

Après avoir étudié le comportement cinématique des solides, avoir modélisé les liaisons entre solides, d'un point de vue cinématique, nous allons étudier les actions mécaniques et leur effet sur le comportement et l'équilibre des solides.

Dans cette première partie, nous allons identifier et modéliser les actions mécaniques.

## 8.1. Actions mécaniques

### 8.1.1. Définition

On appelle action mécanique toute cause susceptible de :

- Maintenir un solide au repos : STATIQUE (Solide indéformable)
- Créer ou modifier le mouvement d'un solide : DYNAMIQUE
- Déformer un solide : RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

### 8.1.2. Nature et classification des actions mécaniques

On distingue deux grandes familles d'actions mécaniques suivant leur mode d'action :

Actions mécaniques de contact : on retrouve ce type d'actions dans toutes les actions entre solides et entre un fluide et un solide. Ces actions agissent sur la surface du solide.

Actions mécaniques à distance : les actions mécaniques à distance caractérisent les actions mécaniques transmises sans contact et agissant principalement sur tout le volume du solide. Les actions à distance sont principalement dues à l'effet de la gravité sur les corps, mais on retrouve aussi ce type d'action avec les phénomènes électromagnétiques.

### 8.1.3. Actions mécaniques de contact

Compte tenu de la rugosité, des défauts de forme et de la déformation des matériaux (figure 8.1), il est généralement impossible de caractériser exactement le contact réel entre deux solides et la nature des actions transmissibles par ce contact.

Nous considérerons généralement que les contacts entre deux solides sont réalisés par des surfaces parfaites. Les contacts seront donc :

- des contacts surfaciques : au travers d'une surface de contact (plan/plan, cylindre/cylindre, sphère/sphère,...),

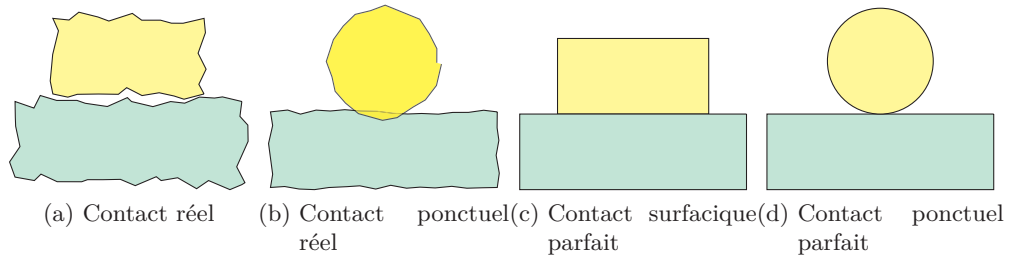


Figure 8.1. – Contacts réels et contacts théoriques

- des contacts linéique : au travers d’une ligne (cylindre/plan, sphère/cylindre,...),
- des contacts ponctuels : au travers d’un point de contact (sphère/plan, ...).

On remarquera, que les deux derniers sont parfaitement théoriques, un contact véritablement ponctuel impliquerait une pression de contact infinie et donc la destruction des solides !. Faire l’hypothèse d’un contact ponctuel, c’est supposer que la surface de contact est petite par rapport aux autres dimensions des solides.

## 8.2. Modèle local / modèle global

### 8.2.1. Action mécanique à contact surfacique

Définir l’action mécanique transmise à travers un contact surfacique nécessite de définir

- la nature de la surface de contact,
- la normale au plan tangent de contact en chaque point  $P$  de la surface de contact (par convention, on oriente la normale vers l’extérieur du solide étudié),
- l’allure de la pression de contact en chaque point  $P$  de la surface.

Remarque : dans cette première partie, nous supposons que les contacts sont parfaits, sans frottements.

La figure 8.2 montre l’allure deux répartitions possibles de l’action mécanique élémentaire du solide  $S_2$  sur le solide  $S_1$ .

On note  $\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(P)$ , l’action mécanique élémentaire agissant entre le solide  $S_1$  et le solide  $S_2$ . Cette action est orientée vers le solide isolé (ici  $S_2$ ), elle dépend de la valeur de la pression de contact en chaque point  $P$  de la surface de contact.

$$\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(P) = -p(P) \cdot ds \cdot \overrightarrow{n}(P)$$

avec

- $\overrightarrow{n}(P)$  : la normale en  $P$ ,
- $p(P)$  : la pression au point  $P$  [ $N/m^2$ ],
- $ds$  : l’élément de surface infinitésimal autour du point  $P$  sur lequel agit la pression.

La figure 8.3 montre deux possibilités de répartition de pression entre deux cylindres, la première qui suppose une répartition uniforme est très certainement fautive, la seconde est certainement plus proche de la réalité mais beaucoup plus difficile à déterminer.

Pour déterminer l’action mécanique globale agissant de  $S_1$  sur  $S_2$ , il suffit d’intégrer sur la surface de contact.

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(P) = \int_{P \in S} -p(P) \cdot ds \cdot \overrightarrow{n}(P)$$

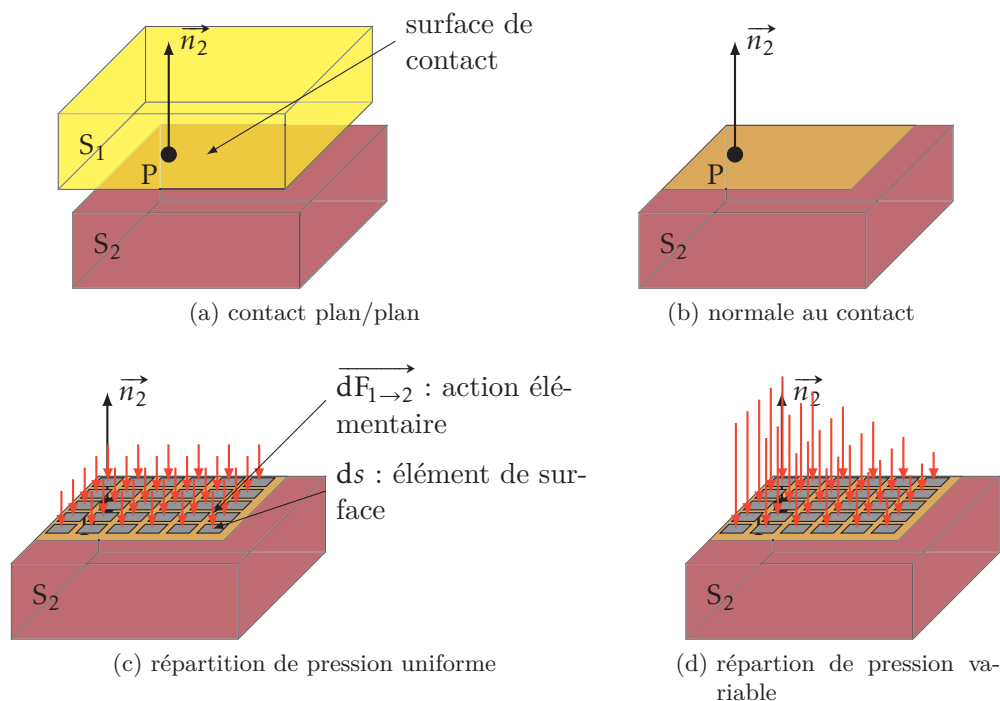
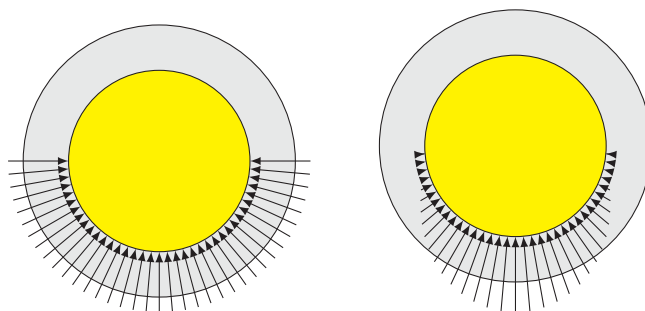
Figure 8.2. – Contact surfacique plan : action mécanique du solide  $S_1$  sur le solide  $S_2$ 

Figure 8.3. – Répartition de la pression entre deux cylindres

il reste à définir l'élément de surface, en fonction de la forme de la surface, on préférera les coordonnées cartésiennes ou les coordonnées polaires (figures 8.4) :

en coordonnées cartésiennes :  $ds = dx \cdot dy$

en coordonnées polaire :  $ds = r \cdot d\theta \cdot dr$

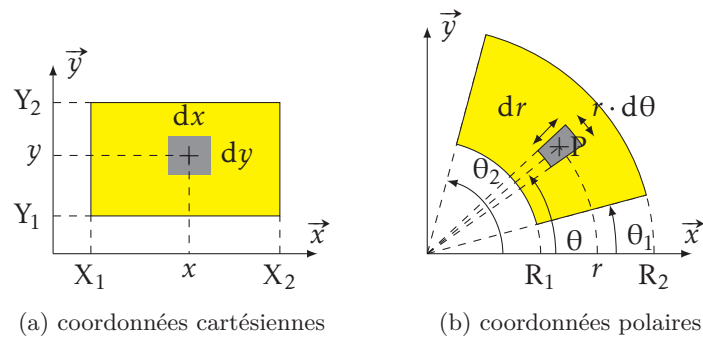
Pour ces deux cas, l'action globale devient

en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= \int_{P \in S} \vec{dF}_{1 \rightarrow 2}(P) = \int_{P \in S} -p(P) \cdot ds \cdot \vec{n}(P) \\ \vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= \int_{y=Y_1}^{y=Y_2} \int_{x=X_1}^{x=X_2} -p(P) \cdot dx \cdot dy \cdot \vec{n}(P)\end{aligned}$$

en coordonnées polaire :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{r=R_1}^{r=R_2} \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} -p(P) \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot \vec{n}(P)$$


 Figure 8.4. – Element de surface  $ds$ 

### 8.2.2. Action mécanique à contact linéique

Le contact linéique est défini comme le contact surfacique.

- la pression est une pression linéique  $p_\lambda(P) : [\text{Nm}^{-1}]$ ,
- l'élément d'intégration est homogène à une longueur  $d\ell$ ,

$$\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}(P)} = -p_\lambda(P) \cdot d\ell \cdot \overrightarrow{n(P)}$$

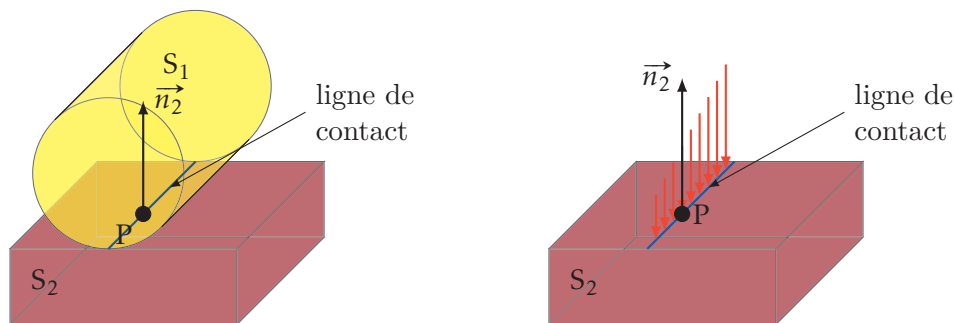


Figure 8.5. – Contact linéique

De la même manière on détermine l'action mécanique globale en intégrant le long de la ligne de contact

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \int_{P \in L} \overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}(P)} = \int_{P \in S} -p_\lambda(P) \cdot d\ell \cdot \overrightarrow{n(P)}$$

### 8.2.3. Action mécanique à contact ponctuel parfait

Le contact ponctuel parfait n'existe pas, en effet le contact entre deux corps ne peut se réaliser sans déformation de la zone de contact et sans frottements. On modélise par un contact ponctuel, les contacts dont la surface d'action est très réduite

L'action mécanique ponctuelle est directement représentable par un vecteur au point de contact :

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = F_{1 \rightarrow 2} \overrightarrow{n}$$

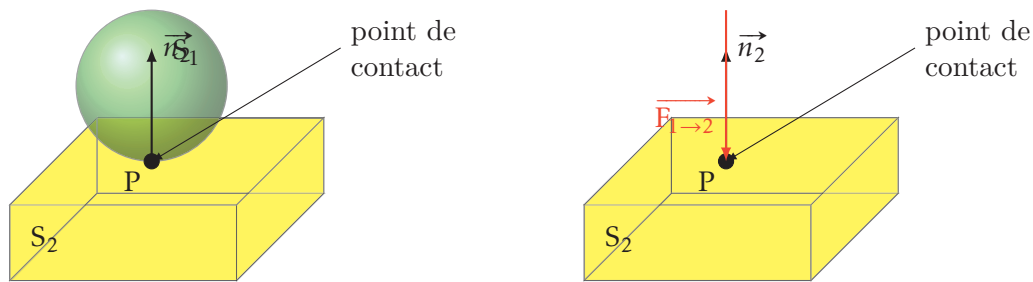


Figure 8.6. – Contact ponctuel

## Exemple : Barrage poids

la figure 8.14 modélise de façon simple un barrage poids. Un barrage poids, doit pouvoir retenir par son propre poids l'eau accumulée en amont.

On se propose de caractériser l'action mécanique de l'eau, l'effet de la gravité, puis l'action du sol sur le barrage et définir les conditions de l'équilibre.

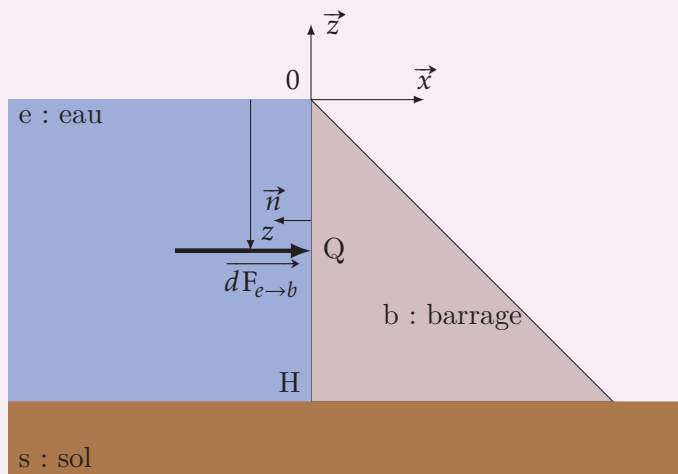


Figure 8.7. – barrage poids

On note :

- $\overrightarrow{dF_{e \rightarrow b}}(Q) = -p(h) \cdot ds \cdot \vec{n}$ , l'action élémentaire de la pression de l'eau sur le barrage avec
  - $p(h) = h \cdot \rho \cdot g$  la pression à la profondeur  $h$ , ( $\rho$  masse volumique de l'eau et  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ ),
  - $ds$  l'élément de surface sur lequel agit la pression,
  - $\vec{n}$  la normale à la surface du barrage orientée vers l'extérieur du solide.
- le point O est à la surface de l'eau, au milieu du barrage,
- H : la hauteur d'eau = la hauteur du barrage,
- $b$  : la largeur de la base,
- L : la largeur du barrage,
- $\overrightarrow{OQ} = (0, y, z)$ .

### A. Action mécanique de l'eau sur le barrage

L'action élémentaire de l'eau sur le barrage s'écrit :  $\overrightarrow{dF_{e \rightarrow b}} = -p(h) \cdot ds \cdot \vec{n}$ , l'action totale s'écrit donc :

$$\overrightarrow{F_{e \rightarrow b}} = \int_{Q \in S} \overrightarrow{dF_{e \rightarrow b}} \quad [\text{N}]$$

ici,  $\overrightarrow{dF_{e \rightarrow b}} = -p(h) \cdot ds \cdot \vec{n}$  avec  $p(h) = \rho \cdot g \cdot (-z)$  et  $\vec{n} = -\vec{x}$

Q1. Tracer l'allure de la pression le long de la paroi du barrage.

Q2. Déterminer  $\overrightarrow{F_{e \rightarrow b}}$

## 8.3. Action mécanique à distance

### 8.3.1. Modèle local

Une action à distance est une action telle la gravité ou le champ magnétique terrestre qui s'applique sur chaque élément de matière qui constitue le corps E.

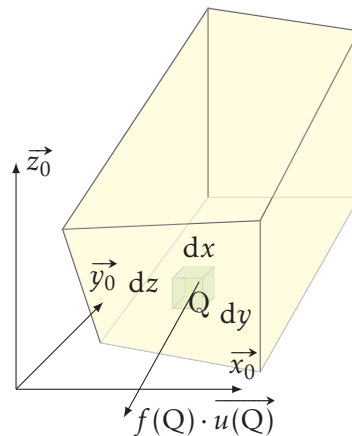


Figure 8.8. – Action à distance

On peut ainsi en chaque point Q et pour l'élément de volume élémentaire  $dv$  associé du solide S, définir l'action élémentaire auquel il est soumis, avec

- $f(Q)$  : la fonction qui décrit la répartition de l'action à distance en chaque point de l'espace,
- $\overrightarrow{u(Q)}$  : le vecteur directeur de cette action.

$$\overrightarrow{dF_{f \rightarrow S}(Q)} = f(Q) \cdot \overrightarrow{u(Q)} \cdot dv$$

L'action globale est donc :

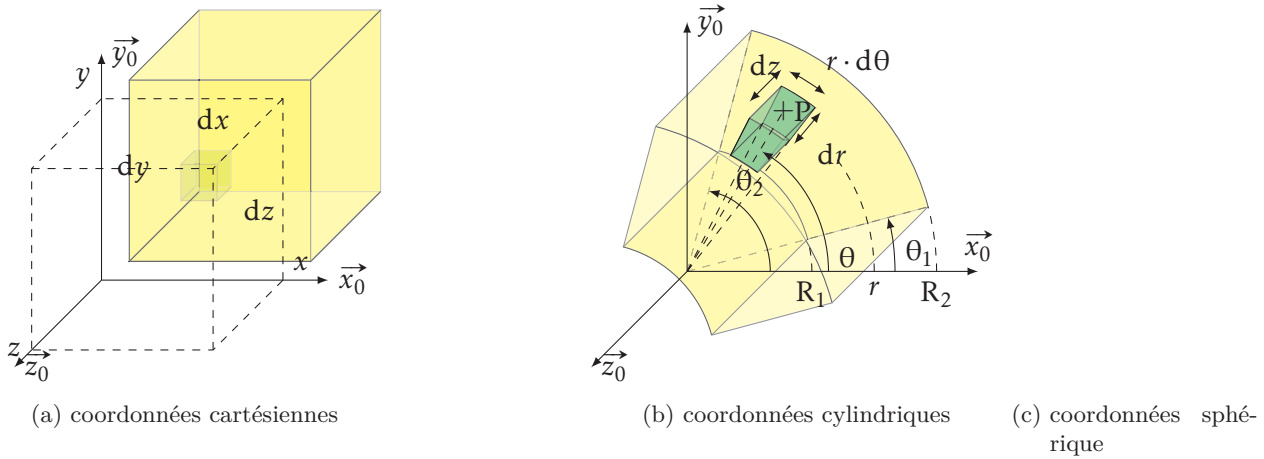
$$\overrightarrow{F_{f \rightarrow S}(Q)} = \int_{Q \in S} f(Q) \cdot \overrightarrow{u(Q)} \cdot dv$$

L'élément de volume (figure 8.9)  $dv$  est défini, soit en coordonnées cartésiennes, soit en coordonnées cylindriques ou sphériques :

coordonnées cartésiennes :  $dv = dx \cdot dy \cdot dz$ ,

coordonnées cylindrique :  $dv = r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz$ ,

coordonnées sphériques :  $dv = r \cdot \sin \varphi \cdot d\theta \cdot r \cdot d\phi \cdot dr$ .

Figure 8.9. – Élément de volume  $dv$ 

### 8.3.2. Modélisation de l'action de pesanteur

L'action de la pesanteur est une action à distance, le poids représente l'action de la pesanteur sur le solide  $S$ . l'élément d'intégration sur lequel agit la gravité est un élément de masse  $dm$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_{g \rightarrow S}(Q)} &= \int_{Q \in S} \overrightarrow{g(Q)} \cdot dm = \int_{Q \in S} \overrightarrow{g(Q)} \cdot \rho(Q) \cdot dv \\ \overrightarrow{P_{g \rightarrow S}(Q)} &= - \int_{Q \in S} \rho(Q) \cdot g(Q) \cdot \vec{z}_0 \cdot dv \end{aligned}$$

- $g(Q)$  : la gravité au point  $Q$ ,
- $\rho(Q)$  : la masse volumique au point  $Q$ ,
- $\vec{z}_0$  : vecteur unitaire vertical orienté vers le haut.

Si la gravité et la masse volumique sont constantes dans le solide, alors :

$$\overrightarrow{P_{g \rightarrow S}(Q)} = -\rho \cdot g \int_{Q \in S} \vec{z}_0 \cdot dv = -\rho \cdot g \cdot V \vec{z}_0 = -M \cdot g \cdot \vec{z}_0$$

et  $V$  le volume du solide et  $M$  sa masse.

### 8.3.3. Centre d'inertie

On appelle centre d'inertie du système matériel  $\Sigma$ , le point  $G$  défini par :

$$\int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}.$$

En faisant intervenir le point  $O$ , la relation devient

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm &= \vec{0} \\ \int_{\Sigma} \overrightarrow{GO} dm + \int_{\Sigma} \overrightarrow{OP} dm &= \vec{0} \end{aligned}$$

avec  $m_{\Sigma} \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{OP} dm$  et finalement

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_\Sigma} \int_{P \in \Sigma} \vec{OP} \, dm$$

Dans un repère cartésien, on note  $(x_G, y_G, z_G)$  les coordonnées de  $\vec{OG}$  et  $(x, y, z)$  les coordonnées de  $\vec{OP}$ , on peut donc écrire :

$$x_G = \frac{1}{m_\Sigma} \int_\Sigma x \cdot dm, \quad y_G = \frac{1}{m_\Sigma} \int_\Sigma y \cdot dm, \quad z_G = \frac{1}{m_\Sigma} \int_\Sigma z \cdot dm.$$

Remarques :

- Si le système matériel est un solide indéformable, le centre d'inertie est un point fixe du solide ;
- Si le système matériel possède un élément de symétrie matérielle, plan ou axe de symétrie, aussi bien du point de vue géométrique que du point de vue de la répartition des masses, le centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie ;
- Le centre d'inertie est confondu avec centre de gravité dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme.

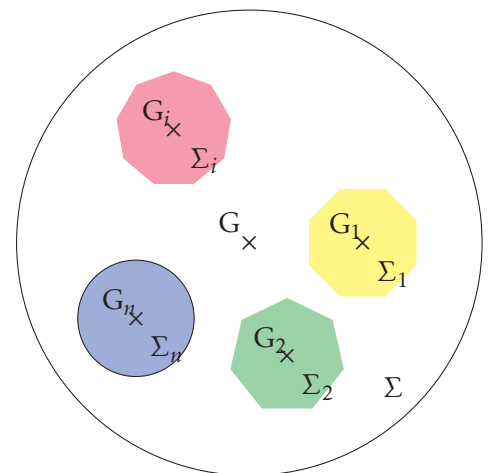
a ). Centre d'inertie d'un ensemble de corps

Un ensemble matériel  $\Sigma$  est composé de  $n$  sous-ensembles matériels  $\Sigma_i$ . À chaque sous-ensemble  $\Sigma_i$  est associée sa masse  $m_i$  et son centre d'inertie  $G_i$ , alors

$$\vec{OG}_\Sigma = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{OG}_i.$$

Le centre d'inertie d'un ensemble de corps est le barycentre des centres d'inertie.

Si les corps sont des solides indéformables immobiles les uns par rapport aux autres, le centre d'inertie de l'ensemble est fixe dans un repère lié à cet ensemble.



b ). Théorèmes de Guldin

Énoncé (Centre d'inertie d'une courbe plane) Soient (C) une courbe du plan ( $\Pi$ ) et ( $\Delta$ ) une droite du plan ne coupant pas (C). L'aire de la surface engendrée par la rotation de la courbe (C) autour de la droite ( $\Delta$ ) est égal au produit de la longueur de la courbe L par le périmètre décrit par son centre d'inertie  $2\pi \cdot r_G$ .

$$S = 2\pi \cdot r_G \cdot L$$

On associe à la courbe (C) une masse linéique  $\lambda$  constante,  $dm = \lambda \cdot dl$  d'où la masse totale de la courbe  $m_c = \lambda \cdot L$ .

La position du centre d'inertie de la courbe est calculée par la relation générale :

$$m_c \cdot \vec{OG} = \int_C \vec{OP} \cdot dm$$

$$\lambda \cdot L \cdot \vec{OG} = \int_C \vec{OP} \cdot \lambda \cdot dl.$$

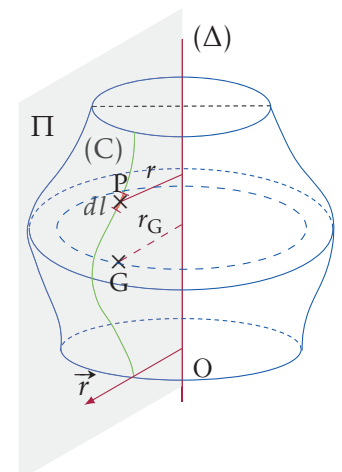


Figure 8.11. – Centre d'inertie d'une



Après simplification puis en ne prenant que la projection suivant  $\vec{r}$  :

$$L \cdot \vec{OG} = \int_C \vec{OP} \, dl \Rightarrow L \cdot r_G = \int_C r \, dl$$

Calculons maintenant la surface engendrée par la rotation de la courbe

$$S = \int_S r \cdot d\theta \cdot dl = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_C r \cdot dl = 2\pi \int_C r \cdot dl$$

En substituant  $\int_C r \cdot dl = L \cdot r_G$  dans cette égalité on retrouve bien le résultat cherché.

Énoncé (Centre d'inertie d'une surface plane homogène) Soient (S) une surface du plan ( $\Pi$ ) et ( $\Delta$ ) une droite du plan ne coupant pas (S).

Le volume engendré par la rotation de la surface plane tournant autour de l'axe ( $\Delta$ ) est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre décrit par son centre d'inertie.

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S$$

On démontre cette égalité comme la précédente. On associe à (S) une masse surfacique  $dm = \sigma \cdot ds$  constante et  $m_S = \sigma \cdot S$ .

Par définition :

$$m_S \cdot \vec{OG} = \int_S \vec{OP} \cdot dm$$

$$S \cdot \vec{OG} = \int_S \vec{OP} \cdot ds$$

soit en projection suivant  $\vec{r}$

$$S \cdot r_G = \int_S r \cdot ds$$

Le volume engendré par la rotation de la surface (S) s'écrit :

$$V = \int_v r \cdot d\theta \cdot ds = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_S r \cdot ds = 2\pi \int_S r \cdot ds$$

d'où la relation cherchée :

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S.$$

Remarque : l'utilisation des théorèmes de Guldin permet de simplifier le calcul de position du centre d'inertie dans la mesure où l'on connaît les caractéristiques du volume et de la surface balayée.

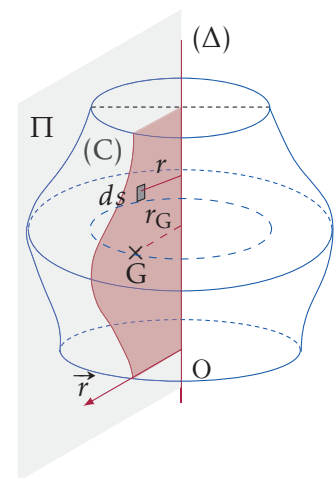


Figure 8.12. – Centre d'inertie d'une surface plane

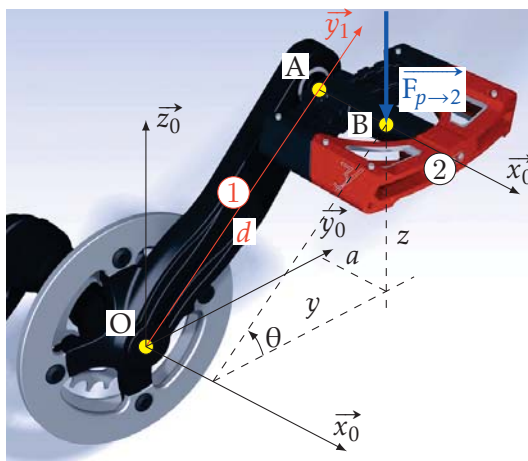


Figure 8.13. – Moment d'une action mécanique

## 8.4. Moment d'une action mécanique

### 8.4.1. Moment d'une action ponctuelle

La détermination de la résultante d'une action mécanique, ne suffit pas pour la caractériser.

Ainsi, l'action du pied sur la pédale  $\vec{F}_{p \rightarrow 2}$  en B ne suffit pas pour décrire le mouvement de rotation de la pédale.

On appelle moment en O de l'action  $\vec{F}_{p \rightarrow 2}$  la quantité

$$\vec{M}_{O, F_{p \rightarrow 2}} = \vec{OB} \wedge \vec{F}_{p \rightarrow 2} \quad [\text{Nm}]$$

Ce vecteur permet de définir l'effet de l'action mécanique à distance du point d'application.

Pour l'exemple du pédalier, on trouve

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O, F_{p \rightarrow 2}} &= (\vec{OA} + \vec{AB}) \wedge -F_{p \rightarrow 2} \vec{z}_0 \\ &= (d \cdot \vec{y}_1 + a \cdot \vec{x}_0) \wedge -F_{p \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0 \\ &= -d \cdot \cos \theta \cdot F_{p \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_0 + a \cdot F_{p \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_0 \end{aligned}$$

La composante du moment en projection sur  $\vec{x}_0$  représente l'action mécanique qui va entraîner la roue arrière.

Remarque : le moment d'une action ponctuelle en son point d'application est nul.

### 8.4.2. Moment d'une action de pression

Dans le cas d'une action mécanique de pression, le moment est défini par

$$\vec{M}_{O, F_{1 \rightarrow 2}} = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

Il est souvent utilisé de déterminer un point B tel que

$$\vec{M}_{B, F_{1 \rightarrow 2}} = \vec{0}$$

en ce point, l'action mécanique est modélisable uniquement par la résultante de l'action de pression.

## 8.4.3. Moment du poids au centre d'inertie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_{g \rightarrow S}(Q)} &= \int_{Q \in S} \overrightarrow{g(Q)} \cdot dm \\ \overrightarrow{M_{O, g \rightarrow S}} &= \int_Q \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{g(Q)} \cdot dm\end{aligned}$$

Si  $\overrightarrow{g(Q)}$  est constant, alors :

$$\overrightarrow{M_{O, g \rightarrow S}} = \int_Q \overrightarrow{OQ} \cdot dm \wedge \vec{g}$$

en calculant ce moment au centre d'inertie G :

$$\overrightarrow{M_{G, g \rightarrow S}} = \int_Q \overrightarrow{GQ} \cdot dm \wedge \vec{g}$$

on retrouve sous l'intégrale, la définition du centre d'inertie  $\int_Q \overrightarrow{GQ} \cdot dm = \vec{0}$ , finalement

$$\overrightarrow{M_{G, g \rightarrow S}} = \vec{0}$$

le moment du poids est nul au centre d'inertie. Cette propriété aussi vraie si  $\overrightarrow{g(Q)}$  n'est pas constant.

## 8.5. Torseur d'action mécanique

## 8.5.1. Cas d'une action mécanique ponctuelle

On vient de voir qu'une action mécanique doit être représentée à la fois par sa résultante  $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$  et son moment  $\overrightarrow{M_{A, F_{1 \rightarrow 2}}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$ .

Déterminons, le moment en B.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{B, F_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B, F_{1 \rightarrow 2}}} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA}) \wedge \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B, F_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B, F_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{M_{A, F_{1 \rightarrow 2}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}\end{aligned}$$

La relation entre le moment en B et le moment en A est la relation de changement de point d'un torseur.

On peut donc décrire une action mécanique à partir d'un torseur, le torseur des actions mécaniques :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A, F_{1 \rightarrow 2}}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\}_A$$

On note :

- $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$  : la résultante de l'action mécanique de l'action de 1 sur 2,
- $\overrightarrow{M_{A, F_{1 \rightarrow 2}}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$  : le moment de l'action mécanique de 1 sur 2 au point A.

Si B est le point d'application de l'action ponctuelle, alors le moment est nul en ce point :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B, F_{1 \rightarrow 2}}} = \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

Le torseur d'une action ponctuelle est un torseur glisseur en son point d'application B.

### 8.5.2. Cas d'une action de pression

L'action mécanique peut être représentée par

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= \int_{P \in S} \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2}(P) = \int_{P \in S} -p(P) \cdot ds \cdot \vec{n}(P) \\ \vec{M}_{O, F_{1 \rightarrow 2}} &= \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge (-p(P) \cdot ds \cdot \vec{n}(P))\end{aligned}$$

le torseur d'une action de pression s'écrit donc :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{P \in S} \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2}(P) \\ \vec{M}_{O, F_{1 \rightarrow 2}} = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_O$$

Il existe un point B tel que  $\vec{M}_{B, F_{1 \rightarrow 2}} = \vec{0}$ , en ce point :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{B, F_{1 \rightarrow 2}} = \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

en ce point, le torseur est un glisseur.

### 8.5.3. Cas de la gravité

Le torseur du poids s'écrit au centre d'inertie G :

$$\{\mathcal{P}_{g \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_{g \rightarrow S} \\ \vec{M}_{G, g \rightarrow S} = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

C'est aussi un torseur glisseur.

### 8.5.4. Torseur couple

Tous les torseurs d'efforts ne peuvent pas être représentés par un torseur glisseur. Ainsi, l'action mécanique transmise par le stator d'un moteur sur le rotor est un torseur couple.

$$\{\mathcal{C}_{s \rightarrow r}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{C}_{s \rightarrow r} = C_{sr} \cdot \vec{u} \end{array} \right\}_{VP}$$

## 8.6. Exercices de synthèse

### Exercice 1- Barrage poids - exercice de cours

Corrigé page ??

#### A. Barrage poids

la figure 8.14 modélise de façon simple un barrage poids.

Un barrage poids, doit pouvoir retenir par son propre poids l'eau accumulée en amont.

On se propose de caractériser l'action mécanique de l'eau, l'effet de la gravité, puis l'action du sol sur le barrage et définir les conditions de l'équilibre.

On note :

—  $\overrightarrow{dF}_{e \rightarrow b}(Q) = -p(h) \cdot ds \cdot \vec{n}$ , l'action élémentaire de la pression de l'eau sur le barrage avec

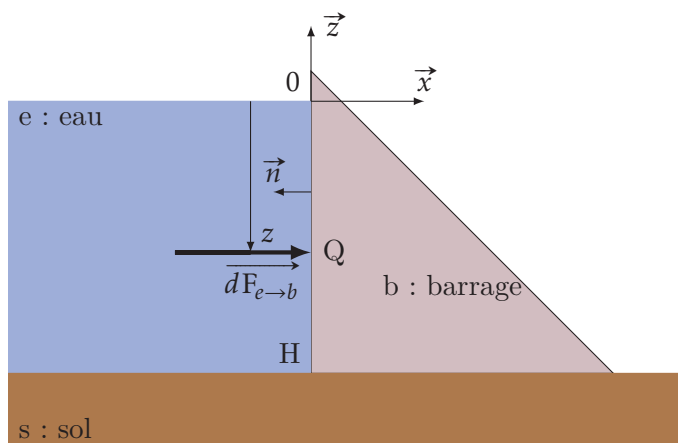


Figure 8.14. – barrage poids

- $p(h) = h \cdot \rho \cdot g$  la pression à la profondeur  $h$ , ( $\rho$  masse volumique de l'eau et  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ ),
- $ds$  l'élément de surface sur lequel agit la pression,
- $\vec{n}$  la normale à la surface du barrage orientée vers l'extérieur du solide.
- le point O est à la surface de l'eau, au milieu du barrage,
- H : la hauteur d'eau,
- $H_f$  : la hauteur du barrage,
- $b$  : la largeur de la base,
- L : la largeur du barrage,
- $\vec{OQ} = (0, y, z)$ .

## A.1. Action mécanique de l'eau sur le barrage

L'action élémentaire de l'eau sur le barrage s'écrit :  $\vec{dF}_{e \rightarrow b} = -p(h) \cdot ds \cdot \vec{n}$ , l'action totale s'écrit donc :

$$\vec{F}_{e \rightarrow b} = \int_{Q \in S} \vec{dF}_{e \rightarrow b} \quad [\text{N}]$$

Q1. Tracer l'allure de la pression le long de la paroi du barrage.

Q2. Déterminer  $\vec{F}_{e \rightarrow b}$

On note :

$$\vec{M}_{O, e \rightarrow b} = \int_{Q \in S} \vec{OQ} \wedge \vec{dF}_{e \rightarrow b} \quad [\text{Nm}]$$

le moment de l'action mécanique de l'eau

Q3. Déterminer  $\vec{M}_{Q, e \rightarrow b}$  en fonction de  $h$ ,  $\rho$ ,  $g$  et des coordonnées du point  $Q = (0, y, z)$ .

Q4. Montrer qu'il existe un point  $B = (0, y_I, z_I)$  de la paroi tel que :  $\vec{M}_{I, e \rightarrow b} = \vec{0}$ , Préciser les coordonnées en fonction de H.

On note :

$$\{\mathcal{A}_{e \rightarrow b}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{e \rightarrow b} \\ \vec{M}_{Q, e \rightarrow b} \end{array} \right\}_Q$$

le torseur de l'action mécanique de l'eau sur le barrage.

Q5. Justifier que l'action mécanique de l'eau sur le barrage peut être représentée par un torseur.

Q6. Écrire alors  $\{\mathcal{A}_{e \rightarrow b}\}$  en B, Quelle est la forme de ce torseur ? Représenter l'action mécanique de l'eau sur le barrage en I.

### A.2. Action de la gravité

L'action élémentaire de la gravité sur un élément de masse du barrage s'écrit :

$$\overrightarrow{dP_{g \rightarrow b}} = -g \cdot dm \cdot \vec{z}$$

avec  $dm = \mu \cdot dv$  ( $\mu$  masse volumique du barrage supposée constante).

L'action totale de la gravité s'écrit donc :

$$\overrightarrow{P_{g \rightarrow b}} = \int_P \overrightarrow{dP_{g \rightarrow b}}$$

Q7. Préciser les bornes d'intégration de l'intégrale

Q8. Déterminer  $\overrightarrow{P_{g \rightarrow b}}$

On note :

$$\overrightarrow{M_{P,e \rightarrow b}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dF_{e \rightarrow b}} \quad [\text{Nm}]$$

le moment de l'action mécanique dû à la gravité sur le barrage.

Q9. Déterminer  $\overrightarrow{M_{P,e \rightarrow b}}$  en fonction, de  $g$ ,  $\mu$  et des coordonnées de  $P = (x_P, y_P, z_P)$ .

Q10. Montrer qu'il existe un point G dit centre de gravité tel que  $\overrightarrow{M_{G,e \rightarrow b}} = \vec{0}$ . Préciser les coordonnées en fonction de  $H_t$  la hauteur du barrage,  $L$  et  $b$  la largeur de la base du barrage.

Q11. Écrire en G le torseur de l'action mécanique de la gravité. Quelle est la forme de ce glisseur ?

### A.3. Étude de l'action du sol sur le barrage

L'action mécanique du sol sur le barrage doit être telle que le barrage reste immobile sous l'action de l'eau et du poids.

Si on note :

$$\{\mathcal{A}_{s \rightarrow b}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{s \rightarrow b}} \\ \overrightarrow{M_{R,b \rightarrow s}} \end{array} \right\}_R$$

le torseur de l'action mécanique en un point R, alors la condition d'équilibre s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{e \rightarrow b}\} + \{\mathcal{A}_{g \rightarrow b}\} + \{\mathcal{A}_{s \rightarrow b}\} = \{0\}$$

Q12. Déterminer  $\{\mathcal{A}_{s \rightarrow b}\}$  en G.

Q13. Montrer qu'il existe un point J de la base du barrage tel que le torseur de l'action mécanique du sol sur le barrage a la forme d'un torseur glisseur.

## Exercice 2- Barrage voute

Corrig page ??

### A. Barrage voute

On considère maintenant un barrage voute (figure 8.15), le barrage a une forme demi cylindrique de rayon  $R$ , et de hauteur d'eau  $H$ .

Le barrage est en appui sur les cotés en A et B.

On note  $\overrightarrow{dF_{e \rightarrow b}}$  l'action élémentaire de l'eau sur un élément de surface  $ds$  du barrage.

La pression de l'eau sur la barrage dépend de la profondeur,  $p(h) = \rho \cdot g \cdot h$ .

On considère que l'origine du repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est au centre de la voute et à la surface de l'eau.

Q1. préciser les coordonnées du point P de la surface en contact avec l'eau du barrage en coordonnées cylindrique

Q2. Déterminer  $\overrightarrow{dF_{e \rightarrow b}}$  en fonction de  $\vec{n}$ ,  $ds$ ,  $\rho$ , et  $z_P$  la coordonnée suivant  $\vec{z}$  de P.

Q3. Déterminer  $\overrightarrow{F_{e \rightarrow b}}$ , préciser les projections suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

Q4. Déterminer le moment en O de l'action de l'eau sur le barrage.

Q5. Déterminer le point Q pour lequel l'action de l'eau sur le barrage est modélisable par un glisseur.

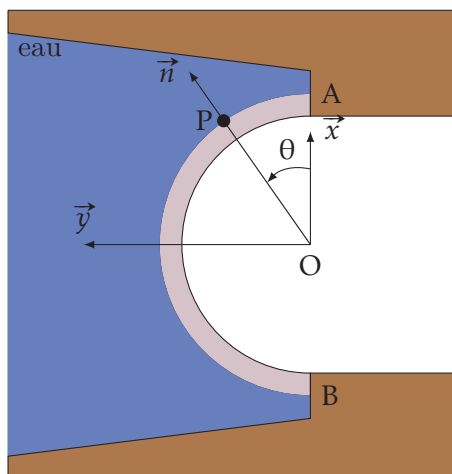


Figure 8.15. – Barrage voute

### Exercice 3- Quart de disque

Adapté du Concours National DEUG - CCP

Corrig page ??

Soit une plaque (P) en forme d'un quart de disque de rayon  $a$  et d'épaisseur négligeable devant le rayon  $a$ . On note  $\mu$  la masse surfacique du matériau constituant la plaque (P).

Le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_0$  est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Q1. Déterminer la masse M de la plaque (P) en fonction de  $\mu$  et  $a$ .

Q2. Déterminer la position du centre d'inertie G de la plaque

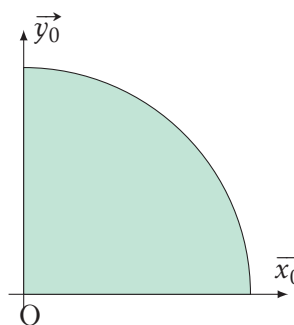


Figure 8.16. – Quart de disque

## 8.6.1. Correction



## 8.7. Prise en compte des frottements

Le contact réel entre deux solides ne peut se faire sans frottements. Ils sont souvent néfastes si on considère l'énergie dépensée pour les vaincre mais nécessaire pour assurer la stabilité (pneus sur route!).

### 8.7.1. Contact ponctuel réel

Soient deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en contact ponctuel en I (figure 8.17). Le torseur des actions transmissibles par la liaison ponctuelle réelle en I du solide  $S_1$  sur le solide  $S_2$  s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = N_{12} \cdot \vec{n} + \vec{T}_{12} \\ \vec{M}_{I,1 \rightarrow 2} = Mp_{12} \cdot \vec{n} + \vec{Mr}_{12} \end{array} \right\}_I$$

avec

- $\vec{n}$ , la normale au plan tangent au contact orientée de  $S_1$  vers  $S_2$ ,
- $N_{12}$ , la projection sur  $\vec{n}$  de la résultante du torseur  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ ,
- $\vec{T}_{12}$ , la composante dans le plan tangent de  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  (la direction est a priori inconnue),
- $Mp_{12}$ , la projection sur  $\vec{n}$  du moment du torseur (moment de pivotement autour de l'axe  $(I, \vec{n})$ ),
- $\vec{Mr}_{12}$ , la composante dans le plan tangent (moment de roulement).

Le mouvement de  $S_2$  par rapport  $S_1$  est définie par le torseur cinématique suivant :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1} = \Omega p_{21} \cdot \vec{n} + \vec{\Omega r}_{21} \\ \vec{V}_{I \in 2/1} \end{array} \right\}_I$$

- $\Omega p_{12}$  : composante de pivotement autour de  $(I, \vec{n})$ ,
- $\vec{\Omega r}_{12}$  : composante de roulement dans le plan tangent,
- $\vec{V}_{I \in 2/1} \cdot \vec{n} = 0$  : condition nécessaire au maintien du contact entre  $S_2$  et  $S_1$ .

### 8.7.2. Lois de Coulomb - Détermination de la résultante

Les lois de Coulomb permettent de déterminer la résultante de l'action réelle entre deux solides en contact ponctuel, en fonction des trois cas suivant :

Absence de frottement : alors la résultante ne comporte qu'une composante normale, la composante tangentielle est nulle quelque soit le mouvement :

$$\begin{aligned} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} &= N_{12} \cdot \vec{n} \\ \vec{T}_{12} &= \vec{0} \end{aligned}$$

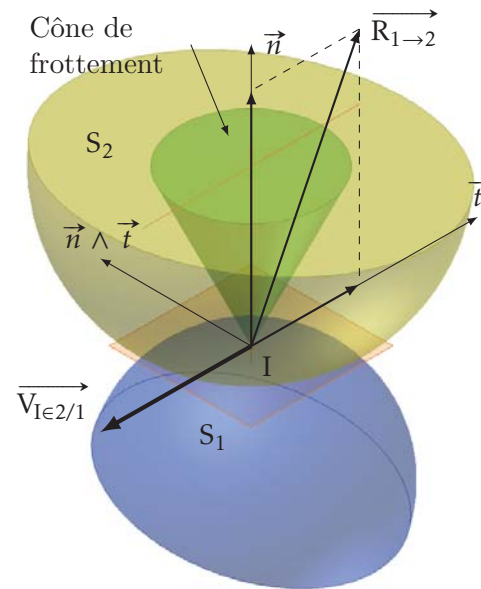
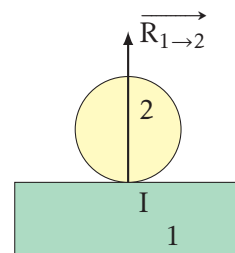


Figure 8.17. – Contact ponctuel réel

Frottement et glissement : la vitesse de glissement est non nulle ( $\vec{V}_{I \in 2/1} \neq \vec{0}$  et  $\vec{V}_{I \in 2/1} \cdot \vec{n} = 0$ ).

Les lois de Coulomb précisent alors

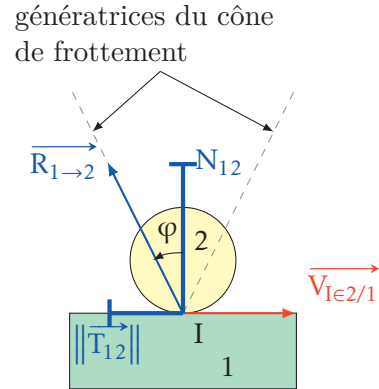
- que la composante tangentielle de la résultante est colinéaire au vecteur  $\vec{V}_{I \in 2/1}$  mais de sens opposé (les frottements s'opposent au déplacement),
- que le module de l'effort tangential est proportionnel à la composante normale,

soit :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{I \in 2/1} \wedge \vec{T}_{12} &= \vec{0} \\ \vec{V}_{I \in 2/1} \cdot \vec{T}_{12} &< 0 \\ \|\vec{T}_{12}\| &= f \cdot |\mathbf{N}_{12}| \end{aligned}$$

On note :

$$f = \tan \varphi$$



$f$  est le coefficient (facteur) de frottement entre les deux solides, il dépend de la nature des matériaux en contact, de la qualité des surfaces frottantes et de la lubrification.

La résultante de l'action de contact entre les deux solides est sur le cône de frottement (figure 8.17). On note  $\varphi$  le demi-angle au sommet du cône de frottement.

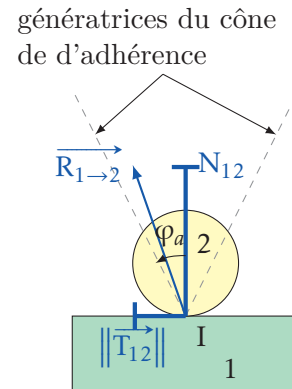
La résultante ne peut se trouver que sur le cône.

Frottement sans mouvement  $\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$ , le module de la composante tangentielle n'est alors connu que par une inégalité,

$$\|\vec{T}_{12}\| \leq f_a \cdot |\mathbf{N}_{12}|$$

et sa direction ne peut être déterminée (la résultante est dans le cône de frottement).

$$f_a > f \quad \text{avec} \quad f_a = \tan \varphi_a$$



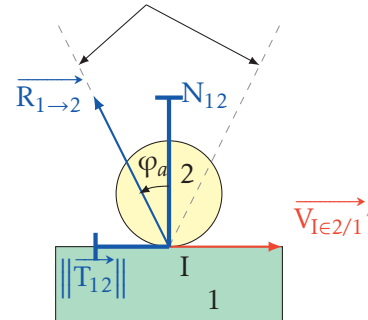
On constate expérimentalement que l'effort nécessaire pour initier le déplacement d'un corps sur un autre est supérieur à l'effort nécessaire pour maintenir le glissement.

Dans le cas de l'adhérence, on ne connaît pas l'effort tangentiel, si ce n'est par sa borne supérieure, pour étudier les efforts on suppose alors que le mouvement va se déclencher. On suppose que le solide est à la limite du glissement dans une direction supposée déduite des des efforts appliqués, avec  $\vec{V}_{I \in 2/1}'$  la vitesse supposée en I entre les deux solides.

On détermine alors l'effort tangentiel comme dans le cas précédent :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{I \in 2/1}' \wedge \vec{T}_{12} &= \vec{0} \\ \vec{V}_{I \in 2/1}' \cdot \vec{T}_{12} &< 0 \\ \|\vec{T}_{12}\| &= f_a \cdot |N_{12}| \end{aligned}$$

génératrices du cône de d'adhérence



Roulement sans glissement :  $\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$ , si les frottements ne sont pas nuls, alors on se trouve dans le cas précédent avec

$$\|\vec{T}_{12}\| \leq f_a \cdot |N_{12}|.$$

On détermine la composante tangentielle en se mettant à la limite du glissement (dérapage), et on applique les conclusions précédentes.

À ce frottement, peut se rajouter un frottement de roulement, décrit plus loin.

Quelques valeurs de  $f$  et  $f_a$  Les deux coefficients sont déterminés expérimentalement.

Surface en contact	$f_a$	$f$
Acier sur acier (sec)	0,60	0,40
Acier sur acier (visqueux)	0,10	0,05
Acier sur bois	0,20 à 0,60	-
Acier sur glace	0,04	-
Aluminium sur aluminium	1,10	-
Aluminium sur acier	0,6	0,5
Bois sur bois	0,25 à 0,50	-
Câble en acier sur poulie en acier	0,20	0,15
Caoutchouc sur acier	0,40	0,30
Caoutchouc sur béton	0,50 à 0,90	-
Caoutchouc sur glace	0,05 à 0,30	-
Pneus en bon état sur pavage sec	0,90	0,80
Pneus usés sur pavage humide	0,10 à 0,20	0,05 à 0,10
Téflon sur téflon	0,04	-
Téflon sur acier	0,04	0,04

Plusieurs paramètres influent sur ces coefficients, entre autres :

- la nature des surfaces ;
- la rugosité des surfaces ;
- la lubrification ;
- la déformation locale ;

— la vitesse.

Tous ces paramètres font que les valeurs de ces coefficients ne sont que des valeurs moyennes à manipuler avec précaution. De manière générale et compte tenu de la remarque précédente, dans les calculs, on ne considère qu'un seul type de coefficient, le coefficient de frottement.

### 8.7.3. Détermination du moment $\overrightarrow{M}_{I,1 \rightarrow 2}$

Par analogie avec le frottement de glissement, on définit un couple de résistance au pivotement et un couple de résistance au roulement. Ces couples résistants interviennent dès que le contact ne peut plus être considéré comme ponctuel mais suivant une surface localisée (écrasement), la répartition non homogène des actions élémentaires de contact créant alors ces moments résistants.

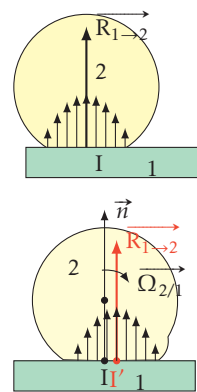
Les lois de contact entre deux solides sont complexes, et des lois semblables aux lois de Coulomb pour les frottements de glissement ont été formulées pour modéliser ces phénomènes.

Résistance au roulement : si  $\overrightarrow{\Omega}_{r_{21}} \neq \vec{0}$ , alors

si  $\overrightarrow{\Omega}_{r_{12}} \neq \vec{0}$ , alors

$$\|\overrightarrow{Mr}_{12}\| = h \cdot |N_{12}|$$

avec  $h$  le coefficient de frottement de roulement ;



Répartition symétrique de la pression de contact :  
 $h = 0$

Répartition asymétrique de la pression de contact :  $h = \|\overrightarrow{II'}\|$

Résistance au pivotement : si  $\Omega_{p_{12}} \neq 0$ , alors

$$|Mp_{12}| = k \cdot |N_{12}|$$

avec  $k$  le coefficient de frottement de pivotement..

Remarque : les deux coefficients  $h$  et  $k$  sont homogènes à une longueur.

### 8.7.4. Frottements fluides - visqueux

Le modèle des lois de Coulomb pour les frottements est parfois insuffisant pour décrire la nature du contact entre deux solides.

Il est parfois nécessaire de remplacer ou de compléter ce modèle par la prise en compte d'un effet dû à la vitesse de déplacement.

$$\overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} = -f_v \cdot \overrightarrow{V}_{I \in 2/1}$$

avec  $f_v$  en  $[Nsm^{-1}]$ .

Dans ce modèle, l'action mécanique d'un solide sur l'autre est inversement proportionnelle à la vitesse de déplacement relative.

## 8.8. Actions mécaniques particulières

### 8.8.1. Action mécanique développée par un ressort de traction-compression

Soit deux solides (1) et (2) liés par un ressort de traction-compression :

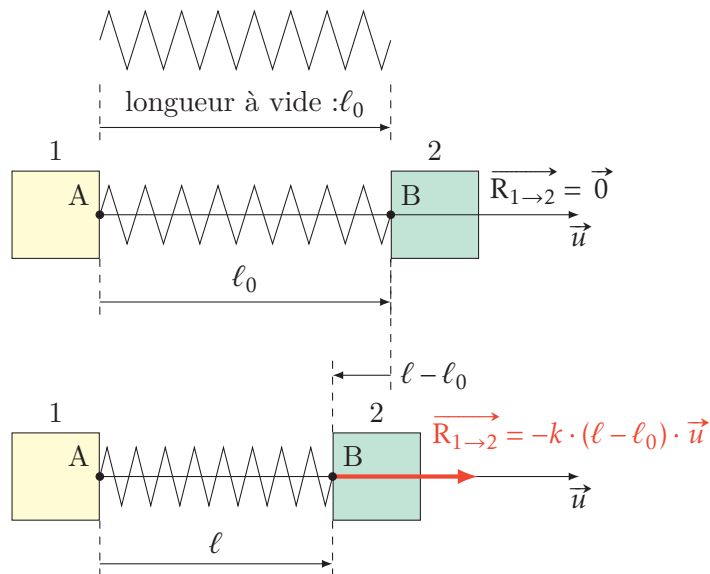
- de longueur à vide :  $\ell_0$  [m];
- de raideur :  $k$  [ $\text{Nm}^{-1}$ ];
- A et B, les points d'application de l'action du ressort sur les solides 1 et 2;
- d'axe  $(A, \vec{u})$ .

L'action mécanique développée par le solide (1) sur le solide (2) par ressort est proportionnelle à variation de longueur du ressort :

$$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = -k \cdot (\ell - \ell_0) \cdot \vec{u}$$

L'action mécanique développée par le ressort est donc modélisable par un torseur glisseur :

$$\{\mathcal{R}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$



### 8.8.2. Action mécanique développée par un ressort spiral

L'action mécanique appliquée par le ressort spiral, du solide 1 sur le solide 2 (figure 8.18) est un couple proportionnel à la différence angulaire.

$$\vec{C}_{1 \rightarrow 2} = -k_c \cdot (\theta - \theta_0) \cdot \vec{z}_1$$

avec :  $k_c$  la raideur du ressort [ $\text{Nrad}^{-1}$ ].

Le torseur associé à l'action mécanique d'un ressort spiral est un torseur couple

$$\{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_{VP}$$

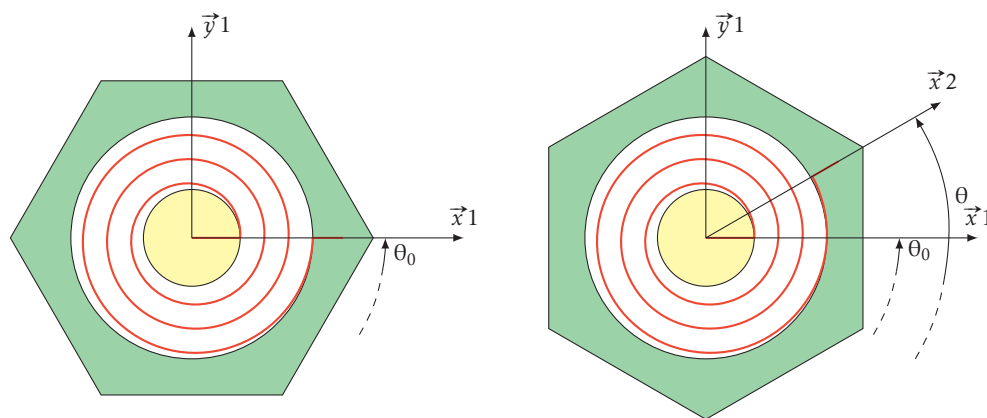


Figure 8.18. – Ressort spiral

### 8.8.3. Action mécanique d'un moteur

De la même manière l'action mécanique appliqué par le stator d'un moteur sur le rotor est modélisée par un torseur couple :

$$\{C_{s \rightarrow r}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C}_m = C_m \cdot \vec{u} \end{array} \right\}_{\forall P}$$

avec  $\vec{u}$  l'axe de rotation du rotor.

### 8.8.4. Action transmissible par un engrenage

#### a ). Engrenage droit

Dans le cas d'un engrenage droit à dentures parallèles, l'action mécanique transmise par une roue dentée sur l'autre se fait suivant la droite d'action. Elle est représentable par un torseur glisseur en I.

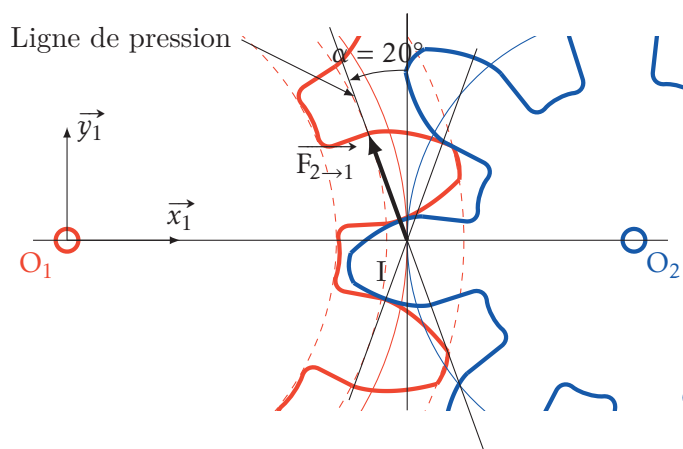


Figure 8.19. – Action mécanique dans un engrenage

Le torseur de l'action mécanique de la roue 2 sur la roue 1 s'écrit en I :

$$\{A_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

soit en projection dans la  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\{A_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon_1 \cdot F_{2 \rightarrow 1} \cdot \sin \alpha & 0 \\ \epsilon_2 \cdot F_{2 \rightarrow 1} \cdot \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_I}$$

avec  $\epsilon_1 = \pm 1$  et  $\epsilon_2 = \pm 1$  en fonction du repère et du sens de rotation de la roue 1. Dans le cas de la figure 8.19, on a :

$$\{A_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{ccc} +F_{2 \rightarrow 1} \cdot \sin 20^\circ & 0 \\ -F_{2 \rightarrow 1} \cos 20^\circ & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_I}$$

## b ). Engrenage hélicoïdal

Pour un engrenage droit à denture hélicoïdale, il est nécessaire de prendre en compte l'angle d'hélice.

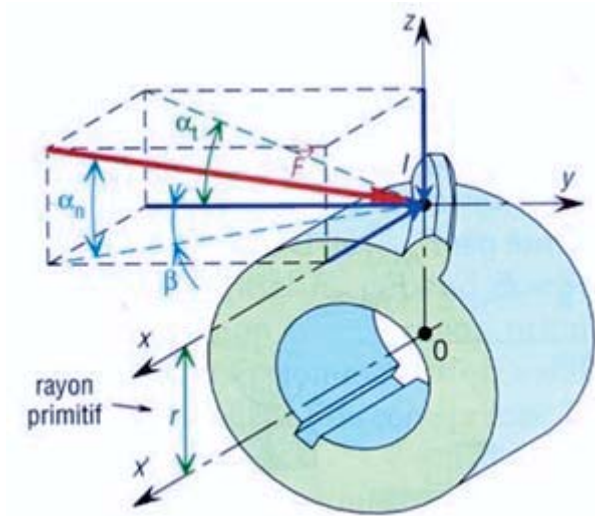


Figure 8.20. – Action mécanique sur une denture hélicoïdale (crédit Pierre Provot)

## 8.8.5. Action transmissible par un système vis-écrou

## 8.9. Torseur des actions transmissibles par les liaisons normalisées

Dans cette partie nous traiterons que le cas des liaisons parfaites, c'est-à-dire sans frottements.

## 8.9.1. Liaison Sphère-Plan (ponctuelle) parfaite

Nous avons déjà vu que le torseur de l'action ponctuelle parfaite s'écrit en I, le point de contact entre les deux solides :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \\ M_{I, F_{1 \rightarrow 2}} = \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

Dans toute base contenant le vecteur normal au plan tangent :  $(\vec{n}, \vec{?}, \vec{?})$ , le torseur de l'action transmissible par une liaison ponctuelle est de la forme :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{ll} F_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_I$$

$(\vec{n}, \vec{?}, \vec{?})$

Cette forme est valable en tout point P de l'axe  $(I, \vec{n})$

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{ll} F_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\forall P \in (I, \vec{n})}$$

$(\vec{n}, \vec{?}, \vec{?})$

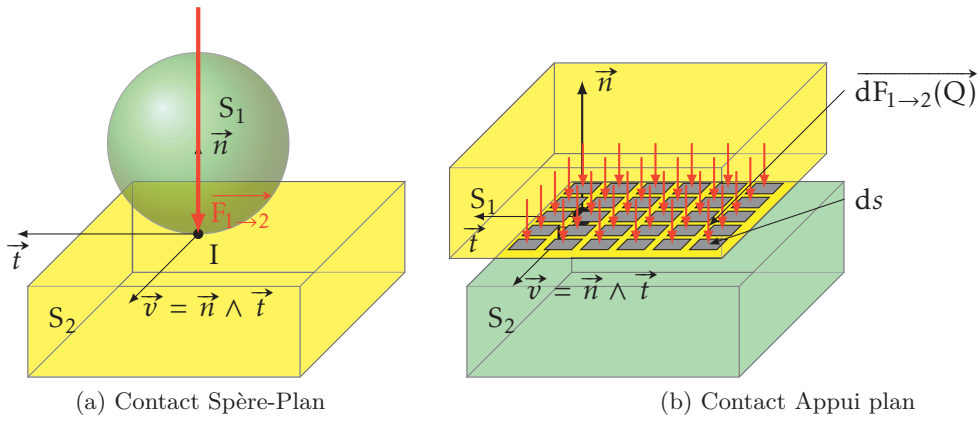


Figure 8.21. – Modélisation des contacts parfaits

Le torseur cinématique d'une liaison sphère-plan s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \quad 0 \\ \omega_2 \quad V_2 \\ \omega_3 \quad V_3 \end{array} \right\}_{\substack{\forall P \in (I, \vec{n}) \\ (\vec{n}, ?, ?)}}$$

On remarque que le comoment des deux torseurs est nul.

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} \otimes \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = 0$$

- $(\vec{n}, ?, ?)$  : indique que cette forme est valable dans toute base contenant le vecteur  $\vec{n}$ ,
- $\forall P \in (I, \vec{n})$  précise que le torseur à la forme proposée en tout point de l'axe  $(I, \vec{n})$ .

### 8.9.2. Liaison Appui-Plan

Le torseur d'un contact surfacique plan de normale  $\vec{n}$  s'écrit en un point O :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{P \in S} \vec{dF}_{1 \rightarrow 2}(Q) \\ \vec{M}_{O, F_{1 \rightarrow 2}} = \int_{Q \in S} \vec{OQ} \wedge \vec{dF}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_O$$

On considère

- que la surface de contact est rectangulaire :  $S = 2 \cdot a \times 2 \cdot b$ ,
- que la pression de contact est uniforme :  $p(Q) = p_0$  constant

Le torseur s'écrit donc :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -p \int_{P \in S} ds \cdot \vec{n} = -p \cdot S \cdot \vec{n} \\ \vec{M}_{O, F_{1 \rightarrow 2}} = -p \int_{Q \in S} \vec{OQ} \wedge ds \cdot \vec{n} \end{array} \right\}_O$$



Déterminons le moment en O, on pose  $\overrightarrow{OQ} = x \cdot \vec{t} + y \cdot \vec{v}$  avec  $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{v})$  une base orthonormée directe.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{O,F_{1 \rightarrow 2}}} &= -p_0 \int_{Q \in S} \overrightarrow{OQ} \wedge ds \cdot \vec{n} \\ \overrightarrow{M_{O,F_{1 \rightarrow 2}}} &= -p_0 \int_{Q \in S} (x \cdot \vec{t} + y \cdot \vec{v}) \wedge ds \cdot \vec{n} \\ \overrightarrow{M_{O,F_{1 \rightarrow 2}}} &= p_0 \int_{Q \in S} x \cdot ds \cdot \vec{v} - p_0 \int_{Q \in S} y \cdot ds \cdot \vec{t}\end{aligned}$$

On pose :

$$- M_t(O) = -p_0 \int_{Q \in S} y \cdot ds$$

$$- M_v(O) = p_0 \int_{Q \in S} x \cdot ds$$

Le torseur de l'action transmissible par la liaison appui plan s'écrit donc :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n} \\ \overrightarrow{M_{O,F_{1 \rightarrow 2}}} = M_t(O) \cdot \vec{t} + M_v(O) \cdot \vec{v} \end{array} \right\}_O = \begin{pmatrix} F_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & M_t(O) \\ 0 & M_v(O) \end{pmatrix}_O$$

$(\vec{n}, \vec{t}, \vec{v})$

Montrons que cette forme est vraie en tout point P = (n, t, v) de l'espace.

Déterminons le moment en P de l'action de pression :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{P,1 \rightarrow 2}} &= \overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{PO} \wedge F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n} \\ \overrightarrow{M_{P,1 \rightarrow 2}} &= M_t(O) \cdot \vec{t} + M_v(O) \cdot \vec{v} + (n \cdot \vec{n} + t \cdot \vec{t} + v \cdot \vec{v}) \wedge F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n} \\ \overrightarrow{M_{P,1 \rightarrow 2}} &= M_t(O) \cdot \vec{t} + M_v(O) \cdot \vec{v} - t \cdot F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v} + v \cdot F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{t} \\ \overrightarrow{M_{P,1 \rightarrow 2}} &= (M_t(O) + v \cdot F_{1 \rightarrow 2}) \cdot \vec{t} + (M_v(O) - t \cdot F_{1 \rightarrow 2}) \cdot \vec{v} \\ \overrightarrow{M_{P,1 \rightarrow 2}} &= M_t(P) \cdot \vec{t} + M_v(P) \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

Le torseur s'écrit donc en P :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n} \\ \overrightarrow{M_{P,F_{1 \rightarrow 2}}} = M_t(P) \cdot \vec{t} + M_v(P) \cdot \vec{v} \end{array} \right\}_P = \begin{pmatrix} F_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & M_t(P) \\ 0 & M_v(P) \end{pmatrix}_P$$

$(\vec{n}, \vec{t}, \vec{v})$

Le torseur a bien la même forme en tout point de l'espace, la forme canonique de ce torseur est donc :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n} \\ \overrightarrow{M_{P,F_{1 \rightarrow 2}}} = M_t \cdot \vec{t} + M_v \cdot \vec{v} \end{array} \right\}_P = \begin{pmatrix} F_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & M_t \\ 0 & M_v \end{pmatrix}_{\forall P}$$

$(\vec{n}, \vec{t}, \vec{v})$

Remarque 1 : : on comprend bien ici que même forme n'implique pas même valeur, le torseur en P à la même forme que le torseur en O mais les moments en P et en O sont différents.

Remarque 2 : : définir le torseur d'une liaison sous sa forme la plus générale laisse la liberté de choisir le point et la base de réduction les plus judicieux pour les calculs, mais une fois que ce point est choisi, les valeurs sont imposées.

Remarque 3 : : on note en général le torseur de l'action mécanique transmissible par la liaison sous la forme :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{\text{P}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

### 8.9.3. Relation entre torseur cinématique et torseur des efforts transmissibles par un liaison

Reprenons l'exemple de l'appui plan de l'exemple précédent.

Dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le torseur des actions transmissibles par une liaison appui plan de normale  $\vec{z}$  s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{array} \right\}_{\text{VP}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} = Z_{12} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M}_{\text{P}, 1 \rightarrow 2} = L_{12} \cdot \vec{x} + M_{12} \cdot \vec{y} \end{array} \right\}_{\text{P}}$$

Le torseur cinématique de cette même liaison s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_{\text{VP}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \omega_z \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V}_{\text{P} \in 2/1} = V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} \end{array} \right\}_{\text{P}}$$

Calculons le comoment des deux torseurs :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} &= \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \overrightarrow{V}_{\text{P} \in 2/1} + \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \cdot \overrightarrow{M}_{\text{P}, 1 \rightarrow 2} \\ \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} &= (Z_{12} \cdot \vec{z}) \cdot (V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y}) + (\omega_z \cdot \vec{z}) \cdot (L_{12} \cdot \vec{x} + M_{12} \cdot \vec{y}) \\ \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} &= 0 \end{aligned}$$

Le comoment du torseur cinématique et du torseur des efforts transmissible d'une liaison parfaite est nul.

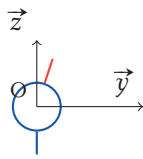
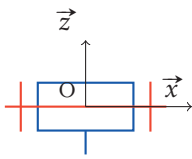
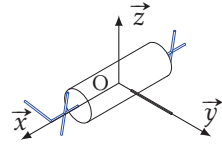
Le torseur cinématique et le torseur des efforts transmissibles d'une liaison sont deux torseurs duaux.

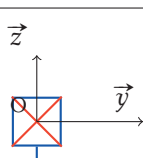
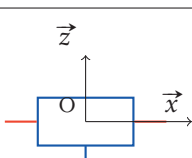
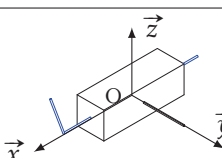
## 8.9.4. Tableau des liaisons normalisées

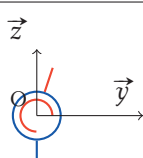
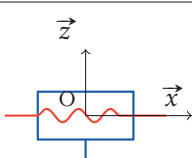
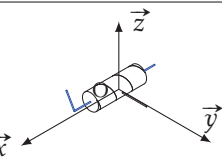
On retrouve dans chaque tableau :

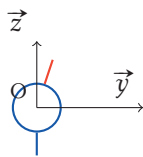
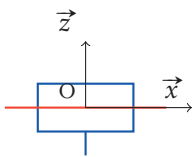
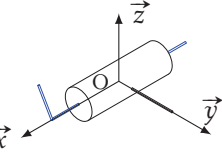
- $n_c$  : le nombre d'inconnue cinématique ;
- $n_s$  : le nombre d'inconnue statique ;
- les symboles normalisés plans ;
- le symbole 3D.

Remarque : dans les tableaux qui suivent,  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  se lit toute base comportant le vecteur  $\vec{z}$ .

Liaison Pivot Liaison Pivot d'axe $(O, \vec{x})$	
Torseur cinématique $\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{VP \in (O, \vec{x})} \quad , n_c = 1$ $(\vec{x}, ?, ?)$	Torseur des actions transmissibles $\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{VP \in (O, \vec{x})} \quad , n_s = 5$ $(\vec{x}, ?, ?)$
 	

Liaison Glissière Liaison Glissière de direction $\vec{x}$	
$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{VP} \quad , n_c = 1$ $(\vec{x}, ?, ?)$	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{VP} \quad , n_s = 5$ $(\vec{x}, ?, ?)$
 	

Liaison Hélicoïdale Liaison Hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$	
$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{VP \in (O, \vec{x})} \quad V_x = \frac{p}{2 \cdot \pi} \omega_x$ $(\vec{x}, ?, ?) \quad n_c = 1$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{VP \in (O, \vec{x})} \quad L = -\frac{p}{2 \cdot \pi} X$ $(\vec{x}, ?, ?) \quad n_s = 5$
 	

Liaison Pivot Glissant Liaison Pivot Glissant d'axe $(O, \vec{x})$	
$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{VP \in (O, \vec{x})} \quad , n_c = 2$ $(\vec{x}, ?, ?)$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{VP \in (O, \vec{x})} \quad , n_s = 4$ $(\vec{x}, ?, ?)$
 	

Liaison Sphérique Liaison Sphérique de centre C	
$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{C \sqrt{B}}, n_c = 3$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{C \sqrt{B}}, n_s = 3$

Liaison Sphérique à doigt Liaison Sphérique à doigt de centre C et de doigt $a_x e_O x$	
$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C \sqrt{B}}, n_c = 2$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{Bmatrix}_{C \sqrt{B}}, n_s = 4$

Liaison Appui Plan Liaison Appui Plan de normale $\vec{z}$	
$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_z \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{y_{PP} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, n_c = 3$	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{y_{PP} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, n_s = 3$

Liaison Sphère Cylindre - Linéaire Annulaire Liaison Sphère Cylindre de centre C et d'axe $(C, \vec{x})$	
$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{C (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, n_c = 4$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{C (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, n_s = 2$

Liaison Cylindre Plan - Linéaire Rectiligne	
Liaison Cylindre Plan de normale $\vec{z}$ et de droite $(I, \vec{x})$ , I un point de la droite de contact	
$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_x \\ V_y \\ 0 \end{array} \right\}, n_c = 4$ $\text{VP} \in (I, \vec{x})$ $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ Z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ M \\ 0 \end{array} \right\}, n_s = 2$ $\text{VP} \in (I, \vec{x})$ $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
Liaison Sphère Plan - ponctuelle	
liaison Sphère Plan de normale $(I, \vec{z})$ , I point de contact	
$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_x \\ V_y \\ 0 \end{array} \right\}, n_c = 5$ $\text{VP} \in (I, \vec{z})$ $(\vec{?}, \vec{?}, \vec{z})$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ Z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}, n_s = 1$ $\text{VP} \in (I, \vec{z})$ $(\vec{?}, \vec{?}, \vec{z})$

Le principe fondamental de la statique (P.F.S..) exprime les conditions d'équilibre d'un système matériel dans un référentiel.

### 9.1. Définitions préalables

#### 9.1.1. Système matériel - système matériel isolé

On appelle système matériel tout ensemble constitué de solides et de fluides.

Un système isolé, est un système matériel que l'on rend distinct de son environnement. Le système isolé peut être une pièce mécanique, un ensemble de pièces, une partie de pièce, un fluide. L'isolement consiste à couper l'espace en deux parties disjointes afin de séparer, le système isolé ( $\Sigma$ ) de son environnement ( $\bar{\Sigma}$ ).

On nomme frontière d'isolement la limite entre les deux milieux.

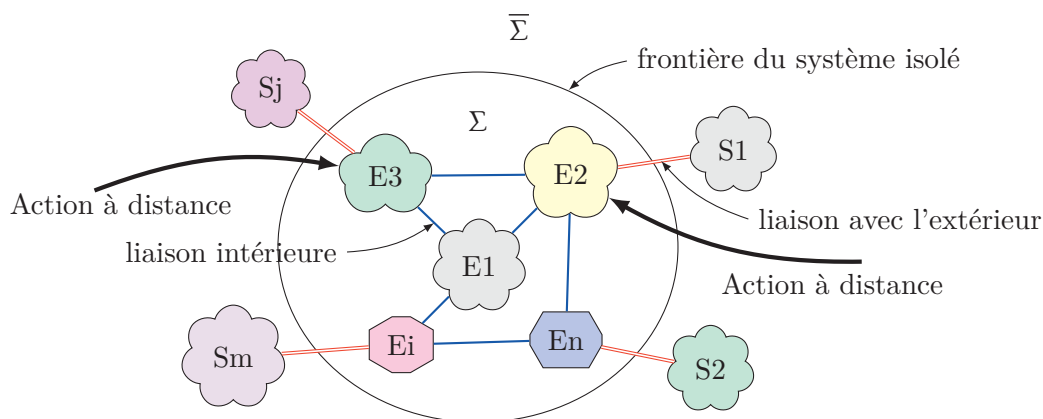


Figure 9.1. – Système isolé

#### 9.1.2. Équilibre d'un système matériel

On dit qu'un système est en équilibre par rapport à un repère entre deux dates  $t_1$  et  $t_2$  si tous les points du système isolé sont invariants dans  $R_0$ .

### 9.1.3. Équilibre d'un ensemble de solide

Pour qu'un système composé d'un ensemble de solides soit en équilibre, il faut et il suffit que :

- il soit en équilibre à l'instant de l'étude ;
- chacun des solides qui le composent soit en équilibre.

### 9.1.4. Actions mécaniques extérieures

On appelle action mécanique extérieure appliquée à un système matériel isolé, toutes les actions mécaniques agissant sur ce système, dont l'origine est à l'extérieur du système. Ces actions sont : soit des actions mécaniques de contact, soit des actions à distances (gravité).

$$\{\mathcal{A}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} \\ M_{P, \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} \end{array} \right\}_P$$

### 9.1.5. Actions mécaniques intérieures

Les actions mécaniques intérieures sont les actions mécaniques que s'exercent mutuellement les différents constituants du système isolé.

Remarque : la notion d'actions mécaniques extérieures et intérieures ne dépend que de la frontière du système isolé.

## 9.2. Principe Fondamental de la Statique - P.F.S.

### 9.2.1. Énoncé

Il existe au moins un repère Galiléen tel que pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à ce repère, le torseur représentatif des actions extérieures qui lui sont appliquées est égal au torseur nul :

$$\{\mathcal{A}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \{0\}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} \\ M_{P, \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} \end{array} \right\}_P = \{0\}$$

En décomposant le torseur des actions extérieures chaque action extérieure on peut écrire :

$$\{\mathcal{A}_{S_1 \rightarrow E_1}\} + \{\mathcal{A}_{S_2 \rightarrow E_2}\} + \{\mathcal{A}_{S_i \rightarrow E_j}\} + \dots = \{0\}$$

puis en sommant chaque torseur au même point :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{S_1 \rightarrow E_1}} \\ M_{P, S_1 \rightarrow E_1} \end{array} \right\}_P + \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow E_2}} \\ M_{P, S_2 \rightarrow E_2} \end{array} \right\}_P + \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow E_j}} \\ M_{P, S_i \rightarrow E_j} \end{array} \right\}_P + \dots = \{0\} \\ \sum_{i,j} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow E_j}} \\ M_{P, S_i \rightarrow E_j} \end{array} \right\}_P = \{0\} \end{aligned}$$

Remarque : le principe fondamental de la statique est énoncé dans un repère Galiléen, compte tenu des mécanismes étudiés et dans la mesure où la durée de l'étude est courte, un repère lié à la



terre est une bonne approximation. La notion de repère Galiléen sera approfondi en seconde année et dans le cours de physique.

Remarque : La condition

$$\{\mathcal{A}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \{0\}$$

appliquée à un ensemble de solides n'implique pas que l'ensemble est en équilibre. Il est nécessaire de vérifier que chaque solide constituant l'ensemble est lui-même en équilibre.

### 9.2.2. Théorèmes généraux

À partir de

$$\sum_{i,j} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow E_j}} \\ \overrightarrow{M_{P, S_i \rightarrow E_j}} \end{array} \right\}_P = \{0\}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{i,j} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow E_j}} \\ \sum_{i,j} \overrightarrow{M_{P, S_i \rightarrow E_j}} \end{array} \right\}_P = \{0\}$$

on déduit les deux théorèmes généraux de la statique

#### a ). Théorème de la résultante statique

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un repère Galiléen, la résultante du torseur représentatif des actions extérieures appliquées à (E) est un vecteur nul.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} &= \vec{0} \\ \sum_{i,j} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow E_j}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

#### b ). Théorème du moment statique

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un repère Galiléen, le moment du torseur représentatif des actions extérieures appliquées à (E) est un vecteur nul.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{P, \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} &= \vec{0} \\ \sum_{i,j} \overrightarrow{M_{P, S_i \rightarrow E_j}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

#### c ). Écriture scalaire du principe fondamental de la statique

L'équilibre d'un ensemble matériel  $\Sigma$  est décrit par un système linéaire de 6 équations, 3 équations pour traduisant le théorème de la résultante statique et 3 pour le moment statique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i X_i = 0 \\ \sum_i Y_i = 0 \\ \sum_i Z_i = 0 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \sum_i L_i = 0 \\ \sum_i M_i = 0 \\ \sum_i N_i = 0 \end{array} \right.$$

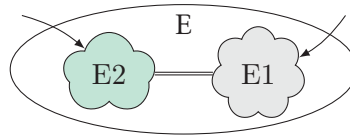
avec  $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i$  et  $N_i$  les composantes des actions mécaniques extérieures à  $\Sigma$ .

### 9.2.3. Théorème des actions réciproques

L'action mécanique du système (E1) sur le système (E2) est opposée à l'action mécanique de (E2) sur (E1).

$$\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}\} = -\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\}$$

Pour le démontrer, considérons un système matériel (E) composé de deux systèmes matériels  $E = \{E1 + E2\}$ .



On applique le P.F.S.. successivement à (E1), (E2) et (E).

— On isole E1, le P.F.S.. s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{\bar{1} \rightarrow 1}\} = \{0\}$$

On fait apparaître le solide 2, d'où la première égalité

$$\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow 1}\} \& = \{0\}$$

— On isole E2, le P.F.S.. s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{\bar{2} \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

On fait apparaître le solide 1 d'où

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow 2}\} \& = \{0\}$$

— On isole E, le P.F.S.. s'écrit en faisant apparaître les solides 1 et 2 :

$$\{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow E}\} = \{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow \{E_1 + E_2\}}\} = \{0\}$$

on obtient :

$$\{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow E_1}\} + \{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow E_2}\} = \{0\}$$

Finalement on trouve en ajoutant les trois égalités (a) + (b) - (c), la relation recherchée.

$$\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}\} = -\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\}$$

### 9.2.4. Principe fondamental de la statique pour un ensemble de solides

Pour un système composé de  $N$  solides, ce système est en équilibre si chaque solide le composant est en équilibre.

Il est donc nécessaire d'écrire le P.F.S. sur  $(N - 1)$  solides ou ensemble de solide. Il n'est pas utile d'écrire le P.F.S. sur le dernier solide, celui-ci peut s'obtenir par combinaison linéaires des autres équilibres.

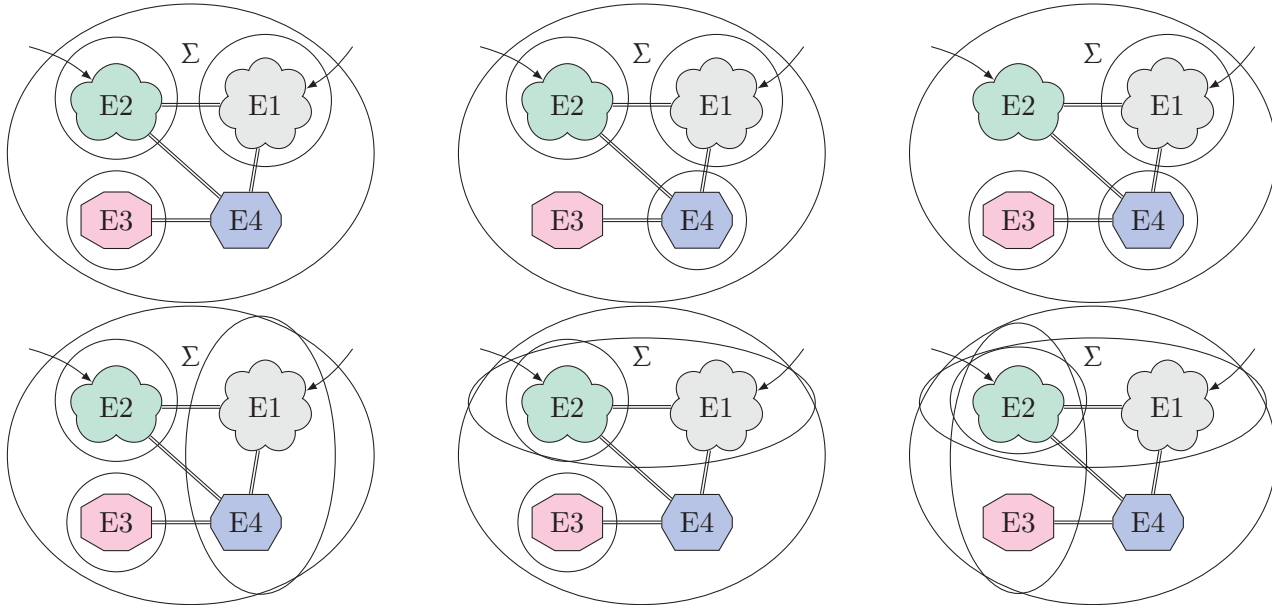


Figure 9.2. – Quelques isolements possibles de 4 solides

La figure 9.2 présente quelques possibilités d'isolement d'un mécanisme de 4 solides. Chaque solide peut être isolé seul, ou associé à d'autres.

## 9.3. Résolution d'un problème de statique

### 9.3.1. Mécanismes spatiaux - cas général

On peut classer les problèmes de statique dans deux familles, suivant que l'on s'intéresse à la relation entre les efforts « extérieurs » appliqués sur le système ou aux efforts dans les liaisons en fonction des efforts extérieurs connus.

Dans le premier cas on essaiera d'identifier les équations extraites du P.F.S. juste nécessaire pour obtenir le résultat cherché, dans l'autre cas il sera souvent nécessaire de tout écrire.

#### a ). Domaine d'utilisation du P.F.S.

Le P.F.S. est utilisé pour déterminer les actions mécaniques d'un mécanisme immobile.

Le P.F.S. peut-aussi être utilisé lorsque les vitesses des solides sont constantes et/ou que les masses et inerties des solides sont négligeables.

#### b ). Procédure de résolution du problème

Analyser le mécanisme, c'est-à-dire :

— Caractérisation du mécanisme :

- préciser les classes d'équivalence cinématique ;
- définir les liaisons (torseurs des actions transmissibles) ;
- établir le graphe de structure ;
- tracer le schéma cinématique ;
- faire le bilan des inconnues de liaison ;
- Identifier les efforts appliqués sur le mécanisme ;
  - action à distance (poids) ;
  - efforts extérieurs, moteur, ressort, etc ;
  - placer ces efforts sur le graphe de structure ;
- Définir les ensembles à isoler (pièce seule ou ensemble de pièces) ;
  - choisir les ensembles en fonction du nombre d'inconnues par isolement, essayer de ne faire que des isolements que l'on peut résoudre (6 inconnues au maximum) ou qui donne rapidement des informations pour la suite des calculs ;
    - solide ou ensemble de solides soumis à 2 glisseurs (voir chapitre 9.3.3)
    - solide ou ensemble de solides soumis à 3 glisseurs (voir chapitre 9.3.4)
- Résoudre progressivement le système ;
  - écrire le P.F.S. sur chaque sous système isolé du moins complexe vers le plus complexe ;
  - intégrer les résultats des isolements précédents avant de poursuivre l'application du P.F.S.

## 9.3.2. Exercice guide

## Exercice 4- Safran de Voilier

Corrig page ??

Le safran d'un voilier lui permet de se diriger. Dans le cas du pilote hydraulique du laboratoire, l'angle du safran est asservi afin de pouvoir maintenir un cap, en tenant compte des aléas extérieurs (courants marins, vents violents...). Le safran est actionné par un vérin hydraulique, la pièce 2 étant relié à la tige du vérin et la pièce 3 constituant le corps du vérin. La pièce 1 représente le safran sur lequel agit la pression de l'eau  $p$ , perpendiculairement au plan du safran.

L'objectif de l'étude est de calculer les efforts dans les liaisons dans le but ultérieur de dimensionner le vérin hydraulique et les éléments mécaniques assurant les liaisons (éléments roulants ou coussinets).



Safran... du SAFRAN (Skipper Marc Guillemot)

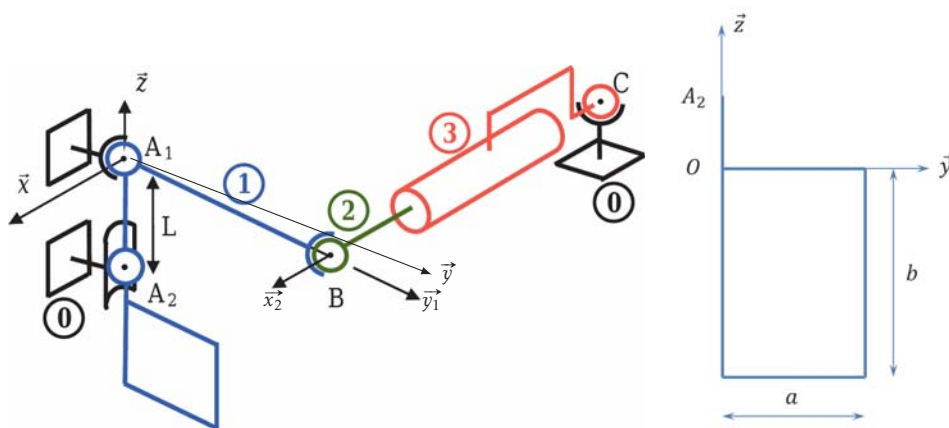


Figure 9.3. – Schéma d'architecture

On donne :

$$\begin{aligned}
 - \overrightarrow{A_1 C} &= -c \cdot \vec{x} + d \cdot \vec{y} & - \overrightarrow{CB} &= \lambda \cdot \vec{x}_2 & - \alpha &= (\vec{x}, \vec{x}_2) \\
 - \overrightarrow{A_1 B} &= h \vec{y}_1 & - \theta &= (\vec{y}, \vec{y}_1)
 \end{aligned}$$

Q1. Tracer le graphe de structure associé au système.

Q2. Préciser les torseurs des actions transmissibles pour chaque liaison.

Q3. Sur le graphe de structure du système indiquer par des flèches les actions mécaniques agissant sur chacune des pièces.

Par la suite, on négligera l'action de la pesanteur sur les pièces 2 et 3.

<p>Lorsque le gouvernail est situé dans l'alignement du voilier, l'eau exerce une force de traînée <math>T</math> sur le safran du gouvernail (due en grande partie à la forme du safran) qui s'accroît avec la vitesse. Cet effort est alors supporté par la liaison pivot entre le gouvernail et le navire et n'engendre aucun effort sur le pilote.</p>	<p>Si le gouvernail pivote, l'eau exerce une nouvelle force de portance <math>P</math> sur le safran (due à la pression exercée sur la face externe et à la dépression exercée sur la face interne du safran) qui s'accroît avec la vitesse du navire. Plus l'angle d'inclinaison du gouvernail / à l'axe du bateau est grand, plus l'effort supporté par le pilote est important.</p>

- Q4. Déterminer le torseur d'action mécanique de l'eau sur le gouvernail au point  $A_2$ . On considèrera que  $\overrightarrow{OA_2} = \vec{0}$  et que le point d'application de l'action de l'eau est au milieu du safran au tiers inférieur. On négligera l'épaisseur du safran.
- Q5. Après avoir isolé le solide 1, appliquer le principe fondamental de la statique au point  $A_1$ . Quelles inconnues peuvent être déterminées? Aurait-on pu le prévoir?
- Q6. Après avoir isolé l'ensemble  $\{2 + 3\}$ , appliquer le principe fondamental de la statique au point B. Quelles inconnues ont pu être déterminées?
- Q7. Déterminer l'effort à délivrer par le vérin pour supporter la pression de l'eau sur le safran.
- Q8. Déterminer alors la pression à délivrer par le vérin en fonction d'une section  $S$ .

## 9.3.3. Solide soumis à 2 glisseurs

Soit un solide soumis à deux actions mécaniques une en A, l'autre en B représentables par des torseurs glisseurs.

$$\{\mathcal{T}_{A_{ext \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{B_{ext \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

Alors les deux résultantes :

- ont même norme  $\|\vec{R}_A\| = \|\vec{R}_B\|$ ,
- et sont de direction opposée  $\vec{R}_A = -\vec{R}_B$  portées par  $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$

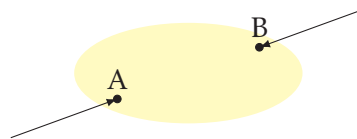


Figure 9.4. – Solide soumis à 2 glisseurs

Remarque : : par abus de langage on dira « solide soumis à deux glisseurs » pour « solide soumis à deux actions mécaniques représentable par des torseurs glisseurs ».

Pour vérifier, il suffit d'appliquer le PFS au solide en A.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{A_{ext \rightarrow 1}}\} + \{\mathcal{T}_{B_{ext \rightarrow 1}}\} &= \{0\} \\ \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{AB} \wedge \vec{R}_B \end{array} \right\}_B &= \{0\} \end{aligned}$$

On a bien

$$\vec{R}_A = -\vec{R}_B \quad \text{et} \quad \vec{AB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0}$$

Le produit vectoriel est nul si  $\vec{AB}$  est colinéaire à  $\vec{R}_B$ .

## 9.3.4. Solide soumis à 3 glisseurs

Soit un solide soumis à l'action de 3 torseurs glisseurs, en A, B et C,

$$\{\mathcal{T}_{A_{ext \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A, \quad \{\mathcal{T}_{B_{ext \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{C_{ext \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_C \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

- alors les trois droites supports sont coplanaires et
  - soit les trois droites supports des résultantes sont concourantes en I;
  - soit les trois résultantes sont parallèles.

Montrons dans un premier la coplanarité :

Le P.F.S. en A s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{A_{ext \rightarrow 1}}\} + \{\mathcal{T}_{B_{ext \rightarrow 1}}\} + \{\mathcal{T}_{C_{ext \rightarrow 1}}\} &= \{0\} \\ \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{AB} \wedge \vec{R}_B \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_C \\ \vec{AC} \wedge \vec{R}_C \end{array} \right\}_A &= \{0\} \end{aligned}$$

le théorème de la résultante statique s'écrit :

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{R}_C = \vec{0}$$

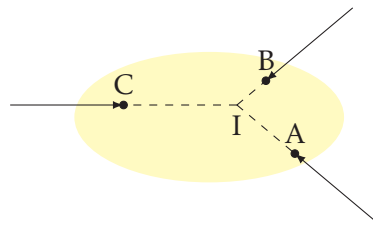


Figure 9.5. – Solide soumis à 3 glisseurs

la somme vectorielle est nulle

Le théorème du moment s'écrit :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{R_C} = \vec{0}$$

pour que cette somme soit nulle, il faut que les deux vecteurs soient opposés :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_B} = -\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{R_C}$$

ces vecteurs sont donc perpendiculaires au plans  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{R_B})$  et au plan  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{R_C})$ . le point A étant commun au deux plans, les vecteurs  $\overrightarrow{R_B}$  et  $\overrightarrow{R_C}$  sont dans le plan (A, B, C).

On montre de la même manière que  $\overrightarrow{R_A}$  est aussi dans le plan (A, B, C).

Montrons maintenant que soit les résultantes sont soit concourantes, soit parallèles :

Résultantes concourantes : Soit I le point d'intersection des deux droites supports de  $\overrightarrow{R_A}$  et  $\overrightarrow{R_B}$ . Les torseurs en de l'action mécanique en A et B s'écrivent en I :

$$\{\mathcal{T}_{A_{ext} \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_A} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{B_{ext} \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_B} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

Le P.F.S. s'écrit donc en I :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{A_{ext} \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{B_{ext} \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{C_{ext} \rightarrow 1}\} &= \{0\} \\ \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_A} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_B} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_C} \\ \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{R_C} \end{array} \right\}_I &= \{0\} \end{aligned}$$

Du théorème du moment, on déduit :

$$\overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{R_C} = \vec{0}$$

Ce vecteur n'est nul que si  $\overrightarrow{IC} // \overrightarrow{R_C}$ . Les trois résultantes sont donc concourantes.

Résultantes parallèles : Soit  $\overrightarrow{R_A}$  et  $\overrightarrow{R_B}$  les résultantes de deux actions mécaniques avec  $\overrightarrow{R_A} // \overrightarrow{R_B}$ .

Le théorème de la résultante s'écrit :

$$\overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_C} + \overrightarrow{R_C} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{R_C} = -(\overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_C})$  est donc aussi parallèle aux deux autres. Le théorème du moment s'écrit :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{R_C} = \vec{0}$$

### 9.3.5. Mécanismes plans

a ). Hypothèses spécifiques

On peut modéliser un système par un système « plan », si :

- la géométrie des liaisons d'un système matériel présente un plan de symétrie,
  - tous les mouvements de rotations sont perpendiculaires à ce plan,
  - tous les mouvements de translations sont parallèles à ce plan.
- les actions mécaniques extérieures exercées sur ce système sont symétriques par rapport à ce plan,
  - les résultantes des actions mécaniques extérieures sont parallèles au plan de symétrie,



— les moments des actions mécaniques extérieures sont perpendiculaires au plan de symétrie.

Les torseurs des actions mécaniques se mettent alors sous la forme :

$$\{\mathcal{A}_{ext \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} X \\ Y \\ [0] \end{array} \right\}_{\substack{[0] \\ [0] \\ N \\ P \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$$

avec P un point du plan de symétrie et  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  une base avec  $\vec{z}$  la normale au plan.

Nous avons déjà vu la notion de mécanisme plan du point de vue de la cinématique cela correspond à des mécanismes dont les seuls mouvements possibles sont des translations parallèles au plan d'étude, et /ou des rotations perpendiculaires à ce plan.

La notion de mécanisme plan du point de vue de statique complète cette notion en imposant une répartition spatiale symétrique des efforts par rapport au plan d'étude.

Remarque : dans ce cours, la notation  $[0]$ , correspond à une valeur nulle pour la composante du torseur par le choix de l'hypothèse « mécanisme plan ».

### 9.3.6. Liaisons planes

Le tableau 9.1 présente les 3 liaisons utilisables pour modéliser un mécanisme plan.

Liaison Pivot plane ou articulation : liaison pivot plane d'axe $(O, \vec{z})$		
Torseur cinématique	Torseur des actions transmissibles	Symbole
$\left\{ \begin{array}{l} [0] \\ [0] \\ \omega_z \end{array} \right\}_{\substack{V_P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>1 inconnue cinématique</p>	$\left\{ \begin{array}{l} X \\ Y \\ [0] \end{array} \right\}_{\substack{V_P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>3 inconnues de liaisons</p>	
Liaison Glissière plane : Glissière plane de direction $\vec{x}$		
$\left\{ \begin{array}{l} [0] \\ [0] \\ 0 \end{array} \right\}_{\substack{V_P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>1 inconnue cinématique</p>	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ Y \\ [0] \end{array} \right\}_{\substack{V_P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>3 inconnues de liaisons</p>	
Liaison ponctuelle plane : Ponctuelle plane de normale $(I, \vec{y})$		
$\left\{ \begin{array}{l} [0] \\ [0] \\ \omega_z \end{array} \right\}_{\substack{V_P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>1 inconnue cinématique</p>	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ Y \\ [0] \end{array} \right\}_{\substack{V_P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>3 inconnues de liaisons</p>	

Table 9.1. – Liaisons planes

## 9.4. Notion d'hyperstaticité

Le P.F.S. permet, à priori, de déterminer les composantes du torseur des actions transmissibles par une liaisons. On nomme ces composantes, les inconnues statiques de la liaisons.

Lorsque l'on étudie l'équilibre d'un mécanisme comportant  $N$  solides et  $L$  liaisons, chaque liaison comportant  $n_{si}$  inconnues ( $0 < n_{si} < 6$ ), on doit résoudre un système d'équation comportant :

—  $E_s = 6 \cdot (N - 1)$  équations,

—  $I_s = \sum_{i=1}^L n_{si}$  inconnues.

Ce système ne peut être résolu que si  $I_s = r_s$  avec  $r_s$  le rang du système d'équation.

— si  $I_s > r_s$ , il n'est pas possible de tout déterminer, le mécanisme est dit alors hyperstatique. on nomme  $h = I_s - r_s$  le degré d'hyperstaticité.

— si  $r_s = I_s$ , toutes les inconnues de liaison sont déterminables en fonction des efforts « extérieurs » appliqués sur le mécanisme. le mécanisme est dit isostatique, alors  $h = 0$ .

On peut aussi déduire de cette étude le degré de mobilité du mécanisme, c'est à dire, le nombre de mouvements indépendant du mécanisme.

On nomme  $m = E_s - I_s$  le degré de mobilité du mécanisme.

— si  $m = 0$  le mécanisme est immobile

— si  $m > 0$ , le mécanisme est alors dit mobile de degré  $m$ .

Cette notion d'hyperstaticité sera approfondi en deuxième année