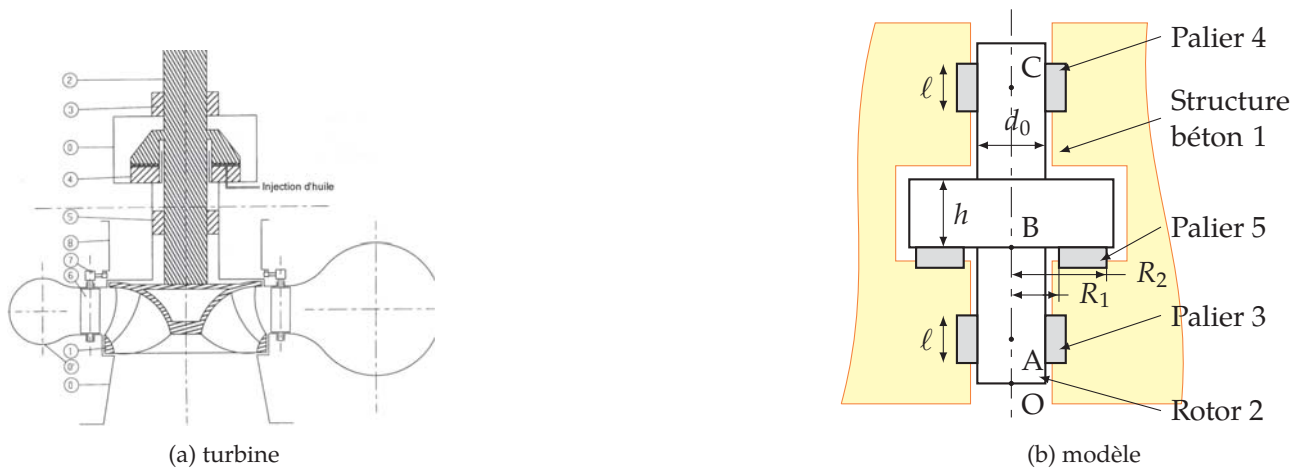


FIGURE 1.13. – Turbine Pelton

La liaison entre le rotor (2) et la structure en béton (1) est réalisée par trois paliers, deux paliers cylindriques en A (palier 3) et C (palier 4) et un palier plan en B (palier 5). Les trois paliers sont en liaison complète démontable avec la structure en béton. La nature du contact des liaisons 2-3 et 2-5 est considérée comme « cylindrique courte ($l \leq d_0$) ».

$$\vec{OA} = a \cdot \vec{z}, \vec{OB} = b \cdot \vec{z}, \vec{OC} = c \cdot \vec{z}$$

Q1. Donner le nom du modèle retenu et le torseur cinématique associés à chacune des liaisons 2-3, 2-4 et 2-5.

Q2. Tracer un schéma cinématique représentant ces trois liaisons.

Q3. Tracer le graphe des liaisons et déterminer le degré d'hyperstatisme du montage bâti - rotor et donner le degré de mobilité. Quel est l'intérêt de cette solution ?

Q4. Déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente 0-2.

1.7.1. Corrigés

Cor. 1 : Écrou flottant

Sujet page 28

Q1. Le mécanisme ne comporte qu'une seule mobilité, la mobilité principale qui permet à partir de la rotation de la vis de déplacer la table : $m = 1$.

Nous savons que $m - h = I_c - E_c$ avec $E_c = 6 \cdot \gamma = 6$ (une seule boucle) et $I_c = 1 + 1 + 1 = 3$ (chaque liaison ne possède qu'une seule inconnue cinématique) d'où $h = 6 + 1 - 3 = 4$. Le mécanisme est hyperstatique d'ordre $h = 4$.

Q2. Schéma cinématique 3D (figure 1.14b). Graphe de structure (figure 1.14a).

- L_1 : liaison pivot d'axe (B, \vec{x}) ;
- L_2 : liaison hélicoïdale d'axe (B, \vec{x}) ;;
- L_3 : liaison pivot glissant d'axe (B, \vec{z}) ;
- L_4 : liaison pivot glissant d'axe (B, \vec{y}) ;
- L_5 : liaison glissière de direction \vec{x} ;

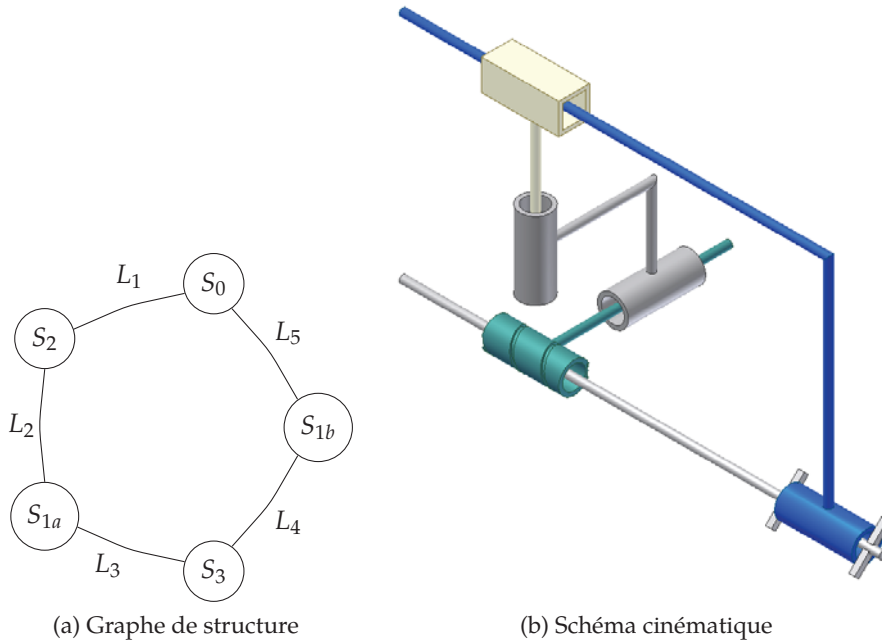


FIGURE 1.14. – Écrou flottant

Q3. On écrit la fermeture cinématique en B, point de concours de toutes les liaisons pivots.

$$\{\mathcal{V}_{0/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1a}\} + \{\mathcal{V}_{1a/3}\} + \{\mathcal{V}_{3/1b}\} + \{\mathcal{V}_{1b/0}\} = \{0\}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_{02} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{21} & v_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{13} & v_{13} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{31} & v_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v_{10} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{0\}$$

avec $v_{21} = \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{21}$

D'où les 6 équations de la fermeture cinématique

$$\begin{cases} \omega_{02} + \omega_{21} = 0 \\ \omega_{13} = 0 \\ \omega_{31} = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{21} + v_{10} = 0 \\ v_{13} = 0 \\ v_{31} = 0 \end{cases}$$

Le rang du système est de 6 (donc $h = 0$), et possède une seule mobilité $m = 1$ (il faut imposer un paramètre, ici ω_{21} pour résoudre complètement le système).

Cor. 2 : Pompe à boues

Sujet page 28

Q1. Modélisation cinématique

Q1a. La liaison entre le vilebrequin et le carter en B_1 (respectivement B_2) est réalisée par un roulement à rotule sur rouleaux, ce roulement permet d'encaisser les défauts d'alignement. On peut modéliser la liaison réalisée par une liaison sphérique.

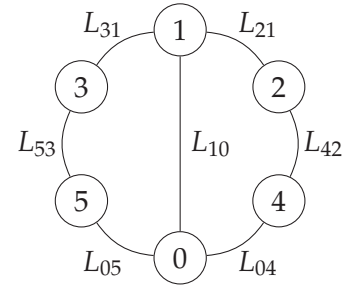
La liaison entre le carter et le vilebrequin est modélisée par deux liaisons sphériques.



Un calcul rapide montre que cette liaison est hyperstatique $h = 1$. La liaison équivalente est une liaison pivot d'axe $(O, \vec{B}_1\vec{B}_2)$.



(a) Roulement à rotule sur rouleaux



(b) Graphe de structure

Q1b. Identifier les autres liaisons de la pompe à boues

- L_{10} : Liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) ,
- L_{04} : Liaison pivot d'axe (A_1, \vec{x}_0) ,
- L_{42} : Liaison pivot d'axe (C_1, \vec{x}_0) ,
- L_{21} : Liaison pivot glissant d'axe (C_1, \vec{y}_0) ,
- L_{05} : Liaison pivot d'axe (A_2, \vec{x}_0) ,
- L_{53} : Liaison pivot d'axe (C_2, \vec{x}_0) ,
- L_{31} : Liaison pivot glissant d'axe (C_2, \vec{y}_0) ,

Q1c. Tracer le graphe de structure du mécanisme complet figure 1.15b.

Q2. Schéma cinématique 3D du mécanisme (figure 1.15).

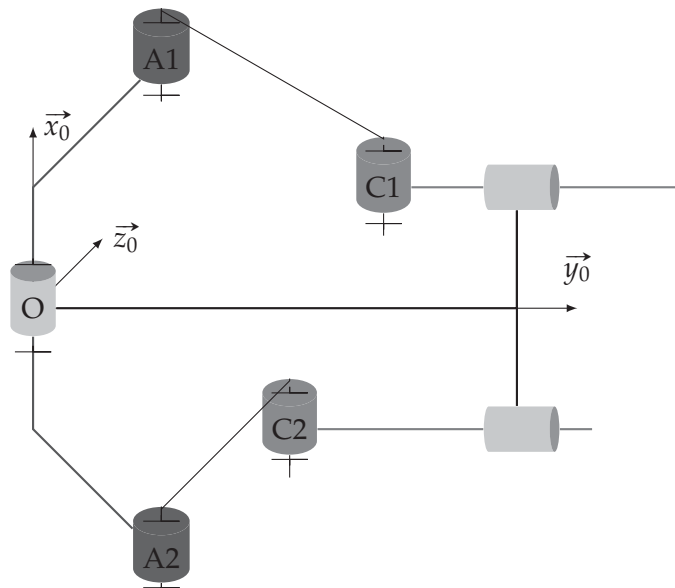


FIGURE 1.15. – Corrigé schéma cinématique pompe à boues

Q3. Le mécanisme est mobile d'ordre $m = 1$ (la rotation du vilebrequin entraîne le déplacement des deux pistons)

$$m - h = I_c - E_c$$

avec, $I_c = 9$, $E_c = 2 \cdot 6 = 12$ d'où $h = 4$.

Q4. Compte tenu de la symétrie, il faut apporter dans chaque boucle deux mobilités. Par exemple :

- Remplacer les liaisons pivot en C_i et A_i par des liaisons sphériques
 - cela rajoute deux mobilités internes (rotation du piston autour de l'axe (C, \vec{x}_0) et de la bielle (2) autour de l'axe $(A_i, \overrightarrow{A_i C_i})$) pour chaque moitié du mécanisme donc $m = 5$,
 - $I_c = 17$, d'où, $h = 5 - 17 + 12 = 0$
 - Cette modélisation revient à prendre en compte l'angle de rotulage des roulements.
- Remplacer la liaison pivot en C_i par une liaison sphère cylindre en C_i
 - cette modélisation rajoute une mobilité interne, la rotation du piston autour de son axe donc $m = 3$ pour le mécanisme complet,
 - $I_c = 15$, $h = 3 - 15 + 12 = 0$
 - Cette modélisation revient à prendre le rotulage dans le roulement en C_i et le jeu axial de cette liaison.
- Une autre possibilité est de modéliser par une sphérique la liaison en C_i et par une pivot glissant celle en A_i .

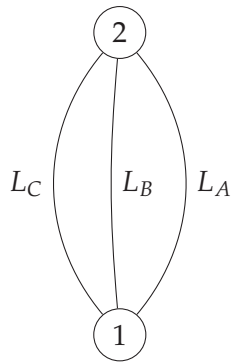
Cor. 3 : Groupe d'exploitation hydraulique

Sujet page 30

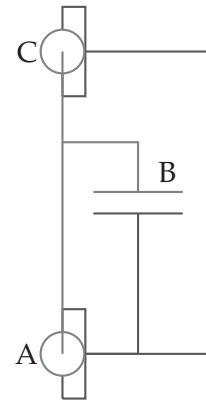
Q1. On modélise chaque liaison « cylindrique courte » par une liaison sphère-cylindre (linéaire annulaire) centrée respectivement en A et en C d'axe (A, \vec{z}) , et la liaison plane par une liaison appui plan de normale \vec{z} .

Q2. schéma cinématique sur la figure 1.16b.

Q3. graphe des liaisons sur la figure 1.16a.



(a) Graphe de structure



(b) Schéma cinématique

FIGURE 1.16. – Correction turbine Pelton