CHAPITRE 6

ANALYSE DES SYSTÈMES ASSERVIS

6.1 Caractérisation des systèmes asservis

6.1.1 Structure des systèmes asservis

Un système asservi linéaire peut se représenter par le schéma 6.1. On y retrouve, une chaîne d'action qui agit sur le système pour obtenir la sortie souhaitée en fonction de la consigne, une chaîne d'information qui prélève une image de la sortie, cette image est comparée à la consigne à atteindre.

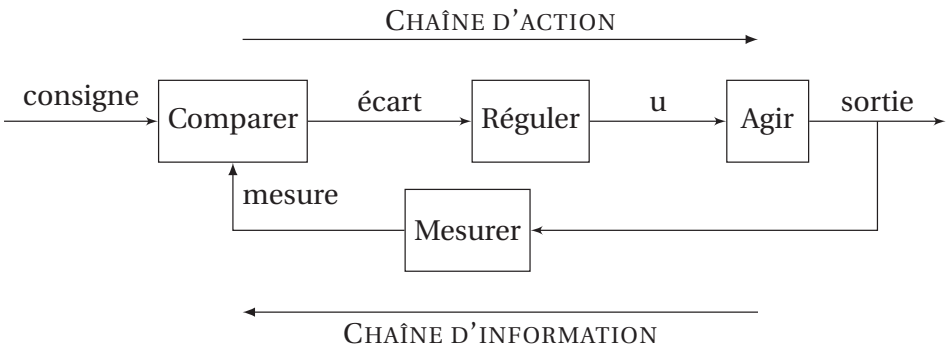


FIGURE 6.1 – Structure d'un système asservi

a) Caractéristiques attendues d'un système asservi

Précision La précision étant l'écart entre la consigne et la sortie du système, il semble évident que l'on souhaite que cet écart soit nul.

Dans le cas d'un asservissement de type régulation, on cherchera à avoir une erreur indicielle nulle (pour une entrée de type échelon) et si le système doit suivre une consigne évolutive (suivi de trajectoire), une erreur de traînage nulle.

Il faudra aussi vérifier que le système n'est pas sensible aux perturbations extérieures (l'ouverture de la porte d'un four doit être corrigée le plus rapidement possible).

Stabilité La stabilité est la qualité la plus importante que doive posséder le système asservi. Un système qui atteint sa position finale après de nombreuses oscillations est stable mais ne peut être considéré comme

un système correct. La stabilité n'est donc pas seulement une qualité binaire stable /non stable. La notion de dépassement, associée aux marges de stabilité, permet de caractériser cette stabilité relative.

Rapidité Comme pour la précision, on souhaite que le système soit le plus rapide possible. Souvent après avoir réglé la stabilité du système, avoir obtenu la précision souhaitée, il ne reste plus de possibilité de réglage de la rapidité sans modifier les paramètres précédents.

6.2 Stabilité

6.2.1 Position du problème et définitions

Une manière intuitive de préciser la notion de stabilité est d'imaginer un système que l'on écarte de sa position initiale par une impulsion et de regarder son évolution, s'il retrouve sa position initiale, il est stable, s'il s'en écarte, il est instable. Les petits schémas 6.2 précisent quelques comportements possibles d'un système. Un système à stabilité indifférente va s'écarter de sa position initiale pour trouver une autre position stable différente de la première, le système s'écarte mais ne diverge pas.

(a) stable (b) instable (c) indifférent (d) conditionnel

FIGURE 6.2 – Représentation de la stabilité

Un système réel instable oscille jusqu'à la destruction, ces oscillations sont dans le cas général limitées par les différentes saturations (limites des amplificateurs opérationnels, butées physiques,...). Ces limitations physiques peuvent laisser croire que la sortie du système est bornée.

Plusieurs définitions de la stabilité sont envisageables.

a) Définition 1

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

Remarque : cela revient à solliciter le système avec une entrée bornée (type échelon) et à vérifier que la sortie ne diverge pas.

b) Définition 2

Un système est stable si la réponse libre du système tend vers zéro à l'infini.

Remarque 1 : étudier la réponse libre d'un système, revient à étudier le système lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre et à analyser sa réponse. Un système stable a tendance à revenir dans sa position d'équilibre, un système qui ne revient pas dans sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas est dit juste instable.

Remarque 2 : pour étudier la réponse libre, il suffit de solliciter le système par une impulsion de Dirac et de vérifier que celui ci revient en position initiale.

Ces deux définitions sont équivalentes dans le cas de systèmes linéaires mais sont parfois mises en défaut.

c) Étude générale de la stabilité

Modèle d'étude Tout système linéaire (sans retard) peut se mettre sous la forme du schéma bloc ci-dessous.

$$\xrightarrow{\mathrm{E}(p)} \boxed{\mathrm{H}(p) = \frac{\mathrm{K}\cdot\mathrm{N}(p)}{p^{\alpha}\cdot\mathrm{D}(p)}} \xrightarrow{\mathrm{S}(p)}$$

Avec :

— K le gain $\mathrm{K} > 0$;

— $\mathrm{N}(p)$ et $\mathrm{D}(p)$ deux polynômes tel que :

  — $\mathrm{N}(0) = 1$ et $\mathrm{D}(0) = 1$;

  — $\mathrm{N}(p)$ de degré m, $\mathrm{N}(p) = 1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_m \cdot p^m$;

  — $\mathrm{D}(p)$ de degré n, $\mathrm{D}(p) = 1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \cdots + b_n \cdot p^n$;

— α la classe du système.

Pour un système physique, en vertu du principe de causalité (l'effet ne peut précéder la cause), le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur.

6.2.2 Étude de la stabilité

Afin d'étudier la stabilité du système, on se propose de déterminer l'allure de la réponse temporelle du système écarté de sa position initiale puis relâché.

Abandonner un système avec une condition initiale non nulle revient pour l'étude du comportement à considérer que le système a été soumis à l'instant $t = 0$ à une impulsion $e(t) = \mathrm{A}_0 \cdot \delta(t)$ avec $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac, si celui-ci revient dans sa position initiale, on considère alors que le système est stable.

On rappelle que la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est

$$\mathscr{L}(\delta(t)) = 1 \quad \text{d'où} \quad \mathscr{L}(e(t)) = \mathrm{A}_0$$

Nous avons $\mathrm{H}(p) = \dfrac{\mathrm{S}(p)}{\mathrm{E}(p)}$ d'où $\mathrm{S}(p) = \mathrm{H}(p) \cdot \mathrm{E}(p)$ finalement $\mathrm{S}(p) = \mathrm{A}_0 \cdot \mathrm{H}(p)$.

La réponse temporelle $s(t)$ se déduit de la transformée inverse de $\mathrm{S}(p)$:

$$s(t) = \mathscr{L}^{-1}\big(\mathrm{S}(p)\big) = \mathrm{A}_0 \cdot \mathscr{L}^{-1}\big(\mathrm{H}(p)\big).$$

Étudier la réponse temporelle d'un système linéaire soumis à une impulsions de Dirac revient donc à étudier la transformée inverse de la fonction de transfert du système :

$$\mathscr{L}^{-1}\big(\mathrm{H}(p)\big) = h(t) \cdot \mathscr{H}(t)$$

avec $\mathscr{H}(t)$ la fonction de Heaviside telle que $\begin{cases} t < 0 & \mathscr{H}(t) = 0 \\ t \geq 0 & \mathscr{H}(t) = 1 \end{cases}$.

Il reste donc à déterminer la transformée inverse de $\mathrm{H}(p)$, pour cela nous allons décomposer la fonction de transfert en éléments simples et rechercher les racines du dénominateur (les pôles).

$$\mathrm{H}(p) = \frac{\mathrm{K}\cdot\mathrm{N}(p)}{p^{\alpha}\cdot\mathrm{D}(p)} = \frac{\mathrm{K}\cdot\left(1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_m \cdot p^m\right)}{p^{\alpha}\cdot\left(1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \cdots + b_n \cdot p^n\right)}$$

Tout polynôme possède et / ou :

— des racines nulles ;

— des racines réelles, simples et / ou multiples ;

— des racines complexes, simple et / ou multiples.

Le polynôme du dénominateur peut donc se mettre sous la forme d'un produit de fonctions du premier et du second ordre :

$$\mathrm{H}(p) = \mathrm{K}' \cdot \frac{1}{p^{\alpha}} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_m \cdot p^m}{\prod_j (p - c_j)^{\alpha_j} \cdot \prod_l \left((p - a_l)^2 + b_l^2\right)^{\alpha_l} \cdot \prod_k \left(p^2 + b_l^2\right)^{\alpha_k}}$$

avec :

p^{α} :	racines nulles d'ordre α,
$\prod_j (p - c_j)^{\alpha_j}$:	racines réelles multiples d'ordre α_j,
$\prod_l \left((p - a_l)^2 + b_l^2\right)^{\alpha_l}$:	racines complexes multiples d'ordre α_l,
$\prod_k (p^2 + b_l^2)^{\alpha_k}$:	racines imaginaires pures multiples d'ordre α_k.

On suppose pour simplifier l'étude qui suit que toutes les racines sont simples, le cas des racines multiples sera examiné plus loin.

Si les racines sont simples ($\alpha = \alpha_j = \alpha_k = \alpha_l = 1$) alors

$$\mathrm{H}(p) = \mathrm{K}' \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_m \cdot p^m}{\prod_j (p - c_j) \cdot \prod_l \left((p - a_l)^2 + b_l^2\right) \cdot \prod_k \left(p^2 + b_l^2\right)}$$

et la décomposition en fractions simples s'écrit :

$$\mathrm{H}(p) = \sum_f \frac{\mathrm{C}_f}{p} + \sum_j \frac{\mathrm{C}_j}{p - c_j} + \sum_l \frac{\mathrm{A}_l \cdot p + \mathrm{B}_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2} + \sum_k \frac{\mathrm{A}_k \cdot p + \mathrm{B}_k}{p^2 + b_k^2}$$

on reconnaît :

$\sum_f \frac{\mathrm{C}_f}{p}$:	décomposition en fraction simple des racines nulles,
$\sum_j \frac{\mathrm{C}_j}{p - c_j}$:	décomposition en fraction simple des racines réelles,
$\sum_l \frac{\mathrm{A}_l \cdot p + \mathrm{B}_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2}$:	décomposition en fraction simple des racines complexes conjuguées,
$\sum_k \frac{\mathrm{A}_k \cdot p + \mathrm{B}_k}{p^2 + b_k^2}$:	décomposition en fraction simple des racines imaginaires pures.

La réponse temporelle est donc la somme des réponses temporelles. Le système sera instable si un des termes ne tend pas vers 0 en l'infini, il nous suffit donc d'étudier chacune des transformées inverses pour obtenir les conditions de stabilité du système.

Commençons par les racines réelles et complexes.

Racines réelles $\sum_j \frac{\mathrm{C}_j}{p - c_j}$: à partir du tableau des transformées inverses en annexe (page **??**) on déduit

$$\frac{\mathrm{C}_j}{p - c_j} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \mathrm{C}_j \cdot e^{c_j \cdot t}.$$

Le système est stable si la réponse temporelle tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. L'allure de la réponse temporelle ne dépend donc que du signe de c_j.

— $c_j > 0$, alors $\lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{c_j\cdot t}\right) = +\infty$, la sortie diverge, le système est instable ;

— $c_j < 0$, alors $\lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{c_j\cdot t}\right) = +0$, la sortie tend vers 0, cette racine ne rend pas le système instable.

Racine complexes $\sum\limits_l \dfrac{\mathrm{A}_l\cdot p+\mathrm{B}_l}{\left(p-a_l\right)^2+b_l^2}$: le tableau des transformées inverses ne donne pas directement la transformée de $\dfrac{\mathrm{A}_l\cdot p+\mathrm{B}_l}{\left(p-a_l\right)^2+b_l^2}$ mais, il est possible de la déduire à partir des deux formes suivantes :

— $\dfrac{b}{b^2+(p+a)^2} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} e^{-a.t}\cdot\sin b\cdot t$ et

— $\dfrac{p+a}{b^2+(p+a)^2} \xrightarrow{\mathrm{L}^{-1}} e^{-a.t}\cdot\cos bt$.

La transformée inverse est donc de la forme :

$$\frac{\mathrm{A}_l\cdot p+\mathrm{B}_l}{\left(p-a_l\right)^2+b_l^2} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \mathrm{K}_i\cdot e^{a_i\cdot t}\cdot\sin\left(b_i\cdot t+\varphi_i\right)$$

Le sinus est toujours borné, la stabilité du système ne dépend donc que du signe de a_i :

— $a_i > 0$, comme précédemment $\lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{a_i\cdot t}\right) = +\infty$, la sortie diverge, le système est instable

— $a_i < 0$, dans ce cas, $\lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{a_i\cdot t}\right) = 0$, la sortie tend vers 0, cette racine ne rend pas le système instable.

Remarque : nous n'avons traité que le cas des racines simples, une racine multiple ne modifie pas la condition de stabilité, la partie réelle doit être négative.

Il ne reste plus qu'à étudier le cas d'une racine nulle, et le cas d'une racine imaginaire pure mais nous allons ici prendre en compte le fait que la racine soit simple ou multiple.

Racine nulle simple $\dfrac{1}{p}$, 0 est racine du dénominateur. La transformée inverse est :

$$\frac{1}{p} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} 1\cdot u(t).$$

La sortie tend donc vers une constante non nulle. Le système ne revient pas à 0 mais ne s'écarte pas indéfiniment, il reste borné. On dit alors que le système est *juste instable*.

Remarque : Si on prend la première définition, c'est à dire que l'on soumet le système à une entrée en échelon, la sortie diverge (la sortie tend vers une droite – intégration d'une constante–).

Racine nulle double $\dfrac{1}{p^2}$, du tableau des transformée, on déduit

$$\frac{1}{p^2} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} t.$$

On constate que la sortie diverge lorsque t croît. Le système est donc instable.

Racine imaginaire pure simple $\dfrac{\mathrm{A}_k}{p^2+\omega_k^2}$, on a alors $p_k = \pm j\cdot\omega_k$ qui est racine du dénominateur.

Du tableau des transformées on déduit :

$$\frac{1}{p^2+\omega^2} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{\omega}\sin\omega\cdot t.$$

La sortie est constamment sinusoïdale, elle ne tend pas vers 0 mais elle reste bornée. On dit alors que le système est *juste instable*.

Racine imaginaire pure double $\dfrac{A_k}{(p^2+\omega_k^2)^2}$ le tableau donne

$$\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \xrightarrow{\mathscr{L}L^{-1}} \frac{1}{2\cdot\omega^2}\left(\sin\omega\cdot t-\omega\cdot t\cdot\cos\omega\cdot t\right).$$

Le second terme tend vers l'infini, le système est donc instable.

a) Conclusion

— Si les parties réelles des racines complexes sont toutes négatives et si toutes les racines réelles sont négatives, alors la réponse transitoire du système est composée d'exponentielles amorties et décroissantes, la réponse tend vers zéro pour t tendant vers l'infini, le système revient à sa position d'équilibre, le système est stable ;

— Si un des pôles réels est positif, le système est instable. Le système est de type divergent exponentiel ;

— Si un des pôles complexes est à partie réelle positive, le système est instable. Le système est de type oscillatoire divergent ;

— Si 0 ou $\pm j\omega$ est racine simple, le système est juste instable ;

— Si 0 ou $\pm j\omega$ est racine multiple, le système est instable.

6.2.3 Condition de stabilité

Énoncé (condition de stabilité) *Un système est stable si, et seulement si, la fonction de transfert en boucle fermée n'a pas de pôle à partie réelle positive ou nulle.*

Remarque : on appelle *pôles* de la fonction de transfert les racines du dénominateur.

6.2.4 Position des pôles

La position des pôles dans le plan complexe de la fonction de transfert en boucle fermée nous renseigne sur la stabilité de la fonction de transfert (fig 6.3). Il suffit donc d'étudier les racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée pour savoir si le système est stable ou instable. Mais si on sait résoudre des polynômes de degré 1, 2, 3 voire 4, on ne sait pas déterminer de manière systématique les racines d'un polynôme de degré supérieur nous verrons plus loin qu'il existe des outils qui à défaut de nous donner les racines nous indiquent le signe de celles-ci.

6.2.5 Critères de stabilité

La connaissance des racines permet de déduire si le système est stable, mais il n'est pas possible de déterminer analytiquement les racines d'un polynôme de degré élevé. Les critères ci-dessous nous permettent de déterminer le signe des racines sans avoir besoin de déterminer les racines. On distingue les critères algébriques et les critères graphiques.

a) Équation caractéristique

Pour une fonction de transfert en boucle fermée s'écrivant,

$$\mathrm{BF}(p)=\frac{\mathrm{N}(p)}{\mathrm{D}(p)}=\frac{a_m\cdot p^m+a_{m-1}\cdot p^{m-1}+..+a_1\cdot p^1+a_0}{b_n\cdot p^n+b_{n-1}\cdot p^{n-1}+\cdots+b_1\cdot p^1+b_0},$$

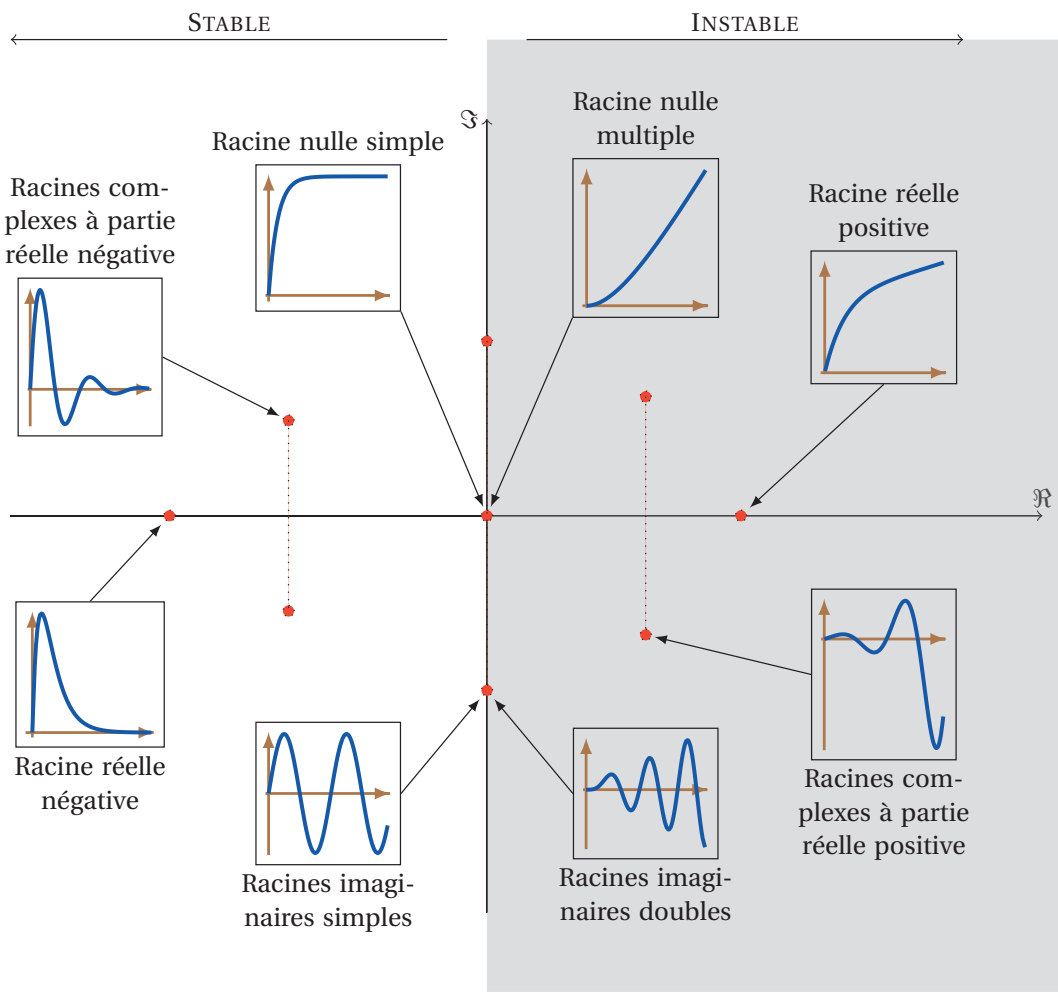


FIGURE 6.3 – Positions des pôles et stabilité et réponse à une impulsion de Dirac

on appelle équation caractéristique :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(p) &= 0 \\ b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot p^1 + b_0 &= 0. \end{aligned}$$

b) Condition nécessaire

Énoncé (Condition nécessaire de stabilité) *Pour que le système soit stable, il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique soient du même signe que b_n.*

c) Systèmes du 1er et du 2nd ordre

Pour les systèmes du premier et du second ordre, la condition nécessaire est une condition suffisante.

premier ordre : Soit $H_1(p) = \dfrac{K}{1+\tau\cdot p}$, pour que le système soit stable, il suffit que $\tau > 0$.

second ordre :

$z > 1$ **:** Soit $H_2(p) = \dfrac{K}{(1+\tau_1\cdot p)\cdot(1+\tau_2\cdot p)}$, pour que le système soit stable, il suffit que $\tau_1 > 0$ et $\tau_2 > 0$.

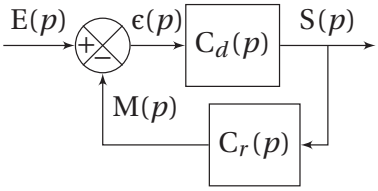
$z = 1$ **:** $H_2(p) = \dfrac{K}{(1+\tau\cdot p)^2}$, il suffit que $\tau > 0$

$0 < z < 1$ **:** $H(p) = \dfrac{K}{(p-r_1)\cdot(p-r_2)}$ avec $r_1 = a+i\cdot b$ et $r_2 = a-i\cdot b$, le système est stable si $a < 0$. La fonction de transfert s'écrit donc : $H(p) = \dfrac{K}{a^2+b^2-2\cdot a\cdot p+b^2\cdot p^2}$. Tous les coefficients sont positifs

d) Critère graphique du revers

Les critères graphiques permettent d'étudier la stabilité d'un système à partir de la représentation graphique de la fonction de transfert en boucle ouverte. Cette étude peut être conduite à partir des diagrammes de Bode, ou de la représentation dans le plan complexe de la fonction de transfert.

Soit $H(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée du système décrit par le schéma bloc ci-dessous, avec $BO(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte.



$$BF(p) = \frac{C_d(p)}{1+C_d(p)\cdot C_r(p)} = \frac{C_d(p)}{1+BO(p)}$$

Nous savons que l'étude de la stabilité se résume à la recherche du signe des racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée.

$$D(p) = 0$$
$$1+BO(p) = 0$$

cette condition peut aussi écrire sous la forme

$$BO(p) = -1$$

Étudier $BO(p) = -1$ revient à étudier le lieu (le tracé de la fonction de transfert) de la fonction $BO(p)$ par rapport au point $(-1,0)$ du plan complexe. Le point $(-1,0)$ est appelé *point critique*. La position de ce tracé par rapport au point critique nous renseigne sur la stabilité du système.

L'étude peut aussi bien être réalisé dans le plan complexe que sur les diagrammes de de Bode.

Énoncé (Critère du revers dans le plan complexe) *Un système asservi linéaire est stable si, en parcourant dans le sens des pulsations croissantes le lieu de transfert dans le plan complexe de la FTBO on laisse le point critique* $(-1,0)$ *sur la gauche (figure 6.4). Il est instable dans le cas contraire.*

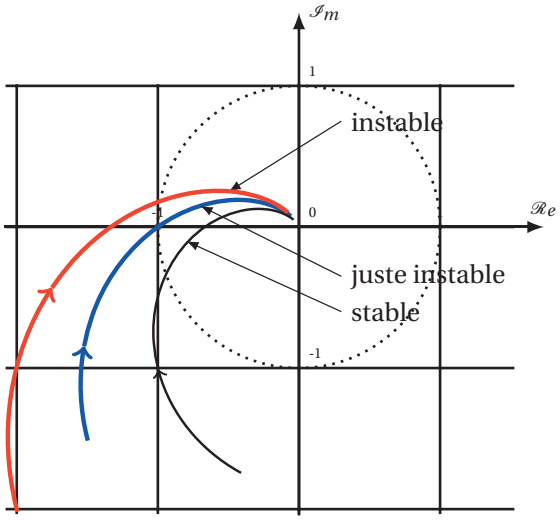


FIGURE 6.4 – Critère du revers dans le plan complexe (critère dans le plan de Nyquist)

Remarque : ce critère dit *critère du revers dans le plan de Nyquist* n'est plus explicitement au programme, je ne l'utilise ici, que pour poser la problématique graphique

Ce critère initialement défini dans le plan complexe peut être transposé dans le plan de Bode (diagrammes de Bode). en considérant que le point critique $(-1,0)$ du plan complexe devient dans le plan de Bode le point de coordonnées $(0\,\text{dB}, -180°)$.

Ce point est représenté :

— sur le diagramme d'amplitude par l'axe des abscisses $A_{dB} = 0\,\text{dB}$,

— sur le diagramme de phase par la droite d'ordonnée $\phi = -180°$.

Énoncé (Critère du revers dans le plan de Bode) *Un système asservi est stable si, pour la pulsation* ω_{C0} *définie par* $|H(J \cdot \omega_{C0})| = 1$ *(soit 0dB), le déphasage est supérieur à* $-180°$ *(figure 6.5) .*

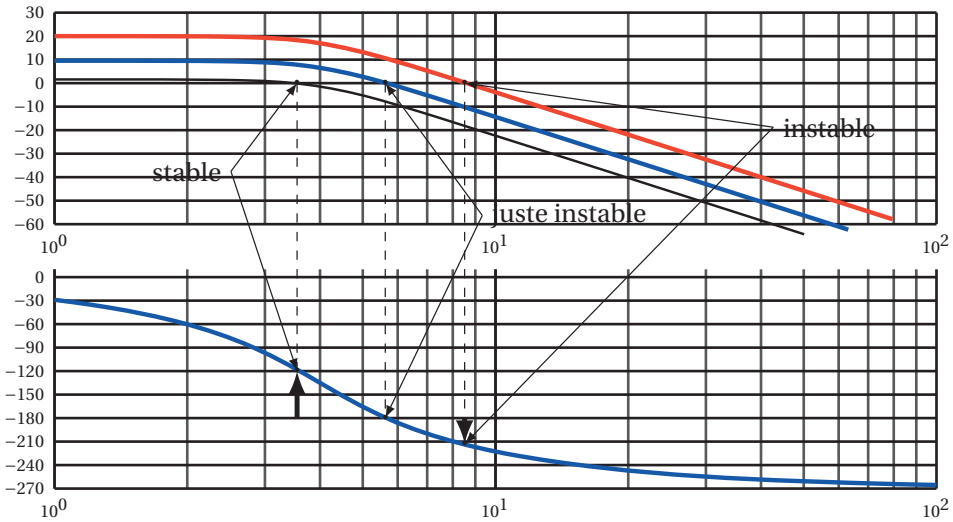


FIGURE 6.5 – Critère du revers à partir des diagrammes de Bode

Remarque : L'utilisation du critère de revers dans le plan de Bode est à manipuler avec précaution, en effet, contrairement à son application dans le plan de Black et de Nyquist où l'on a une vision globale du lieu de trans-

fert, sur les diagrammes de Bode, le tracé est décomposé sur deux graphes et il est obligatoire de s'intéresser aux deux pour évaluer la stabilité.

Les limites du critère du revers Le critère du revers ne peut s'appliquer avec certitude que sur des fonctions de transfert régulières en boucle ouverte, c'est à dire ne possédant pas de pôle ou de zéro à partir réelle positive. Ainsi pour le système dont la FTBO s'écrit :

$$\mathrm{BO}(p) = \frac{10}{(1+2\cdot p)\cdot(1-0{,}1\cdot p)\cdot(1+\frac{p}{3})\cdot(1+10\cdot p)}$$

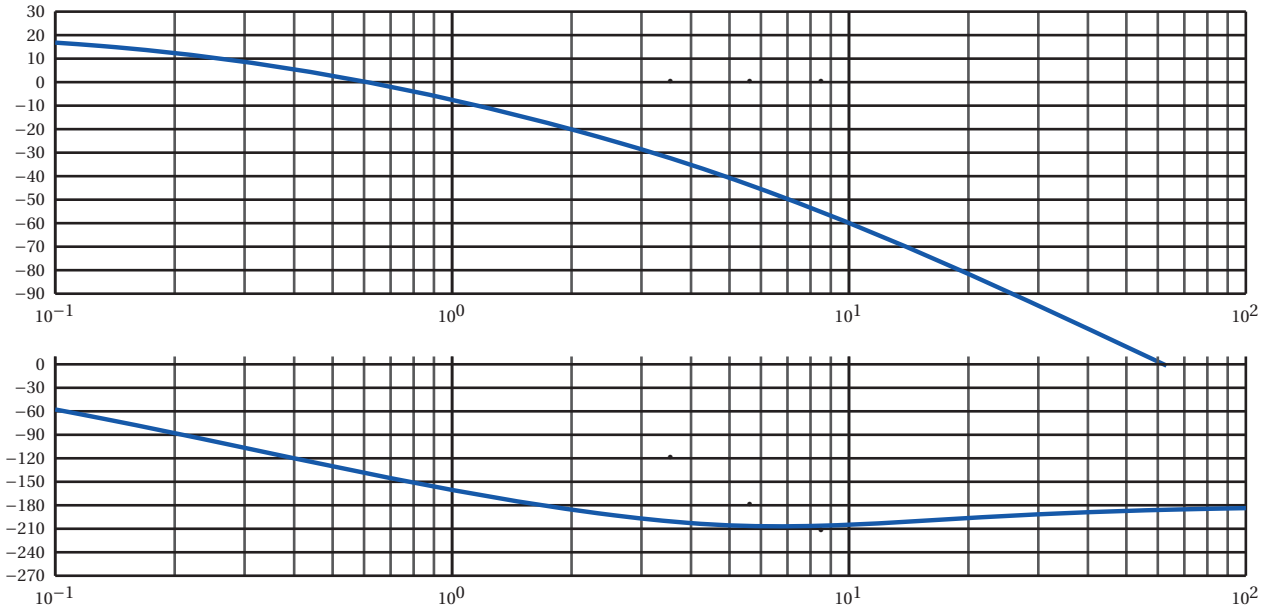


FIGURE 6.6 – les limites du critère du revers

Le tracé des diagrammes de Bode de la FTBO figure 6.6) semble indiquer que la FTBF est stable, mais le simple calcul des coefficients de la FTBF montre que le système est instable (coefficients négatifs et positifs, la condition nécessaire n'est pas remplie).

$$\mathrm{BF}(p) = \frac{\mathrm{BO}(p)}{1+\mathrm{BO}(p)} = -\frac{300}{-330-683\cdot p-35\cdot p^2-128\cdot p^3+20\cdot p^4}$$

Le critère du revers est la version limitée aux fonctions de transfert régulières d'un critère graphique plus complet, le critère de Nyquist.

6.2.6 Marges de stabilité

Les critères ci-dessus sont des critères de stabilité absolue, ils permettent de répondre à la question binaire : le système est-il stable ou instable ?

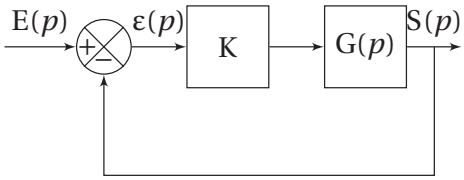
La réponse à cette question ne permet pas de régler et d'optimiser le fonctionnement d'un système. Il est nécessaire, pour cela, d'identifier un ou plusieurs paramètres qui permettent de régler le système asservi afin d'avoir le comportement souhaité en terme d'oscillations de la réponse temporelle.

a) Influence de la position de la FTBO par rapport au point critique

On se propose d'évaluer l'influence de la distance entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique sur le comportement temporel du système asservi.

Soit le système décrit par le schéma bloc ci-contre avec

$$G(p) = \frac{1}{p \cdot (1 + 2 \cdot p + 0,5 \cdot p^2)}.$$



Les figures 6.7 page suivante représentent le diagramme de Black de $BO(p) = K \cdot G(p)$ et la réponse temporelle de la sortie pour une entrée en échelon unitaire pour différentes valeurs du gain K.

courbe n°1 : K = 3, le lieu de Black est proche du point critique, la réponse temporelle est très oscillante ;

courbe n°2 : K = 1 ;

courbe n°3 : K = 0,15, le lieu de Black est éloigné du point critique, la réponse temporelle n'est pas oscillante.

Les réponses temporelles sont caractéristiques d'un système stable mais on constate que le comportement temporel est d'autant plus oscillant que le tracé du lieu de Black est proche du point critique (−180°, 0 dB).

Il est donc possible, à partir de la représentation fréquentielle, de prévoir l'allure de la réponse temporelle et d'ajuster le système pour avoir un comportement correct, il suffit pour cela de régler une « distance » minimale entre le point critique et le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Cette distance est appréciée par les deux marges de stabilité : la *marge de gain* M_G et la *marge de phase* M_P. Les valeurs usuelles de réglage des marges de gain et de phase sont :

Marge de Gain M_G de 10 dB à 15 dB ;

Marge de Phase M_P de 40° à de 50°.

Ces marges peuvent être évaluées et mesurées aussi bien sur les diagrammes de Bode, de Black que de Nyquist.

b) Marges de stabilité sur les diagrammes de Bode

On note, :

— ω_{180} , la pulsation telle que $\arg\left(BO(j\omega_{180})\right) = -180°$;

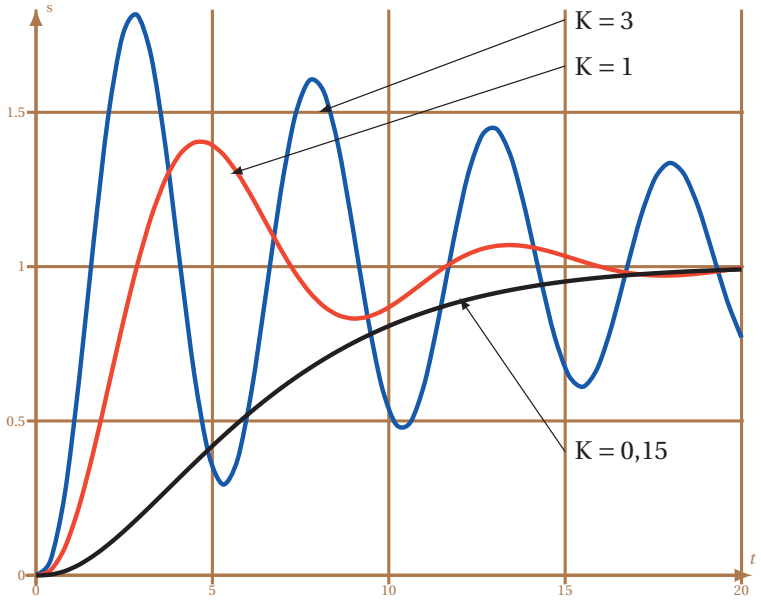
— ω_{0dB}, la pulsation telle que $20\log\left(\left|BO(j\omega_{0dB})\right|\right) = 0\text{dB}$

Marge de Gain La marge de gain est mesurée sur le diagramme d'amplitude (figure 6.8), entre la courbe de gain de la FTBO et l'axe des abscisses pour la pulsation ω_{180}. Le sens positif est compté de la courbe vers l'axe des abscisses.

$$M_G = -20 \cdot \log\left(\|BO(j \cdot \omega)\|\right)$$

Marge de Phase La marge de phase est mesurée sur le diagramme de Phase entre l'ordonnée −180° et la courbe de phase de la FTBO pour la pulsation ω_{0dB}. le sens positif est compté de l'ordonnée −180° à la courbe.

$$M_P = \arg\left(BO(j\omega_{0dB})\right) - (-180°)$$



(a) réponse temporelle

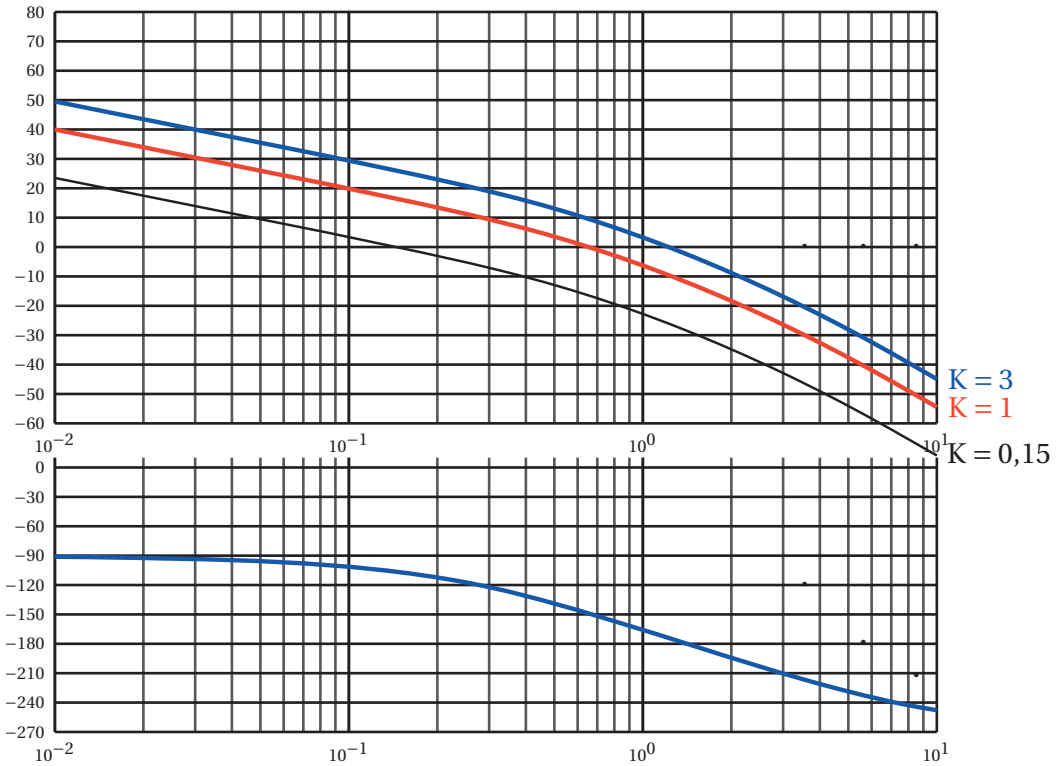


FIGURE 6.7 – Distance par rapport au point critique et comportement temporel

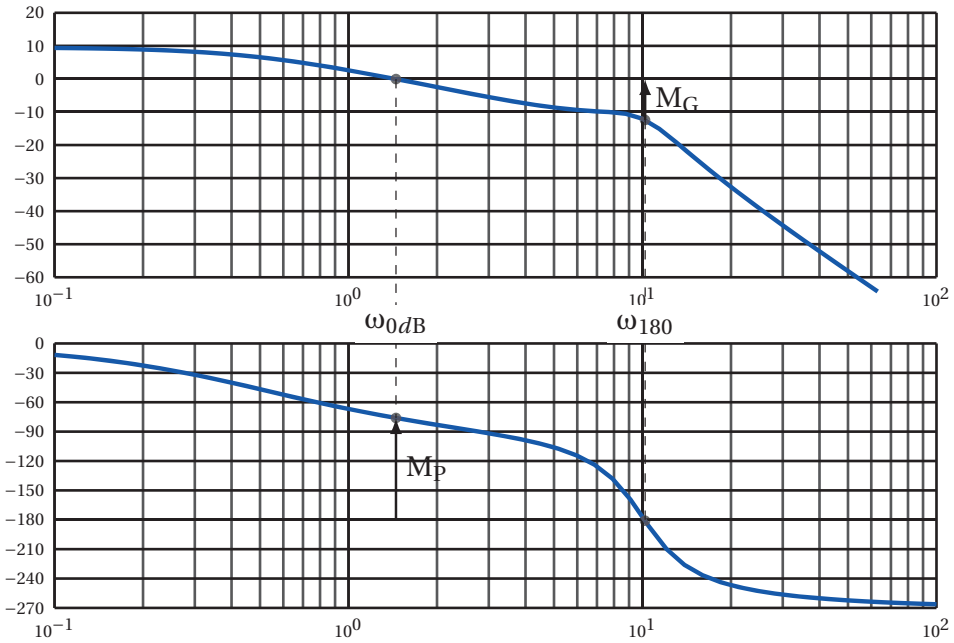


FIGURE 6.8 – Marges de Stabilité sur les diagrammes de Bode

6.3 Précision

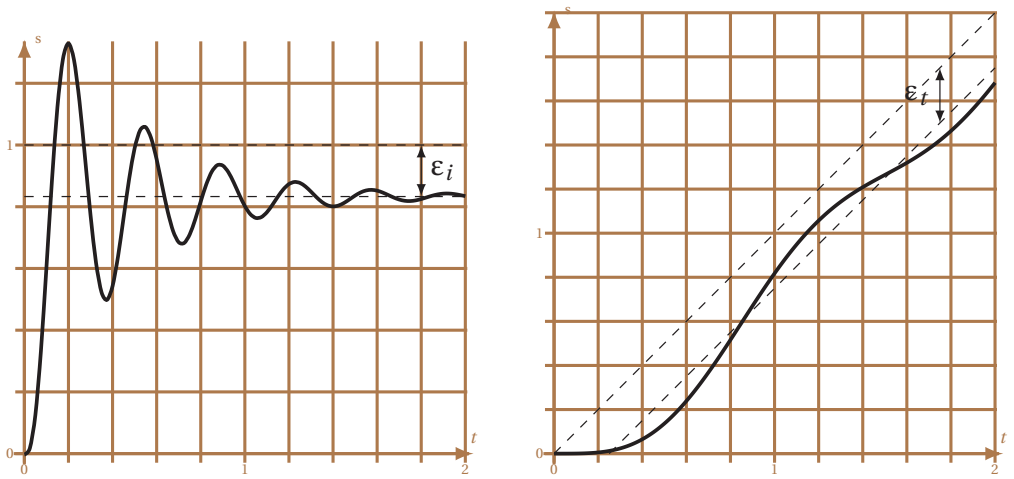
6.3.1 Position du problème

La précision est une caractéristique prépondérante d'un système asservi ou d'une régulation. La précision est évaluée aussi bien vis à vis de l'entrée de consigne que vis à vis des perturbations. Un système doit être précis vis à vis de l'entrée mais insensible aux perturbations, elles ne doivent pas dégrader la réponse finale. On distingue :

L'erreur statique : c'est l'erreur en régime permanent entre la sortie et la loi d'entrée. Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées canoniques :

- Échelon, on parle alors d'*erreur indicielle* (figure 6.9a),
- Rampe, *erreur de traînage* ou erreur de poursuite (figure 6.9b),
- Accélération, erreur en accélération.

L'erreur dynamique : c'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation (hors du programme).



(a) erreur indicielle (b) erreur de traînage

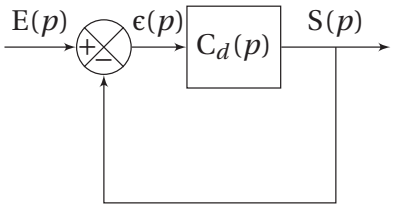
FIGURE 6.9 – Erreur statique

6.3.2 Données

La précision est évaluée par l'écart $\varepsilon(t)$ mesuré pour un système à retour unitaire entre $e(t)$ et $s(t)$. Dans le cas d'un système à retour non unitaire il se mesure entre $e(t)$ et $m(t)$, avec $m(t)$ la mesure de $s(t)$.

Déterminons dans les deux cas l'erreur $\varepsilon(t)$ (pour une perturbation nulle).

a) Cas du retour unitaire

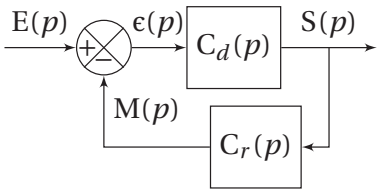


$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$
$$\varepsilon(p) = E(p) - C_d(p) \cdot \varepsilon(p)$$
$$\varepsilon(p) = \left(\frac{1}{1 + C_d(p)}\right) E(p)$$

avec ici :

$$BO(p) = C_d(p)$$

b) Cas du retour non unitaire



$$\varepsilon(p) = \mathrm{E}(p) - \mathrm{M}(p)$$
$$\varepsilon(p) = \mathrm{E}(p) - \mathrm{C}_d(p) \cdot \mathrm{C}_r(p) \cdot \varepsilon(p)$$
$$\varepsilon(p) = \left(\frac{1}{1 + \mathrm{C}_d(p) \cdot \mathrm{C}_r(p)}\right)\mathrm{E}(p)$$

avec ici :

$$\mathrm{BO}(p) = \mathrm{C}_d(p) \cdot \mathrm{C}_r(p)$$

soit finalement dans les deux cas :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \mathrm{BO}(p)}\mathrm{E}(p)$$

L'erreur dépend de la FTBO et de la nature de l'entrée.

Pour la suite, nous ne traiterons que le cas de système à retour unitaire, l'étude étant identique pour les systèmes à retour non unitaire.

Nous nous placerons dans le cas général pour lequel la FTBO peut être mise sous la forme :

$$\mathrm{BO}(p) = \frac{\mathrm{K} \cdot \mathrm{N}(p)}{p^{\alpha} \cdot \mathrm{D}(p)}$$

avec

- $\mathrm{K} > 0$: le gain,
- $\mathrm{N}(p)$: un polynôme de degré n tel que $\mathrm{N}(0) = 1$,
- $\mathrm{D}(p)$: un polynôme de degré m tel que $\mathrm{D}(0) = 1$,
- $\alpha \geq 0$: la classe du système.

Remarque : Pour un système physique le degré du dénominateur $m + \alpha$ est supérieur au degré du numérateur n.

6.3.3 Erreur en régime permanent - erreur statique

a) Définition

L'écart en régime permanent est la limite quand t tend vers l'infini de l'écart entre $e(t)$ et $s(t)$:

$$\varepsilon_s = \lim_{t \to \infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{t \to \infty} (\varepsilon(t))$$

Un système sera précis si cet écart tend vers 0.

b) Calculs préalables

Le théorème de la valeur finale permet d'écrire :

$$\lim_{t \to \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \to 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

Remarque importante : ce théorème ne peut-être utilisé que si la sortie converge, c'est à dire si le système est stable. Nous supposerons donc pour la suite que le système est stable.

Ici on peut donc écrire pour l'écart :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+\mathrm{BO}(p)}\mathrm{E}(p) = \frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{K}\cdot\mathrm{N}(p)}{p^{\alpha}\cdot\mathrm{D}(p)}}\mathrm{E}(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{p^{\alpha}\cdot\mathrm{D}(p)}{p^{\alpha}\cdot\mathrm{D}(p)+\mathrm{K}\cdot\mathrm{N}(p)}\mathrm{E}(p)$$

d'où pour l'erreur statique

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0}(p\cdot\varepsilon(p)) = \lim_{p\to 0}\left(p\frac{p^{\alpha}\cdot\mathrm{D}(p)}{p^{\alpha}\cdot\mathrm{D}(p)+\mathrm{K}\cdot\mathrm{N}(p)}\mathrm{E}(p)\right)$$

finalement en se rappelant que : $\mathrm{N}(0) = 1$ et $\mathrm{D}(0) = 1$

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha}+\mathrm{K}}\mathrm{E}(p)\right)$$

En conclusion, l'erreur statique dépend de la nature de l'entrée $\mathrm{E}(p)$ et de la classe α de la fonction de transfert en boucle ouverte et du gain K de la FTBO.

c) Erreur indicielle - réponse à un échelon

On nomme erreur indicielle ε_i, l'erreur statique relative à une entrée en échelon $e(t) = \mathrm{E}_0\cdot u(t)$ avec $u(t)$ la fonction de Heaviside.

Le système étant stable (par hypothèse) on peut écrire

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0} p\cdot\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha}+\mathrm{K}}\mathrm{E}(p)\right)$$

avec $e(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathrm{E}(p) = \dfrac{\mathrm{E}_0}{p}$

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha}+\mathrm{K}}\frac{\mathrm{E}_0}{p}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha}}{p^{\alpha}+\mathrm{K}}\mathrm{E}_0\right)$$

On peut considérer deux cas en fonction de la classe du système.

Système de classe 0 ($\alpha = 0$) **:** la FTBO ne comporte pas d'intégration

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{0}}{p^{0}+\mathrm{K}}\mathrm{E}_0\right) = \frac{1}{1+\mathrm{K}}\mathrm{E}_0$$

L'erreur est non nulle et dépend du gain K de la FTBO, elle est d'autant plus petite que le gain est important.

Système de classe > 0 ($\alpha > 0$) **:** la FTBO comporte au moins une intégration dans la boucle

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha}}{p^{\alpha}+\mathrm{K}}\mathrm{E}_0\right) = 0$$

L'erreur est donc nulle à l'infini quelque soit le gain K de la FTBO.

Remarque : par abus de langage on appelle souvent erreur statique, l'erreur indicielle.

d) Erreur de traînage - réponse à une rampe

L'erreur de traînage (aussi nommée erreur de poursuite) ε_t, est l'erreur mesurée entre une entrée de type rampe $e(t) = A_0 \cdot t \cdot u(t)$ et la sortie.

Comme précédemment

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha}+K}E(p)\right)$$

avec $e(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} E(p) = \dfrac{A_0}{p^2}$

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha}+K}\frac{A_0}{p^2}\right) = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}+K}\right)$$

l'erreur de traînage dépend comme l'erreur indicielle du gain K et de la classe du système. Nous pouvons distinguer trois cas.

Système de classe 0 ($\alpha = 0$) **:** la FTBO ne comporte pas d'intégration.

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^{-1}}{p^{0}+K}\right) = +\infty$$

L'écart tend vers $+\infty$, la réponse temporelle de la sortie s'écarte de la consigne en rampe.

Système de classe 1 ($\alpha = 1$) **:** la FTBO comporte une intégration

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^{0}}{p^{1}+K}\right) = \frac{A_0}{K}$$

L'erreur est constante, la sortie est parallèle à l'entrée, décalée de ε_t.

Système de classe > 1 ($\alpha > 1$) **:** la FTBO comporte au moins deux intégrations.

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}+K}\right) = 0$$

L'erreur de traînage est nulle, la sortie rattrape l'entrée lorsque $t \to +\infty$.

e) Erreur en accélération - Réponse à une consigne parabolique

On se propose maintenant de déterminer l'erreur en accélération, ε_a, correspondant à une entrée de type parabolique $e(t) = A_O \cdot t^2 \cdot u(t)$.

Comme dans les études précédentes avec $e(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} E(p) = \dfrac{2 \cdot A_0}{p^3}$

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha}+K}\frac{A_0}{2\cdot p^3}\right) = \lim_{p\to 0}\left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^{\alpha}+K}\right)$$

En fonction de α on obtient :

Système de classe < 2 ($0 < \alpha < 2$)

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0}\left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^{\alpha}+K}\right) = +\infty$$

Système de classe 2 ($\alpha = 2$)

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} \left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^0}{p^2 + K} \right) = \frac{2 \cdot A_0}{K}$$

Système de classe > 2 ($\alpha > 2$)

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} \left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^{\alpha} + K} \right) = 0$$

f) Tableau récapitulatif

Le tableau de la présente page récapitule les différentes erreurs et l'allure des réponses temporelles correspondantes.

Il ne faut pas déduire rapidement du tableau 6.1 qu'il suffit de corriger le système en rajoutant une intégration pour que le système soit précis, en effet chaque intégration ajoute aussi un déphasage de $-90°$, le système risque donc de devenir instable. Ce tableau n'a de sens que si le système est stable !

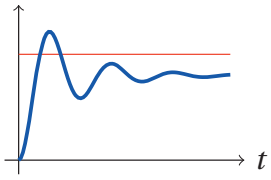
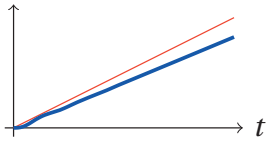
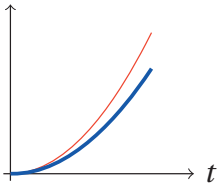
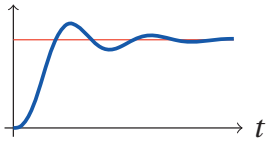
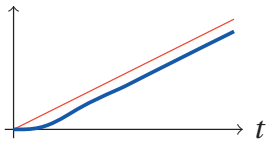
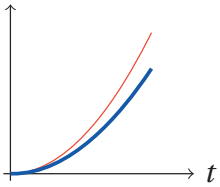
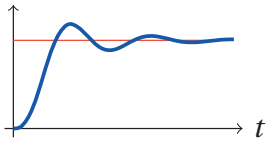
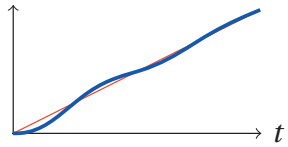
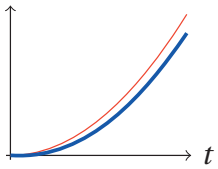
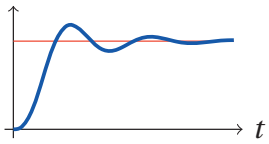
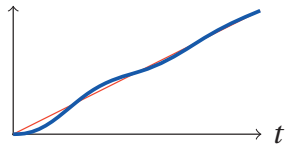
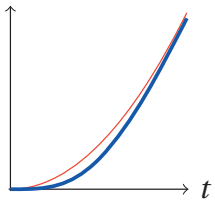
Classe	Échelon	Rampe	Accélération
$\alpha = 0$	$\varepsilon_i = \frac{E_O}{1+K}$ 	$\varepsilon_t = +\infty$ 	$\varepsilon_a = +\infty$ 
$\alpha = 1$	$\varepsilon_i = 0$ 	$\varepsilon_t = \frac{A_O}{K}$ 	$\varepsilon_a = +\infty$ 
$\alpha = 2$	$\varepsilon_i = 0$ 	$\varepsilon_t = 0$ 	$\varepsilon_a = \frac{2 \cdot A_O}{K}$ 
$\alpha > 2$	$\varepsilon_i = 0$ 	$\varepsilon_t = 0$ 	$\varepsilon_a = 0$ 

TABLE 6.1 – Tableau récapitulatif : influence de la classe sur l'erreur statique

6.3.4 Effet d'une perturbation sur la précision

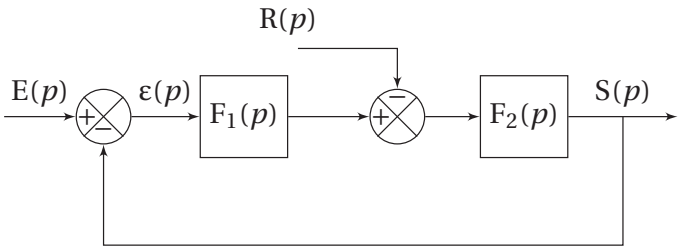
a) Présentation du problème

On se propose d'étudier l'effet d'une perturbation sur la précision d'un système et l'influence de la forme de la fonction de transfert sur l'impact de cette perturbation.

À partir du modèle d'étude décrit par le schéma blocs et les fonctions de transfert suivants :

$F_1(p) = \dfrac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}$ et $F_2(p) = \dfrac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}$

avec $N_1(0) = D_1(0) = 1$, $N_2(0) = D_2(0) = 1$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$.



Déterminons l'écart $\epsilon(t)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - F_2(p) \cdot \big(F_1(p) \cdot \varepsilon(p)) - R(p)\big)$$
$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot E(p) - \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot R(p)$$

L'erreur due à la perturbation s'ajoute à celle relative à l'entrée (résultat général que l'on retrouve par le théorème de superposition appliqué aux systèmes linéaires).

Nous limiterons notre étude au cas d'une perturbation constante, les autres types de perturbations se traitant de la même manière.

b) Perturbation constante

À partir du théorème de superposition, on sait que la réponse obtenue pour une système linéaire à deux entrées est la somme des sorties de chaque entrée prise isolément.

Pour étudier l'effet de la perturbation seule, il suffit de poser $e(t) = 0$. On en déduit l'écart relatif à la perturbation :

$$\varepsilon_p(p) = -\frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot R(p)$$

On choisit d'étudier le comportement pour une perturbation constante

$$r(t) = R_0 \cdot u(t)$$

soit dans le domaine de Laplace

$$R(p) = \frac{R_0}{p}.$$

L'erreur relative à la perturbation s'écrit donc :

$$\varepsilon_p(p) = -\frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot \frac{R_0}{p}$$

en remplaçant $F_1(p)$ et $F_2(p)$:

$$\varepsilon_p(p) = -\frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)} \cdot \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}} \cdot \frac{R_0}{p}$$

$$\varepsilon_p(p) = -\frac{K_2 \cdot N_2(p) \cdot p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p) \cdot p^{\alpha_2} \cdot D_2(p) + K_1 \cdot N_1(p) \cdot K_2 \cdot N_2(p)} \cdot \frac{R_0}{p}$$

Nous supposons comme dans l'étude précédente que le système est stable, il est donc possible d'utiliser le théorème de la valeur finale pour déterminer l'écart statique dépendant de la perturbation.

$$\varepsilon_p = \lim_{t \to \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \to 0} (p \cdot \varepsilon_p(p))$$

avec $N_i(0) = D_i(0) = 1$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(-p \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \cdot \frac{R_0}{p} \right)$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right)$$

On constate que l'erreur relative à la perturbation dépend principalement de la classe de la fonction de transfert en amont de la perturbation α_1 .

On distingue deux cas :

$\alpha_1 = 0$ **:** La fonction de transfert $F_1(p)$ en amont de la perturbation ne possède pas d'intégration.

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right)$$

— si $\alpha_2 = 0$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^0 + K_1 \cdot K_2} \right) = -\frac{R_0 \cdot K_2}{1 + K_1 \cdot K_2}$$

— si $\alpha_2 > 0$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right) = -\frac{R_0}{K_1}$$

L'erreur statique relative à la perturbation est non nulle dans les deux cas.

$\alpha_1 > 0$ **:** La fonction de transfert $F_1(p)$ en amont de la perturbation possède au moins une intégration.

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right) = 0$$

l'erreur statique relative à la perturbation est nulle à l'infini.

En conclusion : pour que l'erreur permanente ne dépende pas de la perturbation, il faut au moins une intégration en amont de la perturbation.

6.4 Rapidité

6.4.1 Temps de réponse - temps de montée

Temps de réponse : c'est le temps mis pour que la sortie atteigne la valeur finale à 5 % près ;

Temps de montée : c'est le temps mis par la sortie pour passer de 5 % à 95 % de la valeur finale .

Évaluer la rapidité d'un système revient en général à déterminer le temps de réponse à 5 % ($T_{5\%}$) pour une entrée de type échelon. Si on sait évaluer cette quantité pour les systèmes du premier ordre ($T_{5\%} = 3\tau$) et du second ordre (Cf. abaque en annexe), pour des systèmes d'un ordre supérieur, il n'existe pas de relation directement applicable.

Le temps de montée peut lui aussi permettre d'évaluer la rapidité du système mais cette mesure ne prend pas en compte les oscillations de la réponse (figure 6.10). On remarque, que des systèmes ayant un temps de réponse analogue peuvent avoir des temps de montée notablement différents.

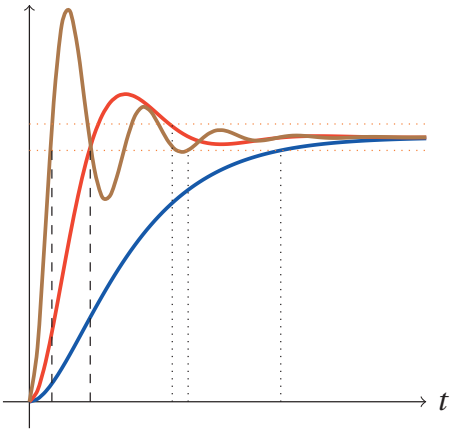


FIGURE 6.10 – Temps de réponse et temps de montée

6.4.2 Temps de montée et bande passante

Un système asservi se comporte comme un filtre passe-bas, c'est à dire un système linéaire qui ne « laisse passer » que les basses fréquences, les hautes fréquences sont fortement atténuées.

On caractérise les filtres par la bande passante à −3dB.

On se propose de montrer que la bande passante et le temps de montée sont corrélés, plus la bande passante de la FTBF est importante, plus le temps de montée est faible.

Cette relation est déjà connue pour les systèmes du premier ordre, en effet, pour un système en boucle fermée dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

alors on sait que :

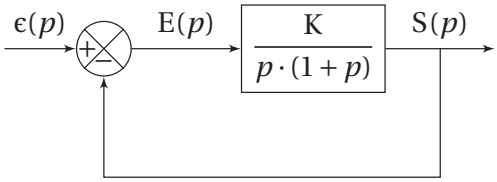
— le temps de réponse à 5 % est : $T_{5\%} = 3 \cdot \tau$

— la bande passante à −3 dB est : $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$

On constate bien, que plus la bande passante augmente, plus le temps de réponse diminue.

Dans les autres cas, les calculs sont plus complexes, nous nous limiterons donc à montrer sans démonstration que pour un système du second ordre, la relation entre la bande passante et le temps de montée est de même nature.

Pour l'évaluer, nous allons étudier le cas du système du second ordre à retour unitaire ci-dessous.



La FTBF s'écrit :

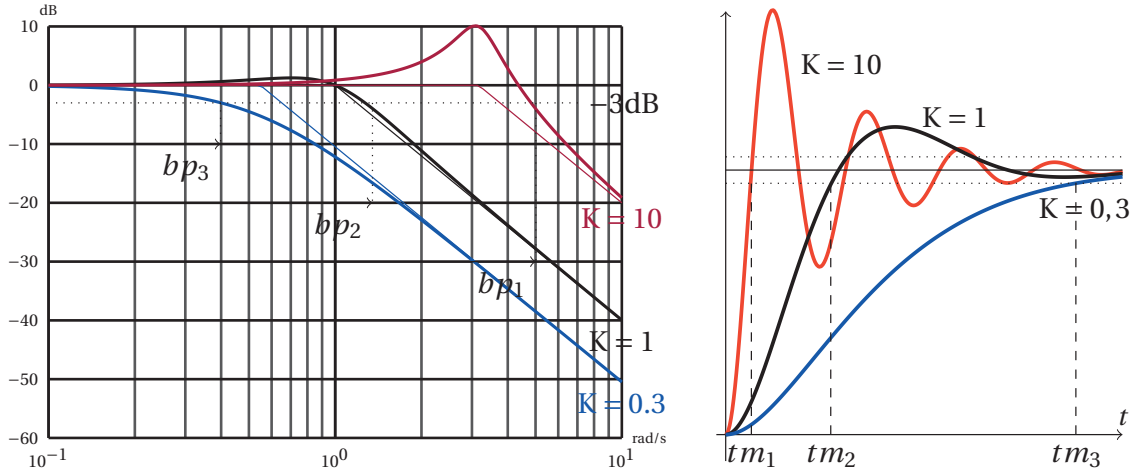
$$BF(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K} + \frac{p^2}{K}}$$

Par identification avec la forme canonique on obtient :

— $\omega_n = \sqrt{k}$, la pulsation propre ;

— $z = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{K}}$, le coefficient d'amortissement.

On constate que la réponse temporelle (fig. 6.11b) et la réponse fréquentielle (fig. 6.11a) dépendent principalement de K, plus K est grand, plus la réponse est rapide (le temps de montée diminue mais les oscillations augmentent) et plus la bande passante est grande.



(a) Diagramme d'amplitude - bande passante

(b) Temps de montée

FIGURE 6.11 – Bande passante et temps de montée

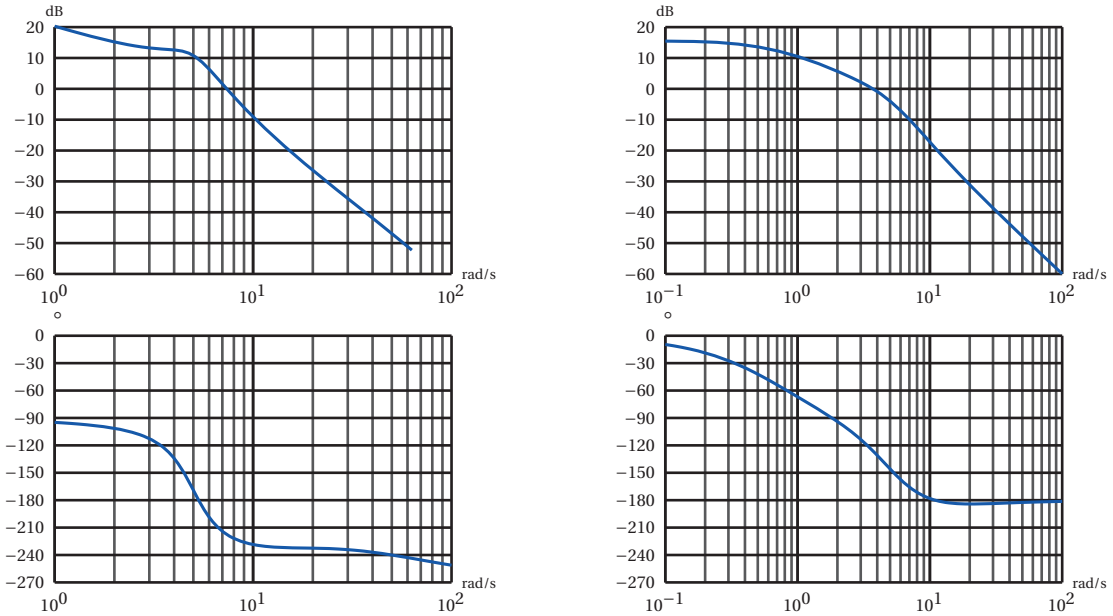
On peut tenter de généraliser en disant que si l'on souhaite diminuer le temps de montée du système, il faut augmenter la bande passante mais ne faut oublier que le temps de montée et le temps de réponse ne sont pas directement corrélés.

6.5 Exercices

Exercice 6- Critère du revers

Corrigé page 49

Q1. Pour chacune des fonctions de transfert en boucle ouverte tracées (pour K = 1) sur les figures 6.12a et 6.12b déterminer par le critère du revers si le système en boucle fermée est stable. Préciser la valeur maxi de K pour que le système soit juste instable.

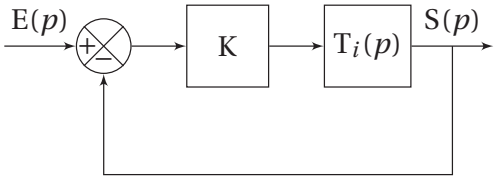


(a) Diagramme de Bode de $T_1(p)$

(b) Diagramme de Bode de $T_2(p)$

FIGURE 6.12 – Étude graphique de la stabilité

Chaque système est décrit par le schéma bloc ci-dessous.



Exercice 7- Stabilité - décomposition en éléments simples

Corrigé page 51

Q1. Déterminer pour chacune des fonctions ci dessus la décomposition en éléments simples pour une entrée de type Dirac.

$$H_1(p) = \frac{1+0.3\cdot p}{(1+0.5\cdot p)\cdot(1+2\cdot p+2\cdot p^2)} \qquad H_2(p) = \frac{12}{(1+2\cdot p)^2\cdot p}$$

$$H_3(p) = \frac{8}{(3+p)\cdot(p^2-4\cdot p-5)}$$

Q2. Conclure sur la stabilité.

Exercice 8- Marges de stabilité-Bode

Corrigé page 52

La FTBO du système étudié est définie par : $H_1(p) = \dfrac{1600}{p\left(16+2\cdot p+p^2\right)}$

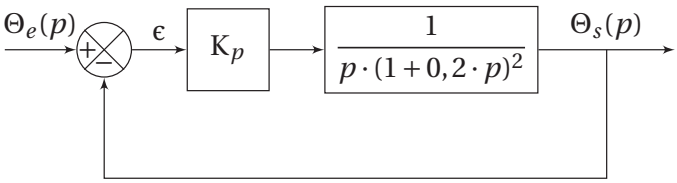
Q1. Tracer les diagrammes de Bode. Le système est-il stable en boucle fermée ?

Q2. Évaluer les marges de phase et de gain

Exercice 9- Boucle de régulation

Corrigé page 52

Soit le système décrit par le schéma bloc suivant.

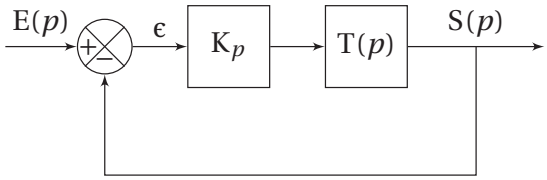


Q1. Déterminer la valeur de K_p pour laquelle le système est juste instable.

Exercice 10- système du second ordre + intégrateur

Corrigé page 53

Soit le système décrit par le schéma bloc suivant.



avec $T(p) = \dfrac{K}{p\left(1+\dfrac{2\cdot\xi}{\omega_n}\cdot p+\dfrac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$

Q1. Tracer l'allure des diagrammes de Bode, pour différentes valeurs de ξ. Placer les points et asymptotes caractéristiques.

Q2. Déterminer, sans calculs, la pulsation ω_{180} pour laquelle $\arg(BO(j\cdot\omega)) = -180°$, avec $BO(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte.

Q3. Déterminer $|T(\omega_{180})|$ en fonction de ξ, ω_n et K.

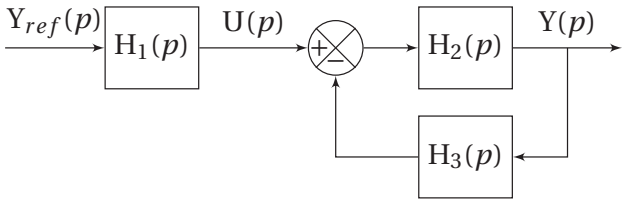
Q4. En déduire la relation entre K, ξ, ω_n et K_p pour que le système soit juste instable.

Q5. On souhaite une marge de gain de MG = 20 dB déterminer K_p en fonction de K, ξ et MG.

Exercice 11- Précision et stabilité

Corrigé page 53

Soit le système décrit par le schéma bloc :



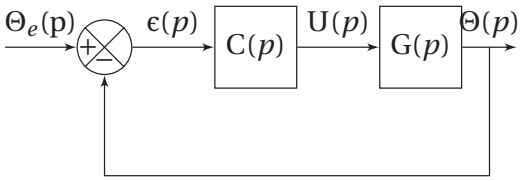
$$H_1(p) = \frac{5}{(1+16\cdot p)\cdot(1+33\cdot p)} \quad H_2(p) = \frac{15\cdot k}{p(1+p)} \quad H_3(p) = \frac{1}{1+0.1\cdot p} \tag{6.1}$$

$y_{ref}(t) = Y_o$ est une consigne constante (échelon).
Q1. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.
Q2. Déterminer la valeur finale de $Y(t)$ pour $k = 0,5$ et $k = 5$.

Exercice 12- Précison et paramètres

Corrigé page 54

Le système étudié est un réacteur, dont on se propose de réguler la température.



L'équation différentielle reliant la température $\theta(t)$ à la tension de commande $u(t)$ s'écrit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + (4+\alpha)\cdot\frac{d\theta}{dt} + 4\cdot\alpha\cdot\theta(t) = 4\cdot u(t)$$

Le paramètre α a été identifié par plusieurs essais mais sa valeur, dépendante aux produits introduits dans le réacteur, n'est connue que par un encadrement : $16 \leq \alpha \leq 20$.

La régulation complète est représentée par le schéma bloc ci contre.

— $\Theta_e(p)$: la transformée de Laplace de la température de consigne $\theta_e(t)$;

— $\Theta(p)$ et $U(p)$ les transformées de Laplace de $\theta(t)$ et $u(t)$;

— $C(p)$: le régulateur.

Dans un premier temps, on choisit un régulateur proportionnel : $C(p) = K_p$.
Q1. Déterminer la fonction de transfert $G(p)$.
Q2. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $G_F(p) = \dfrac{\Theta(p)}{\Theta_e(p)}$. Mettre sous forme canonique.
Q3. Le système est-il stable ?
Q4. Déterminer Kp pour obtenir un coefficient d'amortissement $z_F > 0,5$.
Q5. Déterminer l'erreur indicielle pour un échelon de température de $\Theta_0 = 20\,°C$ en fonction du paramètre α . Conclure sur la précision.

On choisit maintenant un régulateur proportionnel intégral :$C(p) = Kp\dfrac{1+T_i\cdot p}{T_i\cdot p}$.
Q6. Déterminer la FTBO pour les valeurs suivantes de T_i et α ;

— $T_i = 1/20$, $T_i = 1/16$

— $\alpha = 20$, $\alpha = 16$

Q7. À partir du tracé des diagrammes de Bode ou de Black de la FTBO pour chacun des cas (on prend $K_p = 1$), déterminer le couple (T_i, K_p) tel que la marge de phase (M_p) soit supérieure à 45° pour toutes les valeurs de α.
Q8. Déterminer l'erreur indicielle pour un échelon de température de $\Theta_0 = 20\,°C$.