

En première année nous avons débuté l'étude de la mécanique du solide par la cinématique du solide puis par la statique des solides.

- La cinématique est l'étude et la caractérisation des mouvements d'un solide,
- la statique correspond à l'étude de l'équilibre statique (sans mouvement) d'un solide soumis à des actions mécaniques extérieures.
- Ces deux études se sont appuyées sur la modélisation du mécanisme (liaisons).

Nous allons compléter ce cours par la dynamique du solide, c'est à dire l'étude du mouvement des solides avec leur masse et inertie soumis a des actions mécaniques extérieures, en commençant par définir les notions de masse et d'inertie et la cinétique.

2.1 Masse et inertie

2.1.1 Notions d'inertie

Nous savons, par expérience, qu'il est plus « difficile » d'accélérer un camion qu'une moto comme il est plus « difficile » de le freiner. L'inertie caractérise la résistance qu'oppose un corps par sa nature propre à une variation de mouvement.

Pour un mouvement de translation, la masse suffit pour définir cette quantité, par contre pour un mouvement de rotation, il est nécessaire de préciser la répartition de cette masse.

La cinétique est l'étude des caractéristiques d'inertie d'un solide.

2.1.2 Masse - rappels

La masse caractérise la quantité de matière, c'est une grandeur complètement additive.

Soit, Σ_1, Σ_2 deux systèmes matériels disjoints alors :

$$m(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = m(\Sigma_1) + m(\Sigma_2)$$

avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$.

La masse m_Σ de l'ensemble Σ est définie par :

$$m_{\Sigma} = \int_{\Sigma} dm = \int_{\Sigma} \rho(P) dv$$

avec $\rho(P)$ masse volumique au point P et dv un élément de volume.

Remarque :

- Si le système matériel est assimilable à un volume, on parle de masse volumique $\rho(P)$ au point P : $dm = \rho(P)dv$;
- Si le système matériel est assimilable à une surface on parle de masse surfacique $\sigma(P)$ au point P : $dm = \sigma(P)ds$;
- Si le système matériel est assimilable à une ligne, on parle de masse linéique $\lambda(P)$ au point P : $dm = \lambda(P)dl$.

a) Conservation de la masse

On admet en mécanique classique que la masse est une grandeur indépendante du temps, ainsi pour deux instants t_1 et t_2 quelconque :

$$m(\Sigma, t_1) = m(\Sigma, t_2).$$

On en déduit une relation importante :

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{f(P, t)} dm \right]_R = \int_{P \in \Sigma} \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{f(P, t)} \right]_R dm.$$

qui permet d'inverser la dérivation par rapport au temps et l'intégration par rapport à la masse.

2.1.3 Centre d'inertie

a) Définition

On appelle centre d'inertie du système matériel Σ , le point G défini par :

$$\int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}.$$

En faisant intervenir le point O, la relation devient

$$\int_{\Sigma} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm = \int_{\Sigma} \overrightarrow{GO} dm + \int_{\Sigma} \overrightarrow{OP} dm = \vec{0}$$

avec $m_{\Sigma} \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{OP} dm$ et finalement

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{OP} dm$$

Dans un repère cartésien, on note (x_G, y_G, z_G) les coordonnées de \overrightarrow{OG} et (x, y, z) les coordonnées de \overrightarrow{OP} , on peut donc écrire :

$$x_G = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{\Sigma} x \cdot dm, \quad y_G = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{\Sigma} y \cdot dm, \quad z_G = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{\Sigma} z \cdot dm.$$

Remarques :

- Si le système matériel est un solide indéformable, le centre d'inertie est un point fixe du solide ;
- Si le système matériel possède un élément de symétrie matérielle, plan ou axe de symétrie, aussi bien du point de vue géométrique que du point de vue de la répartition des masses, le centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie ;
- Le centre d'inertie est confondu avec centre de gravité dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme.

b) Centre d'inertie d'un ensemble de corps

Un ensemble matériel Σ est composé de n sous-ensembles matériels Σ_i . À chaque sous-ensemble Σ_i est associée sa masse m_i et son centre d'inertie G_i , alors

$$\overrightarrow{OG_\Sigma} = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}.$$

Le centre d'inertie d'un ensemble de corps est le barycentre des centres d'inertie.

Si les corps sont des solides indéformables immobiles les uns par rapport aux autres, le centre d'inertie de l'ensemble est fixe dans un repère lié à cet ensemble.

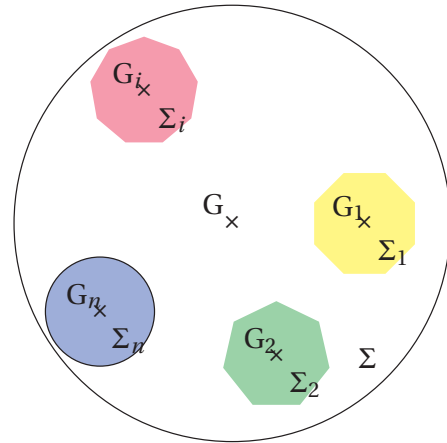


FIGURE 2.1 – Centre d'inertie d'un ensemble de corps

c) Théorèmes de Guldin

Énoncé (Centre d'inertie d'une courbe plane) Soient (C) une courbe du plan (Π) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (C) .

L'aire de la surface engendrée par la rotation de la courbe (C) autour de la droite (Δ) est égal au produit de la longueur de la courbe L par le périmètre décrit par son centre d'inertie $2\pi \cdot r_G$.

$$S = 2\pi \cdot r_G \cdot L$$

On associe à la courbe (C) une masse linéique λ constante, $dm = \lambda \cdot dl$ d'où la masse totale de la courbe $m_c = \lambda \cdot L$.

La position du centre d'inertie de la courbe est calculée par la relation générale :

$$m_c \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} \cdot dm$$

ici cette relation devient :

$$\lambda \cdot L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} \cdot \lambda \cdot dl.$$

Après simplification puis en ne prenant que la projection suivant \vec{r} :

$$L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} dl \Rightarrow L \cdot r_G = \int_C r dl$$

Calculons maintenant la surface engendrée par la rotation de la courbe

$$S = \int_S r \cdot d\theta \cdot dl = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_C r \cdot dl = 2\pi \int_C r \cdot dl$$

En substituant $\int_C r \cdot dl = L \cdot r_G$ dans cette égalité on retrouve bien le résultat cherché.

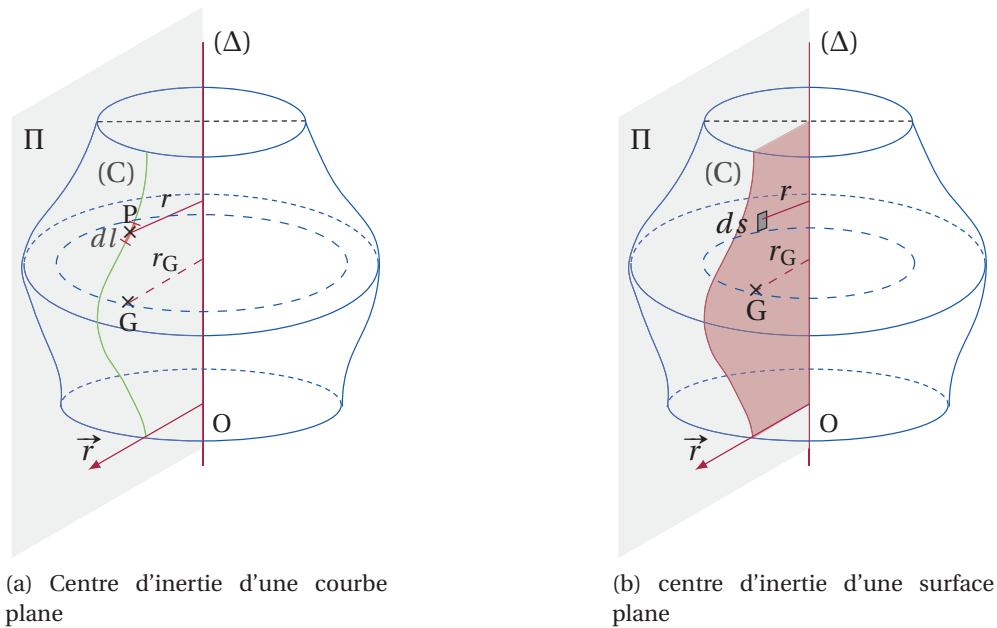


FIGURE 2.2 – Théorèmes de Guldin

Énoncé (Centre d'inertie d'une surface plane homogène) Soient (S) une surface du plan (Π) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (S) .

Le volume engendré par la rotation de la surface plane tournant autour de l'axe (Δ) est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre décrit par son centre d'inertie.

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S$$

On démontre cette égalité comme la précédente. On associe à (S) une masse surfacique $dm = \sigma \cdot ds$ constante et $m_S = \sigma \cdot S$.

Par définition :

$$m_S \cdot \vec{OG} = \int_S \vec{OP} \cdot dm \Rightarrow S \cdot \vec{OG} = \int_S \vec{OP} \cdot ds$$

soit en projection suivant \vec{r}

$$S \cdot r_G = \int_S r \cdot ds$$

Le volume engendré par la rotation de la surface (S) s'écrit :

$$V = \int_V r \cdot d\theta \cdot ds = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_S r \cdot ds = 2\pi \int_S r \cdot ds$$

d'où la relation cherchée :

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S.$$

Remarque : l'utilisation des théorèmes de Guldin permet de simplifier le calcul de position du centre d'inertie dans la mesure où l'on connaît les caractéristiques du volume et de la surface balayée.

2.2 Moments d'inertie

La masse ne suffit pour caractériser l'inertie que dans le cas d'un mouvement de translation. Pour un mouvement de rotation ou un mouvement plus complexe, il faut prendre en compte la répartition de cette masse sur le solide. Les moments et produits d'inertie caractérisent cette répartition.

2.2.1 Moment d'inertie par rapport à un point

On appelle moment d'inertie du solide S par rapport à un point A la quantité positive :

$$I_A(S) = \int_S \overline{AP}^2 dm \quad [\text{kgm}^2]$$

2.2.2 Moment d'inertie par rapport à une droite

On appelle moment d'inertie du solide S par rapport à une droite (Δ) la quantité positive

$$I_\Delta(S) = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overline{AP} \right)^2 dm \quad [\text{kgm}^2]$$

En faisant intervenir le point H, projection de P sur la droite (Δ) on déduit :

$$I_\Delta(S) = \int_S \overline{HP}^2 dm = \int_S d_p^2 \cdot dm$$

avec d_p distance du point P à la droite (Δ) .

Le moment d'inertie par rapport à une droite est le même en tout point de la droite.

2.2.3 Rayon de giration

Le moment d'inertie étant homogène au produit d'une masse par une distance au carré, il est toujours possible d'écrire le moment d'inertie autour d'un axe d'un solide quelconque sous la forme :

$$I = M \cdot R_g^2$$

avec M la masse du solide et R_g le rayon de giration.

Le rayon de giration précise la répartition des masses autour de l'axe considéré ainsi les trois solides de la figure 2.4 ont le même moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation alors que les masses sont dans un rapport dans un rapport de 1 à 7.

2.2.4 Moments d'inertie dans un repère cartésien

Soit un repère R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, un point P de coordonnées x, y, z dans R. Moment d'inertie du solide S par rapport au point O

$$\begin{aligned} I_O(S) &= \int_S \overline{OP}^2 dm \text{ soit} \\ &= \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm \end{aligned}$$

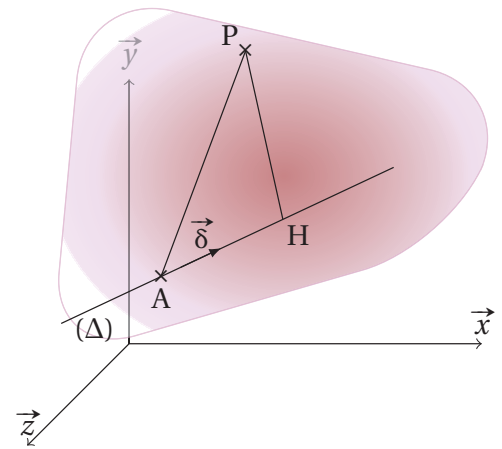


FIGURE 2.3 – Moment d'inertie par rapport à une droite

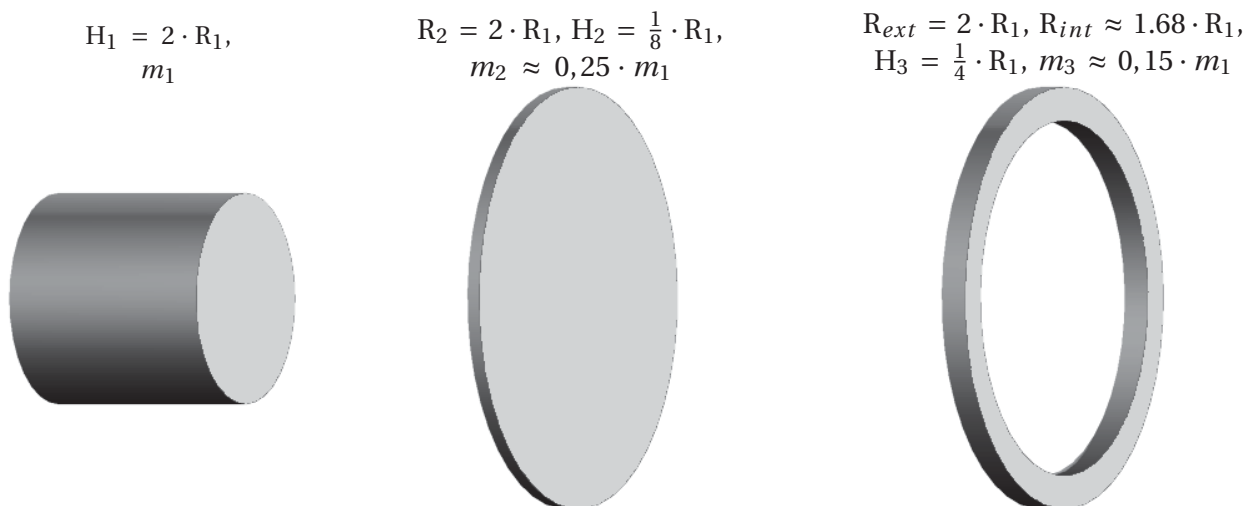


FIGURE 2.4 – Rayon de giration

dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe (O, \vec{x})

$$I_{(O, \vec{x})}(S) = \int_S (\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP})^2 dm = \int_S (\vec{x} \wedge (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}))^2 \cdot dm$$

$$I_{(O, \vec{x})}(S) = \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm$$

Finalement on peut écrire :

$$I_{(O, \vec{x})} = \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport à } (O, \vec{x});$$

$$I_{(O, \vec{y})} = \int_S (z^2 + x^2) \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport à } (O, \vec{y});$$

$$I_{(O, \vec{z})} = \int_S (x^2 + y^2) \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport à } (O, \vec{z}).$$

Par extension on définit aussi :

$$I_{(O \vec{x} \vec{y})} = \int_S z^2 \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport au plan } (O, \vec{x}, \vec{y});$$

$$I_{(O \vec{y} \vec{z})} = \int_S x^2 \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport au plan } (O, \vec{y}, \vec{z});$$

$$I_{(O \vec{z} \vec{x})} = \int_S y^2 \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport au plan } (O, \vec{z}, \vec{x}).$$

2.2.5 Relations entre les moments d'inertie

$$- I_O = I_{(O \vec{x} \vec{y})} + I_{(O \vec{y} \vec{z})} + I_{(O \vec{z} \vec{x})} = \frac{1}{2} (I_{(O, \vec{x})} + I_{(O, \vec{y})} + I_{(O, \vec{z})})$$

$$- I_{(O, \vec{x})} = I_{(O \vec{x} \vec{y})} + I_{(O \vec{z} \vec{x})}$$

$$- I_{(O, \vec{y})} = I_{(O \vec{x} \vec{y})} + I_{(O \vec{y} \vec{z})}$$

$$- I_{(O, \vec{z})} = I_{(O \vec{z} \vec{x})} + I_{(O \vec{y} \vec{z})}$$

2.2.6 Théorème de Huygens

Soit un solide S de centre d'inertie G et de masse m (figure 2.5).

- (Δ_1) , une droite passant par A de vecteur unitaire $\vec{\delta}$;
- (Δ_2) , une droite parallèle passant par G ;
- d , la distance entre les deux droites.

On note :

- $I_{(A, \vec{\delta})} = \int_S (\vec{\delta} \wedge \vec{AP})^2 dm$, le moment d'inertie par rapport à (Δ_1)
- $I_{(G, \vec{\delta})} = \int_S (\vec{\delta} \wedge \vec{GP})^2 dm$, le moment d'inertie par rapport à (Δ_2)
- H la projection du point P du solide S sur (Δ_1)
- K la projection sur (Δ_2) .

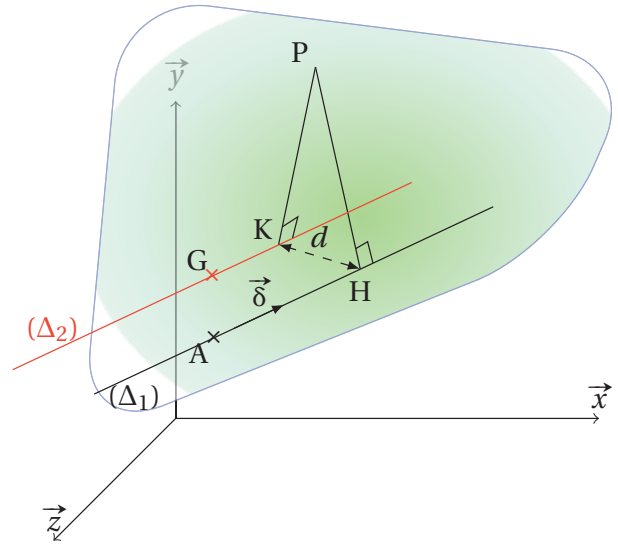


FIGURE 2.5 – Théorème de Huygens

$$\text{Nous savons que } I_{(A, \vec{\delta})} = \int_S (\vec{\delta} \wedge \vec{AP})^2 dm = \int_S \overline{HP}^2 dm = I_{(A, \vec{\delta})} = \int_S (\overline{HK} + \overline{KP})^2 dm$$

$$I_{(A, \vec{\delta})} = \int_S \overline{HK}^2 dm + \int_S 2\overline{HK} \cdot \overline{KP} dm + \int_S \overline{KP}^2 dm$$

$$\text{Le premier terme s'écrit : } \int_S \overline{HK}^2 dm = m \cdot d^2$$

$$\text{On reconnaît le troisième : } \int_S \overline{KP}^2 dm = I_{(G, \vec{\delta})}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer le dernier : $\int_S 2\overline{HK} \cdot \overline{KP} dm = 2\overline{HK} \cdot \int_S \overline{KP} dm$ en faisant intervenir le centre d'inertie G

$$\begin{aligned} \int_S 2\overline{HK} \cdot \overline{KP} dm &= 2 \cdot \overline{HK} \cdot \int_S \overline{KG} + \overline{GP} dm \\ &= 2 \cdot \overline{HK} \cdot \int_S \overline{KG} dm + 2 \cdot \overline{HK} \cdot \int_S \overline{GP} dm \end{aligned}$$

par construction :

$$\overline{HK} \perp \overline{KG} \Rightarrow 2 \cdot \overline{HK} \cdot \int_S \overline{KG} dm = 0$$

par définition du centre d'inertie :

$$\int_S \overline{GP} dm = 0$$

Finalement, on déduit la relation : $I_{(A, \vec{\delta})} = I_{(G, \vec{\delta})} + m \cdot d^2$.

Énoncé (Théorème de Huygens) *Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $(A, \vec{\delta})$ est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe $(G, \vec{\delta})$, parallèle et passant par le centre d'inertie du solide, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance séparant les deux axes.*

$$I_{(A, \vec{\delta})} = I_{(G, \vec{\delta})} + m \cdot d^2$$

Énoncé (Corollaire) De tous les axes parallèles à une direction donnée, celui par rapport auquel le moment d'inertie est minimum est l'axe passant par G.

a) Relation entre les moments d'inertie par rapport à deux droites parallèles

On se propose de déterminer une relation entre les moments d'inertie par rapport à deux droites parallèles quelconques $I_{(A, \vec{\delta})}(S)$ et $I_{(B, \vec{\delta})}(S)$ d'un solide S (figure 2.6).

$$I_{(A, \vec{\delta})}(S) = I_{(G, \vec{\delta})}(S) + m \cdot d_A^2$$

$$I_{(B, \vec{\delta})}(S) = I_{(G, \vec{\delta})}(S) + m \cdot d_B^2$$

D'où la relation entre les moments d'inertie

$$I_{(A, \vec{\delta})}(S) - I_{(B, \vec{\delta})}(S) = m \cdot d_A^2 - m \cdot d_B^2$$

avec d_A et d_B respectivement distance entre les droites Δ_A , Δ_B et Δ_G .

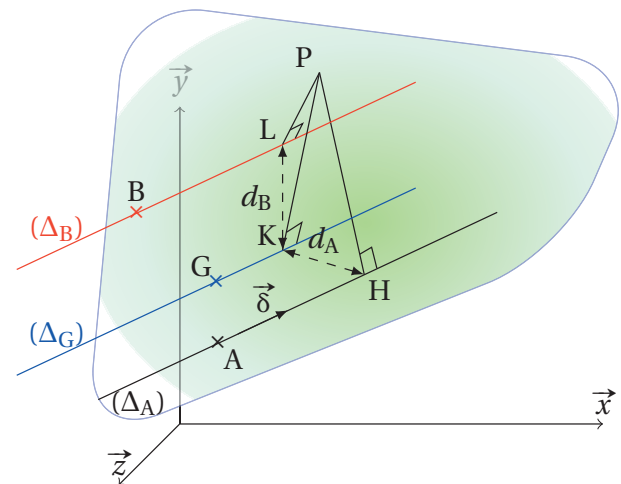


FIGURE 2.6 – Relation entre les moments d'inertie

2.2.7 Produits d'inertie

Les produits d'inertie caractérisent l'absence de symétrie dans la répartition des masses.

La détermination des produits d'inertie sera déduite du calcul de l'opérateur d'inertie dans le chapitre suivant.

2.3 Opérateur d'inertie

2.3.1 Opérateur d'inertie en un point

L'opérateur d'inertie synthétise l'ensemble des caractéristiques d'inertie du solide. Cet opérateur est une fonction linéaire et peut être représenté par une matrice.

a) Définition

On appelle opérateur d'inertie $\overline{\overline{\mathcal{I}}}_O(S)$ au point O d'un solide S l'opérateur qui à tout vecteur \vec{u} de l'espace associe le vecteur

$$\overline{\overline{\mathcal{I}}}_O(S) \cdot \vec{u} = \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}) \right) dm.$$

$$A = I_{(O, \vec{x})} = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) \cdot dm, \text{ le moment d'inertie du solide } S \text{ autour de l'axe } (O, \vec{x});$$

$$B = I_{(O, \vec{y})} = \int_{P \in S} (z^2 + x^2) \cdot dm, \text{ le moment d'inertie du solide } S \text{ autour de l'axe } (O, \vec{y});$$

$$C = I_{(O, \vec{z})} = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) \cdot dm, \text{ le moment d'inertie du solide } S \text{ autour de l'axe } (O, \vec{z}).$$

Par convention on pose

$$F = P_{xy} = \int_{P \in S} x \cdot y \cdot dm, \text{ le produit d'inertie par rapport plan } (O, \vec{x}, \vec{y});$$

$$E = P_{xz} = \int_{P \in S} x \cdot z \cdot dm, \text{ le produit d'inertie par rapport plan } (O, \vec{x}, \vec{z});$$

$$D = P_{yz} = \int_{P \in S} y \cdot z \cdot dm, \text{ le produit d'inertie par rapport plan } (O, \vec{y}, \vec{z}).$$

Remarques :

- Une matrice d'inertie dépend de la base et du point de calcul, il est donc important de préciser ces données;
- La matrice d'inertie est une matrice symétrique;
- On nomme aussi cette matrice tenseur d'inertie.

c) Détermination du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

Par définition le moment d'inertie autour de l'axe $\Delta = (O, \vec{\delta})$ s'écrit

$$I_{\Delta}(S) = \int_{P \in S} (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP})^2 dm.$$

Décomposons le calcul du moment d'inertie

$$I_{\Delta}(S) = \int_{P \in S} (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP})^2 dm = \int_{P \in S} (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}) \cdot (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}) dm.$$

Le terme sous l'intégrale peut être considéré comme le produit mixte des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w}

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

avec $\vec{u} = \vec{\delta}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ et $\vec{w} = (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP})$.

En permutant les termes du produit mixte on ne change pas le résultat :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$

soit ici

$$\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP} \cdot (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{\delta}$$

Le moment d'inertie s'écrit donc :

$$I_{\Delta}(S) = \vec{\delta} \cdot \int_{P \in S} (\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP})) dm$$

On reconnaît, sous l'intégrale, l'opérateur d'inertie au point O du solide S.

Pour déterminer le moment d'inertie du solide S autour de l'axe Δ , il suffit d'effectuer le produit scalaire du vecteur unitaire $\vec{\delta}$ avec $\overline{\mathcal{I}_O(\delta)} \cdot \vec{\delta}$.

$$I_{\Delta}(S) = \vec{\delta} \cdot \left(\overline{\mathcal{I}_O(\delta)} \cdot \vec{\delta} \right)$$

Si on pose $\overline{\mathcal{I}_O(S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_O$ et $\vec{\delta} = (\alpha, \beta, \gamma)$ dans la base \mathcal{B} alors

$$I_{\Delta}(S) = (\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_O \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

d) Changement de point, théorème de Huygens généralisé

Soit B la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On recherche la relation entre la matrice d'inertie en A du solide S et la matrice d'inertie en G le centre d'inertie du solide.

Par définition, l'opérateur d'inertie du solide S au point A dans la base B s'écrit :

$$\overline{\mathcal{I}_A(S)} \cdot \vec{u} = \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}) \right) dm$$

De même l'opérateur d'inertie du solide S au point G dans la base B s'écrit :

$$\overline{\mathcal{I}_G(S)} \cdot \vec{u} = \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}) \right) dm$$

En décomposant le premier :

$$\overline{\mathcal{I}_A(S)} \cdot \vec{u} = \int_{P \in S} \left((\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}) \wedge (\vec{u} \wedge (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP})) \right) dm$$

puis en développant

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{I}_A(S)} \cdot \vec{u} &= \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) \right) dm + \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}) \right) dm \\ &+ \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) \right) dm + \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}) \right) dm \end{aligned}$$

Les deuxièmes et troisièmes termes de cette somme sont nuls (par définition du centre d'inertie $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$) :

$$\begin{aligned} \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}) \right) dm &= \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm \right) = \vec{0} \\ \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) \right) dm &= \left(\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm \right) \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

L'égalité devient :

$$\overline{\mathcal{I}_A(S)} \cdot \vec{u} = \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) \right) dm + \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}) \right) dm$$

On reconnaît dans le second terme l'opérateur d'inertie en G :

$$\overline{\mathcal{I}_G(S)} \cdot \vec{u} = \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}) \right) dm.$$

Il reste à déterminer le premier terme :

Les termes sous l'intégrale ne dépendent pas de la masse (variable d'intégration)

$$\int_{P \in S} \left(\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) \right) dm = m \left(\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) \right)$$

D'où le théorème de Huygens généralisé

$$\overline{\mathcal{I}_A(S)} \cdot \vec{u} = \overline{\mathcal{I}_G(S)} \cdot \vec{u} + m \left(\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) \right)$$

Déterminons $\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG})$ en fonction des coordonnées des deux vecteurs

$$\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AG} = (a, b, c).$$

Un calcul analogue a déjà été réalisé lors de la détermination de la matrice d'inertie page 52, d'où dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -a \cdot b & -a \cdot c \\ -a \cdot b & a^2 + c^2 & -b \cdot c \\ -a \cdot c & -b \cdot c & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathcal{I}_A(S)} \cdot \vec{u} = \overline{\mathcal{I}_G(S)} \cdot \vec{u} + m \cdot \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -a \cdot b & -a \cdot c \\ -a \cdot b & a^2 + c^2 & -b \cdot c \\ -a \cdot c & -b \cdot c & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

On pose pour les matrices d'inertie en A et G :

$$\overline{\mathcal{I}_A(S)} = \begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}_A \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{I}_G(S)} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_G$$

On déduit, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, la relation entre ces matrices :

$$\begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_G + m \cdot \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -a \cdot b & -a \cdot c \\ -a \cdot b & a^2 + c^2 & -b \cdot c \\ -a \cdot c & -b \cdot c & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} A_A &= A_G + m \cdot (b^2 + c^2) & D_A &= D_G + m \cdot b \cdot c \\ B_A &= B_G + m \cdot (a^2 + c^2) & E_A &= E_G + m \cdot a \cdot c \\ C_A &= C_G + m \cdot (a^2 + b^2) & F_A &= F_G + m \cdot a \cdot b \end{aligned} \quad (2.1)$$

On retrouve sur la diagonale le théorème de Huygens pour chacun des axes du repère.

e) Changement de base

Connaissant la matrice d'inertie du solide S en un point A dans la base B_1 , on se propose de déterminer cette matrice en ce même point dans la base B_2 .

Remarque : nous rappelons ici uniquement les principes, pour le reste reportez-vous à un cours de mathématiques.

Matrice de Passage : On appelle P_{B_1, B_2} , la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2 cette matrice est constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B_2 écrits dans la base d'origine B_1 . On l'appelle aussi matrice de changement de base, cette matrice est une matrice inversible.

Changements de base : Soit $\overline{\mathcal{I}_A(S)}_{B_1}$ et $\overline{\mathcal{I}_A(S)}_{B_2}$ les matrices d'inertie d'un solide S respectivement dans la base B_1 et la base B_2 , et P_{B_1, B_2} la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2 , on a alors :

$$\overline{\mathcal{I}_A(S)}_{B_2} = P_{B_1, B_2}^{-1} \cdot \overline{\mathcal{I}_A(S)}_{B_1} \cdot P_{B_1, B_2}$$

Avec P_{B_1, B_2}^{-1} la matrice inverse de P_{B_1, B_2} .

2.3.2 Propriétés et directions principales de la matrice d'inertie

La matrice d'inertie est une matrice symétrique, une simple étude mathématique de la matrice d'inertie nous permet de dire que :

- Les valeurs propres de la matrice sont réelles;
- Il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice est diagonale.

a) Axes principaux d'inertie, base principale d'inertie

Il existe pour tout point A une base orthogonale de vecteurs propres $\mathcal{B}' = (\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$. Dans cette base la matrice d'inertie du solide S au point A est une matrice diagonale :

$$\overline{\mathcal{I}_A(S)} = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix}_{A, \mathcal{B}'}$$

Cette base est appelée base principale d'inertie au point A . Les axes (A, \vec{x}') , (A, \vec{y}') et (A, \vec{z}') sont les axes principaux d'inertie et A' , B' et C' les moments principaux d'inertie.

Remarques :

- Pour tous les solides présentant des symétries dans la répartition des masses, il est facile de déterminer les axes principaux en s'appuyant sur ces symétries.
- Si le point d'écriture est le centre d'inertie, on parle alors de **base centrale** et de **moments centraux d'inertie**;
- Les moments centraux d'inertie sont minima.

Nous allons vérifier que les particularités géométriques dans la répartition des masses (symétrie, axe de révolution) se retrouvent dans la forme de la matrice d'inertie.

Solide avec un plan de symétrie Lorsque le solide possède un plan de symétrie, les produits d'inertie comportant la normale au plan de symétrie sont nuls.

Le solide S de la figure 2.7 possède un plan de symétrie (O, \vec{x}, \vec{y}) , l'axe (O, \vec{z}) est normal à ce plan. Il semble judicieux ici de déterminer la matrice d'inertie de ce solide en un point du plan de symétrie.

Déterminons les produits d'inertie, P_{xz} et P_{yz} dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

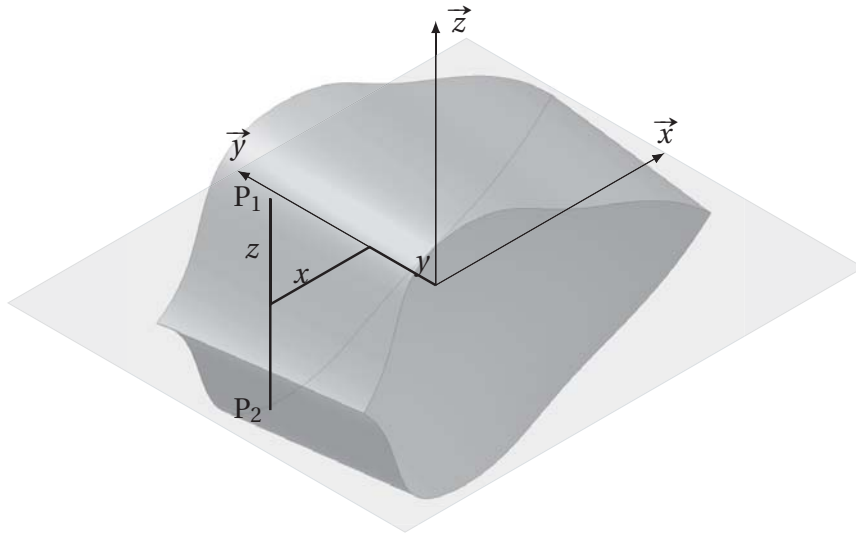


FIGURE 2.7 – Solide avec 1 plan de symétrie

$$E = P_{xz} = \int_{P \in S} x \cdot z \cdot dm \quad \text{et} \quad D = P_{yz} = \int_{P \in S} y \cdot z \cdot dm$$

En décomposant l'intégration sur les deux demi-solides symétriques S_1 et S_2 :

$$E = P_{xz} = \int_{P \in S_1} x \cdot z \cdot dm + \int_{P \in S_2} x \cdot z \cdot dm$$

Le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) est plan de symétrie. On effectue le changement de variable $z \rightarrow -z$ pour calculer la deuxième intégrale. Compte tenu du plan de symétrie, les bornes d'intégration changent $P \in S_2 \rightarrow P \in S_1$ d'où :

$$\int_{P \in S_2} x \cdot z \cdot dm = - \int_{P \in S_1} x \cdot z \cdot dm \Rightarrow E = P_{xz} = 0$$

On constate donc que $E = 0$ et on démontre de même $D = 0$.

La matrice d'inertie du solide S au point O dans la base $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec \vec{z} la normale au plan de symétrie, devient :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} I_{Ox} & P_{xy} & 0 \\ P_{xy} & I_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{pmatrix}_{O, \mathcal{B}}$$

Si le solide possède un plan de symétrie, alors la matrice d'inertie, écrite en un point de ce plan et dans une base dont un vecteur est la normale au plan, comporte deux produits d'inertie nuls. Les deux produits d'inertie nuls sont ceux contenant la normale au plan.

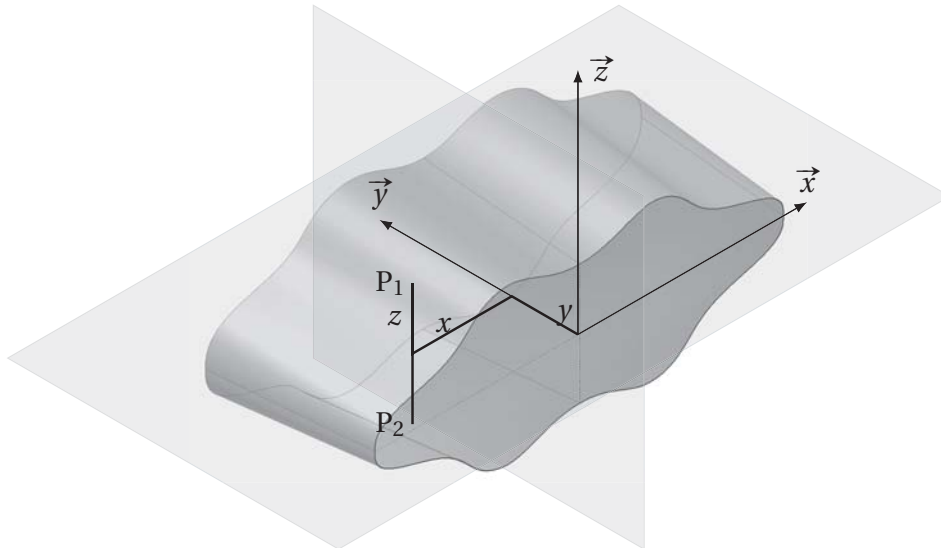


FIGURE 2.8 – Solide avec 2 plans de symétrie

Solide avec deux plans de symétrie Si un solide possède deux plans de symétrie, en choisissant d'écrire la matrice d'inertie en un point O de la droite d'intersection des deux plans et dans une base \mathcal{B} respectant cette symétrie, alors les trois produits d'inerties sont nuls.

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} I_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{pmatrix}_{O, \mathcal{B}}$$

Solide avec une symétrie de révolution Si l'axe (O, \vec{z}) est un axe de révolution matérielle, le solide possède alors une infinité de plan de symétrie orthogonaux. Les produits d'inertie sont donc tous nuls et la matrice est diagonale dans toute base contenant l'axe de révolution et en tout point de cet axe.

Compte tenu de la symétrie de révolution les moments d'inertie par rapport aux (O, \vec{x}) et (O, \vec{y}) sont égaux.

$$A = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) \cdot dm = B = \int_{P \in S} (x^2 + z^2) \cdot dm$$

$$C = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) \cdot dm = 2 \cdot A - 2 \cdot \int_{P \in S} z^2 \cdot dm$$

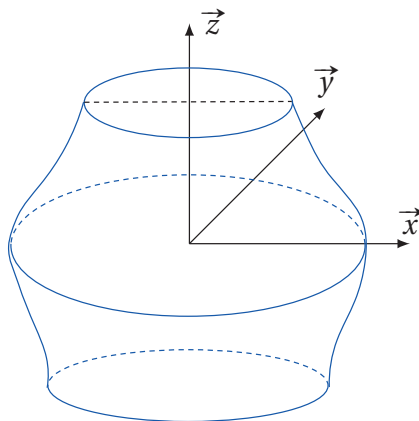


FIGURE 2.9 – Solide de révolution

La matrice d'un solide de révolution exprimée en un point O de son axe de révolution et dans une base respectant cette symétrie s'écrit :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{O, \mathcal{B}}$$

Solide plan d'épaisseur négligeable On se place sur un point O du plan avec (O, \vec{z}) la normale au plan. L'intégration suivant la direction de la normale au plan est nulle (les bornes d'intégration sont nulles) d'où :

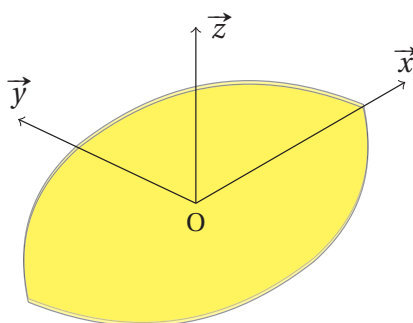


FIGURE 2.10 – Solide d'épaisseur négligeable

$$\begin{aligned} A &= \int_{P \in S} y^2 + z^2 \, dm = \int_{P \in S} y^2 \, dm & B &= \int_{P \in S} x^2 + z^2 \, dm = \int_{P \in S} x^2 \, dm \\ C &= \int_{P \in S} x^2 + y^2 \, dm = A + B \\ D &= \int_{P \in S} y \cdot z \cdot dm = 0 & E &= \int_{P \in S} x \cdot z \cdot dm = 0 \end{aligned}$$

Finalement la matrice s'écrit en un point O du plan et dans une base \mathcal{B} contenant la normale à celui-ci :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}_{O, \mathcal{B}}$$

Disque plan d'épaisseur négligeable Pour un disque plan, en O centre du disque et dans une base \mathcal{B} telle que \vec{z} est la normale au plan

$$\overline{\mathcal{I}_O(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot A \end{pmatrix}_{O, \mathcal{B}}$$

2.4 Exercices

Exercice 6- Quart de disque

Adapté du Concours National DEUG - CCP

Corrigé page 64

Soit une plaque (P) en forme d'un quart de disque de rayon a et d'épaisseur négligeable devant le rayon a . On note μ la masse surfacique du matériau constituant la plaque (P).

Le référentiel terrestre \mathcal{R}_0 est considéré comme galiléen; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Q1. Déterminer la masse M de la plaque (P) en fonction de μ et a .

Q2. Déterminer l'opérateur d'inertie $\overline{\mathcal{I}}_O(P)$ de la plaque (P) au point O dans $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction de M et a .

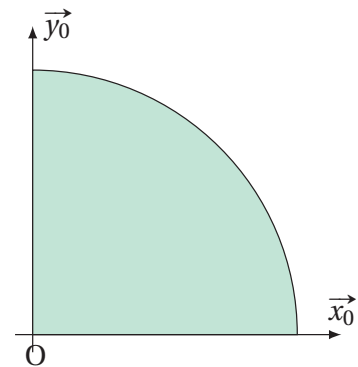


FIGURE 2.11 – Quart de disque

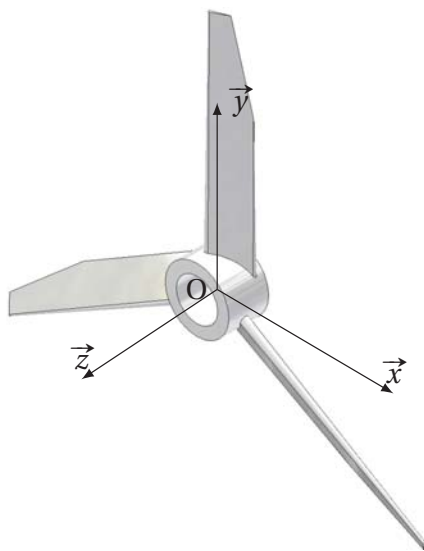
Q3. Déterminer les axes principaux d'inertie de la plaque (P), préciser les vecteurs de la base principale.

Q4. En déduire les moments d'inertie principaux J_1, J_2 et J_3 de la plaque (P) au point O en fonction de M et a .

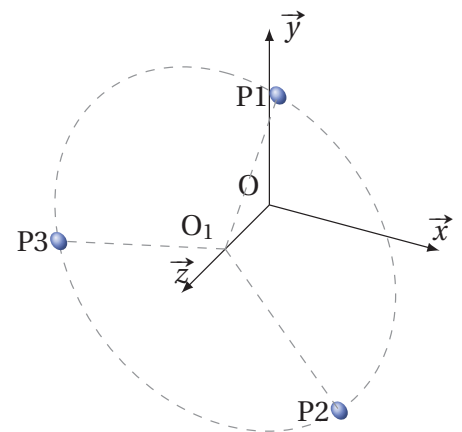
Exercice 7- Hélice tripale

Corrigé page 64

Soit l'hélice tripale définie sur la figure 2.12.



(a) Hélice



(b) Masses ponctuelles réparties

FIGURE 2.12 – Hélice tripale

Q1. Montrez que la matrice d'inertie de trois masses ponctuelles régulièrement réparties sur un cercle de rayon R est diagonale.

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_1 = R \cdot \cos(\theta) \\ b_1 = R \cdot \sin(\theta) \\ c_1 = z \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_2 = R \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ b_2 = R \cdot \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ c_2 = z \end{pmatrix} \text{ et } P_3 = \begin{pmatrix} a_3 = R \cdot \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ b_3 = R \cdot \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ c_3 = z \end{pmatrix}.$$

Q2. En déduire que la matrice d'inertie d'une hélice tripale est diagonale en tout point de l'axe.

Exercice 8- Volant d'inertie

Corrigé page 65

Un volant d'inertie en acier (7800 kgm^{-3}) est constitué :

- d'une couronne circulaire à base carrée (coté $2c$) et de rayon extérieur $R_e = 10 \cdot c$,
- d'un moyeu central de rayon $R_m = c$ de hauteur $2c$,
- de trois bras à 120° de section carrée (coté c).

Q1. Déterminer la masse du volant d'inertie en fonction de c .

Q2. Déterminer le moment d'inertie du volant autour de l'axe de rotation en fonction de c .

Nota : les bras seront modélisés par des parallélépipèdes tangents à la couronne et au moyeu.

Q3. A.N. $c = 5 \text{ cm}$.

Q4. Déterminer la masse du disque d'épaisseur $2c$ ayant le même moment d'inertie. Conclure.



FIGURE 2.13 – Volant d'inertie

Exercice 9- Sphéricône

Corrigé page 66

On obtient un sphéricône (figure 2.14) à partir d'un double - cône de 90° d'angle au sommet coupé en deux par un plan passant par l'axe puis recollé après une rotation de 90° .

On se propose de déterminer les caractéristiques cinétiques du sphéricône et de les comparer à celle du double-cône.

Le sphéricône peut se décomposer en 4 demi - cônes de rayon R et de demi - angle au sommet 45° .

Q1. Déterminer par des considérations géométriques la position du centre d'inertie G et la forme de la matrice d'inertie du sphéricône en G (préciser la base).

Q2. Précisez la forme de la matrice d'inertie d'un demi - cône en O dans la base.

Q3. En déduire celle du sphéricône.

Q4. Déterminez la matrice d'inertie du demi-cône en ne calculant que les termes utiles pour la matrice du sphéricône puis celle du celle du sphéricône. Écrire cette matrice en fonction de M_c , la masse du double cône.

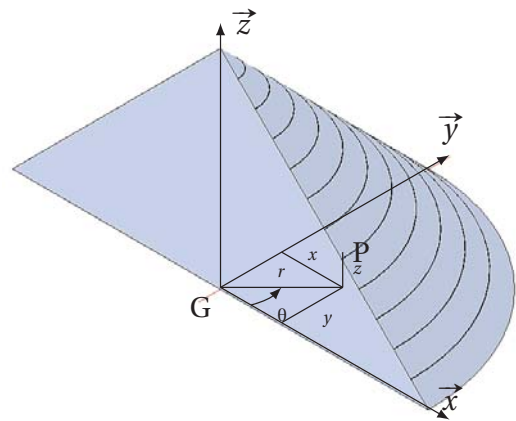
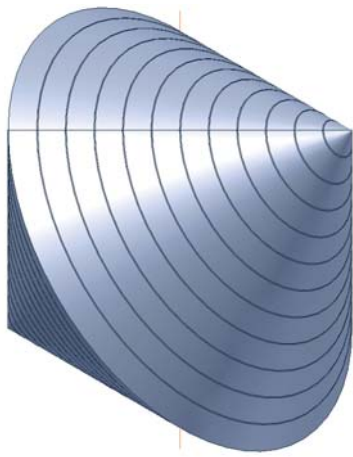
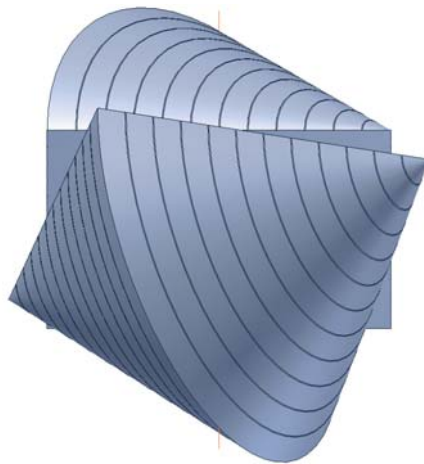
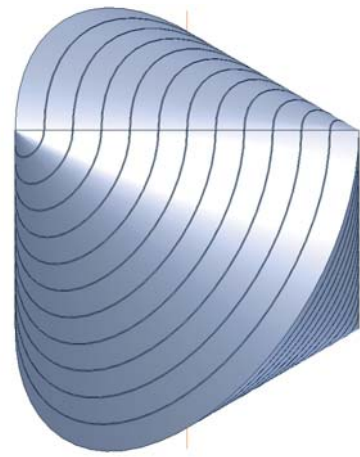


FIGURE 2.15 – Paramétrage du sphéricône



(a) double cône

(b) découpe et rotation de 90° 

(c) sphéricône

FIGURE 2.14 – Du double cône au sphéricône

2.5 Torseur cinétique

2.5.1 Définition

Le torseur cinétique est le torseur des quantités de mouvement d'un système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R.

$$\{\mathcal{C}_{E/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p}_{E/R} = \int_{P \in E} \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm \\ \overrightarrow{\sigma}_{A,E/R} = \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm \end{array} \right\}_A$$

- $\overrightarrow{V}_{P/R}$: Vitesse du point P du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R;
- $\overrightarrow{p}_{E/R} = \int_{P \in E} \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm$: Résultante cinétique ou quantité de mouvement de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R;
- $\overrightarrow{\sigma}_{A,E/R} = \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm$: Moment cinétique au point A de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R.

a) Résultante cinétique

Soit O un point lié au référentiel \mathcal{R} et G le centre d'inertie de l'ensemble matériel E, par définition du centre d'inertie : $m_E \overrightarrow{OG} = \int_{P \in E} \overrightarrow{OP} dm$.

$$\text{En dérivant par rapport au temps dans R : } m_E \cdot \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OG} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \int_{P \in E} \overrightarrow{OP} dm \right]_R.$$

Compte tenu du principe de conservation de la masse, on peut permuter la dérivation par rapport au temps et l'intégration sur la masse :

$$m_E \cdot \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OG} \right]_R = \int_{P \in E} \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OP} \right]_R dm.$$

On reconnaît la vitesse du point G et celle du point P par rapport au repère R. La quantité de mouvement se calcule donc finalement comme :

$$\overrightarrow{p}_{E/R} = \int_{P \in E} \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm = m_E \cdot \overrightarrow{V}_{G/R}$$

b) Changement de point

Le champ des moments cinétiques $\overrightarrow{\sigma}_{A,E/R}$ est équiprojectif, on peut donc écrire :

$$\overrightarrow{\sigma}_{B,E/R} = \overrightarrow{\sigma}_{A,E/R} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p}_{E/R}$$

ou

$$\overrightarrow{\sigma}_{B,E/R} = \overrightarrow{\sigma}_{A,E/R} + \overrightarrow{BA} \wedge m_E \cdot \overrightarrow{V}_{G/R}.$$

2.5.2 Cas du solide indéformable

Soit S, un solide indéformable de masse m_s .

L'hypothèse de solide indéformable, permet d'associer les propriétés du champ des vecteurs vitesses d'un solide aux propriétés du torseur cinétique. Ainsi, pour P et A deux points liés au solide, la relation de composition des vitesses permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{P \in S/R}} = \overrightarrow{V_{A \in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}$$

avec $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$: le vecteur rotation du solide S par rapport au repère R.

Pour un solide S le torseur cinétique s'écrit :

$$\{\mathcal{C}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p_{S/R}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{V_{P \in S/R}} \cdot dm \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P \in S/R}} \cdot dm \end{array} \right\}_A$$

et la résultante cinétique :

$$\overrightarrow{p_{S/R}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot dm = m_S \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R}}$$

En faisant intervenir le point A dans la détermination du moment cinétique d'un solide indéformable, on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} &= \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P \in S/R}} \cdot dm \\ &= \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{V_{A \in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}) \cdot dm \\ &= \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \cdot dm + \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}) \cdot dm \\ &= \left(\int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \cdot dm \right) \wedge \overrightarrow{V_{A \in S/R}} + \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}) \cdot dm \end{aligned}$$

On reconnaît :

— dans le premier terme la définition du centre d'inertie G :

$$\int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \cdot dm = m_S \overrightarrow{AG};$$

— dans le deuxième terme l'opérateur d'inertie du solide S au point A appliqué au vecteur : $\int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}) \cdot dm$

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Finalement, le moment cinétique d'un solide indéformable dans son mouvement par rapport à un repère R devient

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = m_S \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S/R}} + \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Cette relation est importante mais on s'attachera à l'utiliser dans les cas particuliers suivants qui facilitent les calculs.

Le point A est confondu avec le centre d'inertie G

$$\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} = \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

A est un point fixe dans le repère

$$\overrightarrow{\sigma}_{A,S/R} = \overline{\mathcal{I}}_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$$

Le mouvement du solide S par rapport au repère est une translation

$$\overrightarrow{\sigma}_{A,S/R} = m_s \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{A \in S/R}$$

Il est souvent préférable de calculer le moment cinétique soit au centre d'inertie, soit en un point A du solide S fixe dans le repère R puis d'utiliser la relation de changement de point si nécessaire.

2.6 Torseur dynamique

2.6.1 Définition

Le torseur dynamique est le torseur des quantités d'accélération d'un système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R :

$$\{\mathcal{D}_{E/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{A}_{E/R} = \int_{P \in E} \overrightarrow{\Gamma}_{P/R} \cdot dm \\ \overrightarrow{\delta}_{A,E/R} = \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P/R} \cdot dm \end{array} \right\}_A$$

— $\overrightarrow{\Gamma}_{P/R}$: accélération du point P de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R;

— $\overrightarrow{A}_{E/R} = \int_{P \in E} \overrightarrow{\Gamma}_{P/R} \cdot dm$: résultante dynamique de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R, on montre aussi que

$$\overrightarrow{A}_{E/R} = m_E \cdot \overrightarrow{\Gamma}_{G/R};$$

— $\overrightarrow{\delta}_{A,E/R} = \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P/R} \cdot dm$: moment dynamique en A de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R.

2.6.2 Changement de point de réduction

Le champ des moments dynamiques est un champ de torseur. Pour changer de point de réduction on utilise donc la relation générale des torseurs :

$$\overrightarrow{\delta}_{B,E/R} = \overrightarrow{\delta}_{A,E/R} + \overrightarrow{BA} \wedge m_E \cdot \overrightarrow{\Gamma}_{G/S}.$$

2.6.3 Relation entre la résultante cinétique et la résultante dynamique

On montre facilement que :

$$\overrightarrow{A}_{E/R} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{p}_{S/R} \right]_R = m_E \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V}_{G/R} \right]_R = m_E \overrightarrow{\Gamma}_{G/R}.$$

2.6.4 Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique

Par définition le moment cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\sigma}_{A,E/R} &= \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm \\
 \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{A,E/R} \right]_R &= \left[\frac{d}{dt} \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}_{P/R} dm \right]_R \\
 &= \int_{P \in E} \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}_{P/R}) \right]_R \cdot dm \\
 &= \int_{P \in E} \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{AP} \right]_R \wedge \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm + \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V}_{P/R} \right]_R \cdot dm \\
 &= \int_{P \in E} \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \right]_R \wedge \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm + \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P/R} \cdot dm \\
 &= \int_{P \in E} (\overrightarrow{V}_{P/R} - \overrightarrow{V}_{A/R}) \wedge \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm + \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P/R} \cdot dm \\
 \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{A,E/R} \right]_R &= \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P/R} \cdot dm - \int_{P \in E} \overrightarrow{V}_{A/R} \wedge \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm
 \end{aligned}$$

— le premier terme représente le moment dynamique en A

$$\int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P/R} \cdot dm = \overrightarrow{\delta}_{A,E/R};$$

— le second devient

$$\int_{P \in E} \overrightarrow{V}_{A/R} \wedge \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm = \overrightarrow{V}_{A/R} \wedge \int_{P \in E} \overrightarrow{V}_{P/R} \cdot dm = m_E \cdot \overrightarrow{V}_{A/R} \wedge \overrightarrow{V}_{G/R}.$$

D'où la relation cherchée entre le moment dynamique et le moment cinétique :

$$\overrightarrow{\delta}_{A,E/R} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{A,E/R} \right]_R + m_E \cdot \overrightarrow{V}_{A/R} \wedge \overrightarrow{V}_{G/R}$$

A un point géométrique quelconque et G le centre d'inertie de cet ensemble matériel.

a) Cas particuliers

— A est confondu avec G, alors : $\overrightarrow{\delta}_{G,E/R} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{G,E/R} \right]_R$;

— A est un point fixe de R, alors : $\overrightarrow{\delta}_{A,E/R} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{A,E/R} \right]_R$.

b) Détermination du moment dynamique

Il est en général plus facile de déterminer le moment cinétique que le moment dynamique (le champ des vitesses est en général connu). Pour calculer le moment dynamique, on choisit de calculer en un point caractéristique (le centre d'inertie G ou un point fixe du repère) le moment cinétique puis de le dériver. Pour obtenir le moment dynamique en un autre point on utilise la relation liant les moments d'un torseur.

2.6.5 Cas du solide indéformable

Pour un solide, nous avons la relation de composition des vitesses des points du solide :

$$\overrightarrow{V_{P \in S/R}} = \overrightarrow{V_{Q \in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{QP}.$$

La résultante dynamique s'écrit :

$$\overrightarrow{A_{S/R}} = m_S \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R}}$$

et le moment dynamique en A :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} \right]_R + m_S \cdot \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G \in S/R}}$$

avec A point géométrique.

Cette dernière relation est à manipuler avec précaution, en effet $\overrightarrow{V_{A/R}}$ n'est pas toujours facile à évaluer pour un point quelconque, on se limitera donc à calculer le moment dynamique uniquement en des points avec des propriétés particulières :

— A est confondu avec G, alors :

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} \right]_R ;$$

— A est un point fixe de R, alors :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} \right]_R .$$

Puis on utilisera la relation de changement de point des torseurs.

2.7 Énergie cinétique

2.7.1 Définition

L'énergie cinétique élémentaire d'un point P affecté de la masse dm dans son mouvement par rapport à un repère R est donnée par :

$$dT_{P/R} = \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{P/R}}^2 dm$$

L'énergie cinétique d'un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un repère R est alors :

$$T_{E/R} = \frac{1}{2} \int_{P \in E} \overrightarrow{V_{P/R}}^2 dm$$

L'unité de l'énergie cinétique est le Joule.

2.7.2 Cas du solide indéformable

Soit un solide S de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère R, A un point lié au solide.

Pour un solide, l'énergie cinétique du solide dans son mouvement par rapport au repère R s'écrit :

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \overrightarrow{V_{P \in S/R}}^2 dm.$$

On a $\overrightarrow{V_{P \in S/R}} = \overrightarrow{V_{A \in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}$, d'où

$$\begin{aligned} T_{S/R} &= \frac{1}{2} \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{V_{A \in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP} \right)^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{P \in S} \overrightarrow{V_{A \in S/R}}^2 dm + 2 \cdot \int_{P \in S} \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP} \right) dm + \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP} \right)^2 dm \right) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{V_{A \in S/R}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ indépendant de la variable d'intégration dm

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A \in S/R}}^2 + \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} dm \right) + \frac{1}{2} \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP} \right) \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP} \right) dm$$

On reconnaît le produit mixte $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ invariant par permutation circulaire dans le troisième terme avec $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ et $\vec{w} = \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP} \right)$ soit alors :

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A \in S/R}}^2 + m_S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \right) + \frac{1}{2} \int_{P \in S} \left(\overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP} \right) \right) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} dm$$

On reconnaît l'opérateur d'inertie du solide S en A

$$\int_{P \in S} \left(\overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP} \right) \right) dm = \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Finalement la relation permettant de déterminer l'énergie cinétique d'un solide :

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A \in S/R}}^2 + m_S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \right) + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Cette relation est assez difficile à utiliser, montrons que dans le cas d'un solide, l'énergie cinétique peut aussi se calculer en réalisant le comoment des torseurs cinématique et cinétique.

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}_{S/R} \} \otimes \{ \mathcal{C}_{S/R} \}$$

On note

— torseur cinématique en A du solide S dans son mouvement par rapport au repère R

$$\{ \mathcal{V}_{S/R} \} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \end{array} \right\}_A$$

— torseur cinétique du solide S dans son mouvement par rapport au repère R

$$\{ \mathcal{C}_{S/R} \} = \left\{ \begin{array}{c} m_S \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R}} \\ \overline{\overline{\sigma_{A,S/R}}} \end{array} \right\}_A$$

$$\begin{aligned} T_{S/R} &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}_{S/R} \} \otimes \{ \mathcal{C}_{S/R} \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} m_S \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R}} \\ \overline{\overline{\sigma_{A,S/R}}} \end{array} \right\}_A \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\sigma_{A,S/R}}} + \frac{1}{2} m_S \cdot \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R}} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(m_S \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S/R}} + \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \right) + \frac{1}{2} m_S \cdot \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R}} \\ T_{S/R} &= \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A \in S/R}}^2 + m_S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \right) + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat. Cette relation est souvent plus facile à mettre en œuvre que la relation générale.

L'énergie cinétique ne dépend donc pas du point de calcul (propriété du comoment), il est donc préférable d'appliquer cette relation en des points particuliers :

En G, centre d'inertie du solide

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{G \in S/R}}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

avec $\overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}}$ la matrice d'inertie du solide S en G;

Pour un mouvement de rotation de centre C point fixe dans le mouvement de rotation (rotule ou gyroscope) par rapport au repère R

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_C(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

avec $\overline{\overline{\mathcal{I}_C(S)}}$ la matrice d'inertie du solide S en C;

Pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (C, \vec{u}) , en C point fixe de l'axe de rotation du solide S par rapport au repère R.

On pose $\overline{\overline{\mathcal{I}_C(S)}} = \begin{pmatrix} I_u & -F & -E \\ -F & I_v & -D \\ -E & -D & I_w \end{pmatrix}_{C, (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$ la matrice d'inertie du solide S en C dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_u \cdot \vec{u}$.

$$\begin{aligned} T_{S/R} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_C(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ &= \frac{1}{2} (\omega_u, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} I_u & -F & -E \\ -F & I_v & -D \\ -E & -D & I_w \end{pmatrix}_{C, (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})} \begin{pmatrix} \omega_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} I_u \cdot \omega_u^2$$

Pour un mouvement de translation,

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A \in S/R}}^2 = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{G \in S/R}}^2$$

2.8 Caractéristiques cinétiques d'un ensemble de solide

Soit E un ensemble de n solides S_i , en mouvement par rapport au repère R

2.8.1 Torseur cinétique d'un ensemble de solides

Le torseur cinétique d'un ensemble de solide, est la somme (en un même point) des torseurs cinétiques de chaque solide.

$$\{\mathcal{C}_{E/R}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{C}_{S_i/R}\}$$

La résultante cinétique d'un ensemble de solides est la somme des résultantes cinétiques et le moment cinétique en un point A d'un ensemble de solides est la somme des moments cinétiques de chaque solide en ce même point.

$$\overrightarrow{p_{E/R}} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p_{S_i/R}} \qquad \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{\sigma_{A,S_i/R}}$$

2.8.2 Torseur dynamique d'un ensemble de solides

Le torseur dynamique d'un ensemble de solide, est la somme (en un même point) des torseurs dynamique de chaque solide.

$$\{\mathcal{D}_{E/R}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{D}_{S_i/R}\}$$

La résultante dynamique d'un ensemble de solides est la somme des résultantes dynamiques et le moment dynamique en un point A d'un ensemble de solide est la somme des moments dynamiques de chaque solide en ce même point.

$$\overrightarrow{A_{E/R}} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_{S_i/R}} \qquad \overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{\delta_{A,S_i/R}}$$

2.8.3 Énergie cinétique d'un ensemble de solides

L'énergie cinétique d'un ensemble de solide est la somme des énergies cinétiques.

$$T_{E/R} = \sum_{i=1}^n T_{S_i/R}$$

En décomposant sur chaque solide :

$$T_{E/R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \mathcal{V}_{S_i/R} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{C}_{S_i/R} \right\}$$

$$T_{E/R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S_i/R}} \\ \overrightarrow{V_{A_i \in S_i/R}} \end{array} \right\}_{A_i} \otimes \left\{ \begin{array}{c} m_i \overrightarrow{V_{G_i \in S_i/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_i, S_i/R}} \end{array} \right\}_{A_i}$$

Remarque : l'énergie cinétique ne dépendant pas du point de calcul du comoment, chaque comoment peut-être calculé en un point particulier caractéristique du mouvement considéré.

2.9 Exercices

Exercice 10- Éolienne

d'après École de l'air 1997

Corrigé page 79

On se propose d'étudier une éolienne. Une schématisation simplifiée peut-être donnée par l'ensemble constitué :

- d'un mat 0;
- d'un bloc oscillant (solide 1) en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) avec le bâti 0;
- d'une hélice associée au rotor de la génératrice (solide 2) en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec le solide 1.

Paramétrage : à chaque solide i est associé un repère de base orthonormée directe $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ avec

- $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \alpha$
- $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \beta$

Solide 1 Homogène de masse m_1 , de centre d'inertie A, admettant le plan $(A, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ comme plan de symétrie matérielle.

Solide 2 Homogène de masse m_2 , et de centre d'inertie G_2 , $\overrightarrow{AG_2} = l \cdot \vec{x}_1$, ce solide est constitué.

- d'un cylindre plein 2_a de hauteur H et de rayon R, d'axe (A, \vec{x}_2) , de masse m_{2a} , de centre d'inertie G_{2a} avec $\overrightarrow{G_2 G_{2a}} = \lambda \cdot \vec{x}_2$
- d'une plaque rectangulaire 2_b , d'épaisseur négligeable, de coté a suivant \vec{y}_2 et b suivant \vec{z}_2 , de masse m_{2b} , de centre d'inertie G_{2b} avec $\overrightarrow{G_2 G_{2b}} = \mu \cdot \vec{x}_2$

Q1. On note, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 et F_1 les coefficients de l'opérateur d'inertie du solide S_1 dans la base B_1 , préciser la forme de la matrice d'inertie du solide S_1 en A_1 .

Q2. Déterminer

Q2a. la relation entre λ, μ et les masses.

Q2b. l'opérateur d'inertie $\overline{\mathcal{J}_{G_{2a}}(2a)}$ en G_{2a} du solide 2_a dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en fonction de m_{2a} et des dimensions H et R.

Q2c. l'opérateur d'inertie $\overline{\mathcal{J}_{G_{2b}}(2b)}$ en G_{2b} du solide 2_b dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, en fonction de la masse m_{2b} et des dimensions a et b .

Q2d. l'opérateur d'inertie $\overline{\mathcal{J}_{G_2}(2a)}$ en G_2 du solide 2 dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.

On notera A_2, B_2, C_2, \dots , les termes de l'opérateur $\overline{\mathcal{J}_{G_2}(2)}$ dans la suite du problème.

Q3. Déterminer $\overrightarrow{\sigma_{A, S_1 / R_0}}$ le moment cinétique au point A du solide 1 dans son mouvement par rapport au repère galiléen, puis le torseur cinétique du solide S_1 dans son mouvement par rapport à R_0 .

Q4. Déterminer $\overrightarrow{\delta_{A, S_1 / R_0}} \cdot \vec{z}_0$ le moment dynamique du solide 1 dans son mouvement par rapport au galiléen au point A en projection sur \vec{z}_0 .

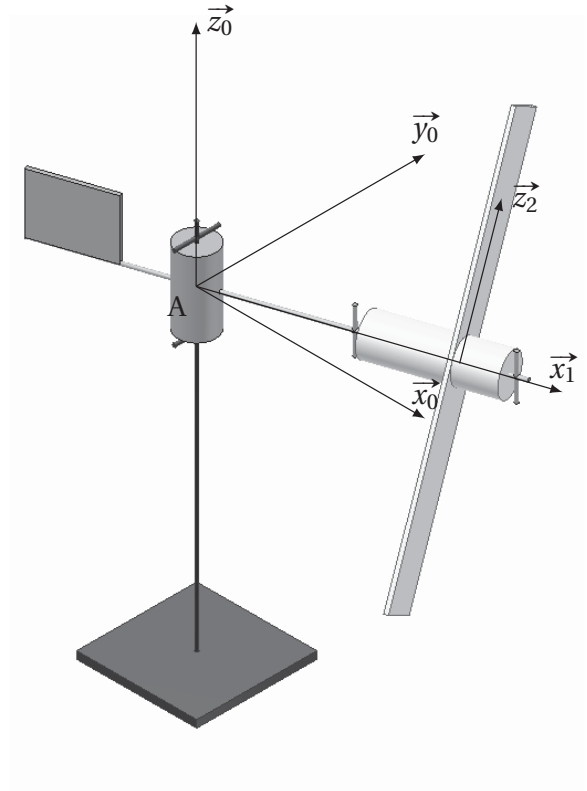


FIGURE 2.17 – Modèle d'éolienne

Q5. Déterminer $\overline{\sigma_{G_2, S_2/R_0}}$ le moment cinétique du solide 2 dans son mouvement par rapport au galiléen au point G_2 puis le torseur cinétique du solide S_1 dans son mouvement par rapport à R_0 .

Q6. Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble $\{S_1, S_2\}$ dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_0 .

Exercice 11 - Pompe à palettes - cinétique

Corrigé page 80

Soit, une pompe à palette simplifiée définie sur la figure 2.18. Le rotor 2 est en liaison pivot par rapport au corps 1 en O_2 , les palettes 3 coulissent librement dans le rotor et sont plaquées par effet centrifuge sur le corps. La variation de volume obtenue pendant la rotation permet d'aspirer de l'air (les orifices d'entrées/sorties ne sont pas représentés).

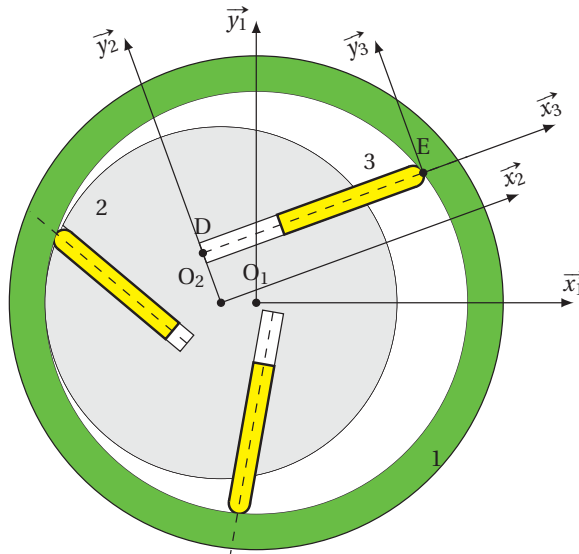


FIGURE 2.18 – Pompe à palettes

On pose :

- corps 1 : $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère associé au corps supposé galiléen, R le rayon intérieur du corps ;
- rotor 2 : $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, le repère associé au rotor, avec $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ et $\overline{O_1O_2} = -e \cdot \vec{x}_1$;
- palette 3 : de masse m_3 , avec $\overline{O_2D} = d \cdot \vec{y}_2$, $\overline{EG} = -\frac{l}{2} \cdot \vec{x}_2$ et $\overline{DE} = \lambda \cdot \vec{x}_2$, G le centre d'inertie et E le point de contact avec le corps supposé dans le plan de symétrie de la palette.

Q1. Déterminer les torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ en O_2 et $\{\mathcal{V}_{3/1}\}$ en E et G en fonction de λ et α et de leurs dérivées.

Q2. Poser les calculs permettant de déterminer λ en fonction de α et des paramètres géométriques.

On pose pour la matrice d'inertie du rotor $\overline{\mathcal{I}_{O_2}(2)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{O_2}$ et on modélise la palette par un solide

plan d'épaisseur négligeable, de hauteur h (suivant \vec{z}_2) et de longueur l (suivant \vec{x}_2).

Q3. Déterminer le torseur cinétique puis le torseur dynamique du rotor en O_2 .

Q4. Donner la matrice d'inertie de la palette (préciser le point et la base).

Q5. Déterminer le torseur cinétique $\{\mathcal{C}_{3/1}\}$ de la palette 3 dans son mouvement par rapport au corps 1 en G .

On suppose, pour la suite, la vitesse de rotation du rotor constante $\dot{\alpha} = \omega$.

Q6. Déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}_{3/1}\}$ de la palette 3 dans son mouvement par rapport au corps 1.