

CHAPITRE

1

SYSTÈMES ASSERVIS

Devoir 1- Chaudière à bois déchiqueté

Corrigé page 26

A. Présentation générale

(Voir figure 1) Dans le cadre du « Grenelle de l'environnement » et de la mise en place de la « taxe carbone », l'avenir du chauffage est conditionné au fait que la biomasse est neutre en dégagement de CO₂. HARGASSNER développe la technologie du chauffage au bois déchiqueté et aux granulés de bois dans le but de concilier un chauffage à la fois écologique et confortable d'utilisation. L'entreprise est devenue un leader en matière de technique innovante, de développement, de service, de qualité et de longévité dans le domaine du chauffage au bois.

L'étude porte sur la chaudière HSV 30, alimentée en bois déchiqueté, qui développe une puissance de chauffe de 25 à 35 kW.

Le bois déchiqueté est amené jusqu'à la chaudière

dans un premier temps à l'aide d'un extracteur à lames puis de la vis d'extraction et enfin par la vis d'introduction. Il est alors brûlé au sein d'un foyer réfractaire développant des gaz dans la chambre de combustion. Les gaz sont dépoussiérés dans la chambre de détente avant de passer dans un échangeur tubulaire équipé de turbulateurs. Ces turbulateurs augmentent l'efficacité de l'échangeur et permettent son nettoyage automatique. L'échangeur permet le chauffage de l'eau à partir des fumées. Une vis de dépoussiérage et une vis de décentrage, associées aux turbulateurs évacuent automatiquement les cendres et les suies dans un cendrier.

Dans cette étude, on ne s'intéresse qu'au fonctionnement de la chaudière.

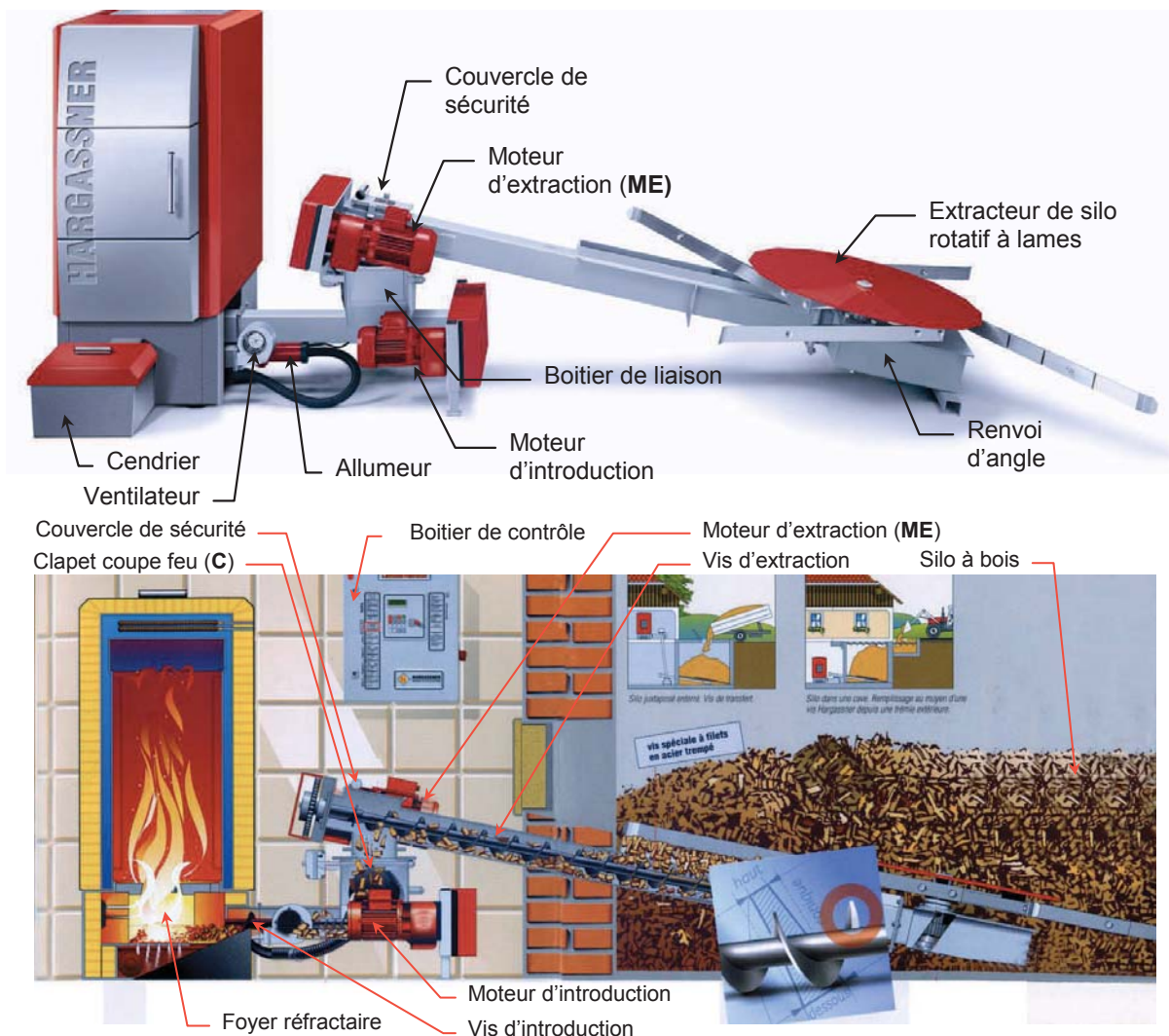


FIGURE 1 – Mise en situation

B. Étude de la fonction « Chauffer l'eau »

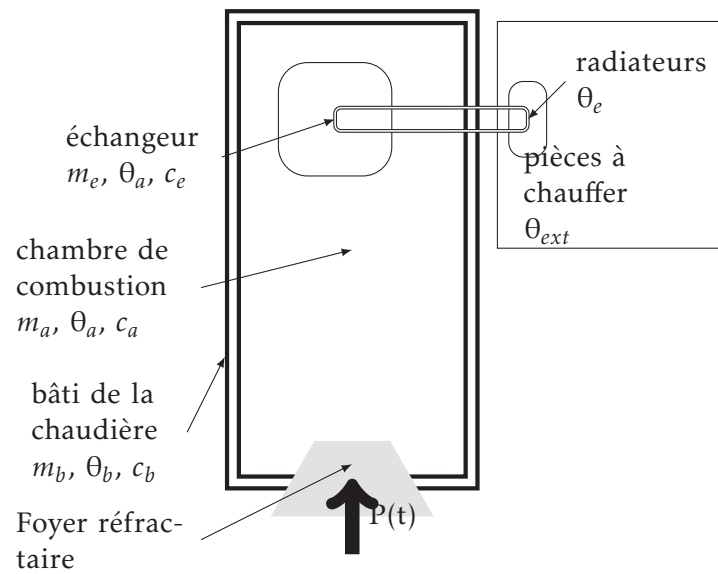
B.1. Modélisation

Par l'intermédiaire d'un échangeur thermique, la combustion des granules de bois permet de chauffer de l'eau.

L'étude porte sur la montée en température de l'eau qui sert à chauffer les pièces au travers de radiateurs. Cette température est obtenue à partir d'une puissance calorifique fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire de la chaudière.

On considère que :

- $p(t)$ est la puissance calorifique en Watt fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire. Elle permet la montée en température du bâti de la chaudière;
- l'air situé dans la chambre de combustion permet de monter à la température $\theta_e(t)$ l'eau située dans l'échangeur;
- l'eau chaude, au travers des radiateurs permet de chauffer les pièces à une température $\theta_{ext}(t)$.



- $\theta_b(t)$ la température du bâti de la chaudière;
- m_b la masse du bâti à monter en température; $m_b = 200 \text{ kg}$;
- c_b la capacité calorifique massique du bâti; $c_b = 500 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- $\theta_a(t)$ la température de l'air dans la chambre de combustion;
- m_a la masse de l'air à monter en température; $m_a = 2 \text{ kg}$;
- c_a la capacité calorifique massique de l'air; $c_a = 700 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- $\theta_e(t)$ la température de l'eau dans l'échangeur et les radiateurs; $m_e = 50 \text{ kg}$;
- c_e la capacité calorifique massique de l'eau; $c_e = 4000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- θ_{ext} la température ambiante des pièces à chauffer.

On pose

- K_{ab} la conductance thermique entre le bâti et l'air dans la chambre de combustion; K_{ab} la conductance thermique entre le bâti et l'air dans la chambre de combustion; $K_{ab} = 40 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- K_{ae} la conductance thermique entre l'air et l'eau au travers de l'échangeur ou des radiateurs; $K_{ae} = 400 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

On suppose que le corps de chauffe est parfaitement isolé de l'extérieur.

Les principes de conservation de l'énergie conduit à une modélisation par les équations différentielles ci-dessous.

Les transformées de Laplace sont notées :

$$\mathcal{L}[\theta_i(t)] = T_i(p) \text{ et } \mathcal{L}[p(t)] = P(p).$$

$$m_b c_b \frac{d\theta_b(t)}{dt} + K_{ab} (\theta_b(t) - \theta_a(t)) = p(t) \quad (1)$$

$$m_a c_a \frac{d\theta_a(t)}{dt} + K_{ae} (\theta_a(t) - \theta_e(t)) = K_{ab} [\theta_b(t) - \theta_a(t)] \quad (2)$$

$$m_e c_e \frac{d\theta_e(t)}{dt} + K_{ae} (\theta_e(t) - \theta_{ext}(t)) = K_{ae} [\theta_a(t) - \theta_e(t)] \quad (3)$$

C. Identification expérimentale

À la première mise en route de la chaudière, l'installateur a réalisé un relevé de la température de l'eau circulant dans les radiateurs dans les conditions réelles de fonctionnement (la température extérieure était proche de 0°C), afin d'évaluer le temps de réponse du système installé. L'installateur a fait fonctionner la chaudière avec un chargement de bois tel que la puissance de chauffe soit maximale $p(t) = P_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ ($\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside) avec $P_0 = 10 \text{ kW}$.

La figure 2 présente ce relevé.

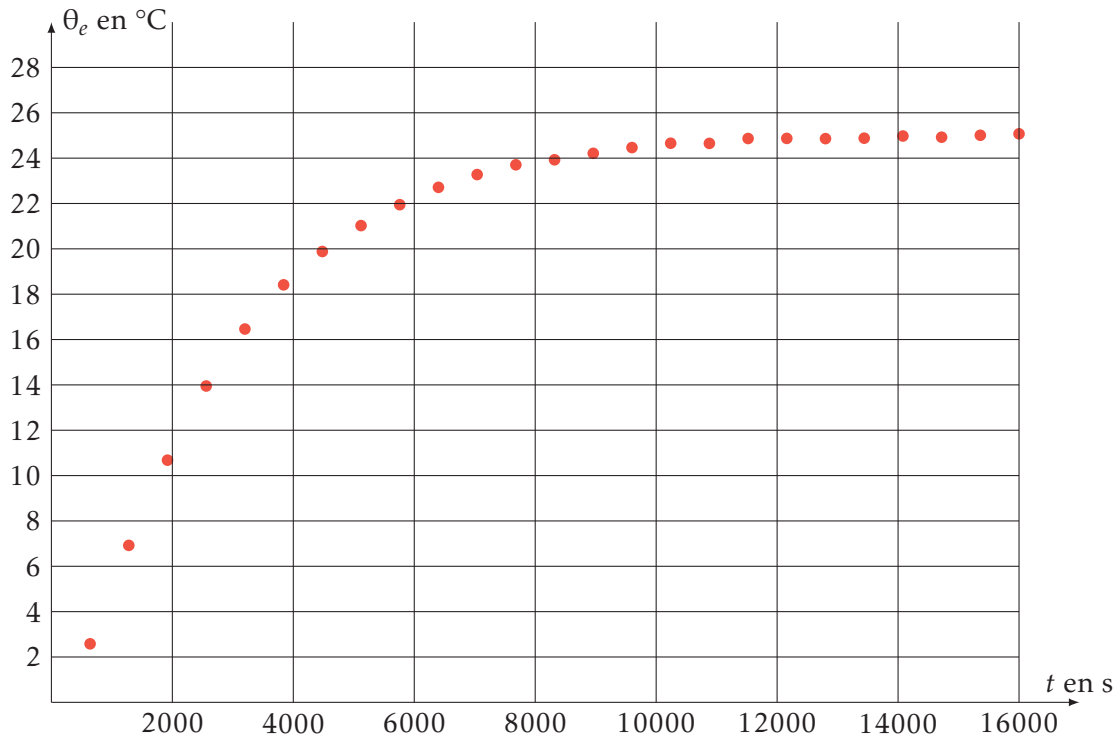


FIGURE 2 – Relevé temporel de la montée en température

Q1. Déterminer $T_{5\%}$, le temps de réponse à 5%, la valeur finale.

On se propose d'identifier le comportement du système par un modèle du premier ordre :

$$H(p) = \frac{T_c(p)}{P(p)} = \frac{K}{1 + T \cdot p}$$

avec $T_c(p)$ la transformée de Laplace de $\theta_e(p)$ et $P(p)$, la transformée de Laplace de $p(t)$.

Q2. À partir de la réponse temporelle, déterminer les termes du modèle expérimental K et T (préciser les tracés nécessaires sur la courbe de la figure 2).

Q3. Déterminer $\theta(t)$, la réponse temporelle pour l'échelon de puissance $p(t) = P_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ ($\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside) avec $P_0 = 10 \text{ kW}$. Tracer l'allure de la réponse temporelle sur le graphe précédent. Préciser les points et éléments particuliers.

D. Modélisation de connaissance

On se propose maintenant d'établir le modèle de connaissance du système à partir des équations différentielles qui décrivent le comportement.

Q4. En supposant que les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), donner dans le domaine de Laplace, la transformée des équations différentielles (1), (2) et (3).

.....

.....

.....

.....

.....

Q5. Exprimer $T_b(p)$ en fonction de $T_a(p)$ et de $P(p)$ en faisant apparaître les variables m_b , c_b et K_{ab} et mettre $T_b(p)$ sous la forme $T_b(p) = H_1(p)T_a(p) + H_2(p)P(p)$.

.....

.....

.....

.....

.....

Q6. Montrer que $H_1(p)$ peut s'écrire $H_1(p) = \frac{K_1}{1 + \tau_1 \cdot p}$. Préciser l'ordre du système défini par la fonction de transfert $H_1(p)$, ainsi que, littéralement, ses caractéristiques.

Q7. Calculer la valeur numérique approchée de τ_1 , la constante de temps de ce système.

.....

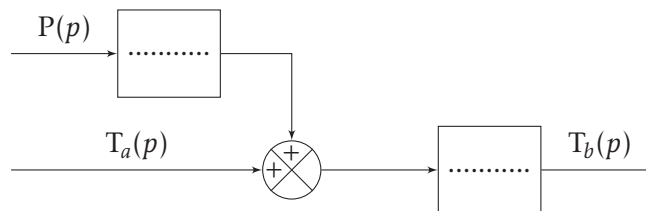
.....

.....

.....

.....

Q8. Compléter le schéma-bloc associé à l'expression de $T_b(p)$ en utilisant les variables K_{ab} et τ_1 .



Q9. Exprimer $T_a(p)$ en fonction de $T_e(p)$ et de $T_b(p)$ en faisant apparaître les variables m_a , c_a , K_{ae} et K_{ab} . Mettre $T_a(p)$ sous la forme $T_a(p) = H_3(p)T_e(p) + H_4(p)T_b(p)$.

.....

.....

.....

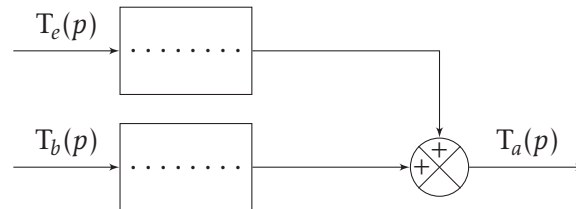
.....

.....

Q10. Montrer que les fonctions de transfert respectives $H_3(p)$, $H_4(p)$ peuvent s'écrire :

$H_3(p) = \frac{K_3}{1 + \tau_3 \cdot p}$ et $H_4(p) = \frac{K_4}{1 + \tau_4 \cdot p}$. Calculer la valeur numérique approchée de τ_3 , la constante de temps de ces systèmes.

Q11. Compléter le schéma-bloc associé à l'expression de $T_a(p)$.



Q12. Exprimer $T_e(p)$ en fonction de $T_a(p)$ et de $T_{ext}(p)$.

Q12a. Préciser l'ordre du système défini ainsi que, littéralement, ses caractéristiques.

Q12b. Calculer la valeur numérique approchée de τ_5 , la constante de temps de ce système.

Q12c. Tracer le schéma bloc ayant pour entrées $T_a(p)$ et $T_{ext}(p)$ et pour sortie $T_e(p)$ et comme perturbation $T_{ext}(p)$.

Finalement, le schéma bloc global de la chaudière peut se mettre sous la forme de la figure 17.

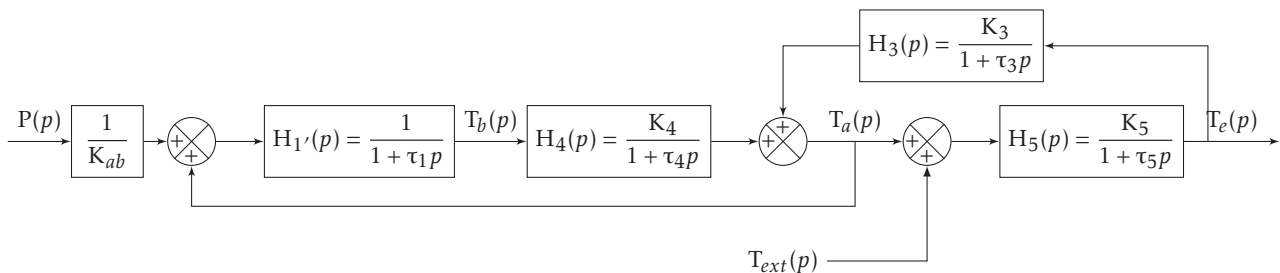


FIGURE 3 – Schéma bloc global

Dans un premier temps, on considère que $T_{ext}(p) = 0$

Q13. Par la méthode de votre choix, exprimer $\frac{T_e(p)}{P(p)}$ en fonction de $H_1(p)$, $H_4(p)$, $H_5(p)$, $H_3(p)$ et K_{ab} (ne pas développer).

E. Prévision de l'allure de la réponse temporelle

L'étude porte sur la montée en température de l'eau qui sert à chauffer les pièces au travers de radiateurs. Cette température est obtenue à partir d'une puissance calorifique fournie par le bois br ul e au niveau du foyer réfractaire de la chaudière.

Suite à la simplification des équations de la thermodynamique, le système peut se modéliser par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{T_e(p)}{P(p)} = \frac{1}{400(1 + 2500p)(1 + 500p)}$$

T_e représente la température de l'eau à atteindre dans les radiateurs de la maison, $P(p)$ représente la puissance calorifique en Watt, fournie par le bois br ul e.

On considère que le corps de chauffe de la chaudière est soumis à un échelon de puissance de $p(t) = P_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ où $\mathcal{H}(t)$ est la fonction de Heaviside, avec $P_0 = 10\text{kW}$.

Q14. Déterminer la transformée de Laplace de $p(t)$, en déduire que $T_e(p) = \frac{P_0}{400 \cdot p(1 + 2500p)(1 + 500p)}$

Q15. Donner les valeurs initiales et les valeurs finales prévisibles pour la température de l'eau $\theta_e(t)$. et la tangente à l'origine.

Q16. Préciser la forme de la décomposition en éléments simples de $T_c(p)$ (ne pas calculer les coefficients).

Q17. Justifier alors que $\theta_e(t) = \frac{1}{1600} \cdot P_0 \cdot \left(4 - 5 \cdot e^{-\frac{1}{2500} \cdot t} + e^{-\frac{1}{500} \cdot t} \right)$

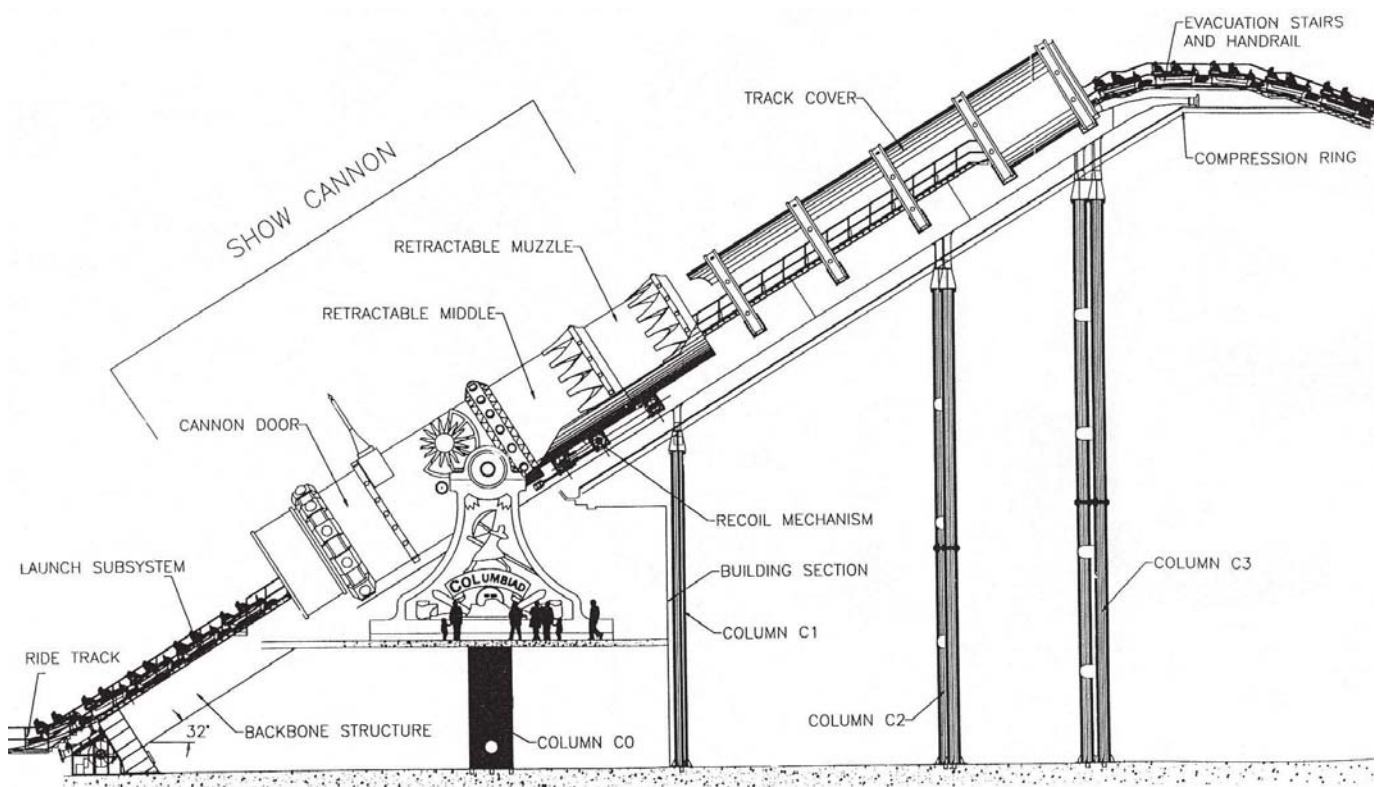
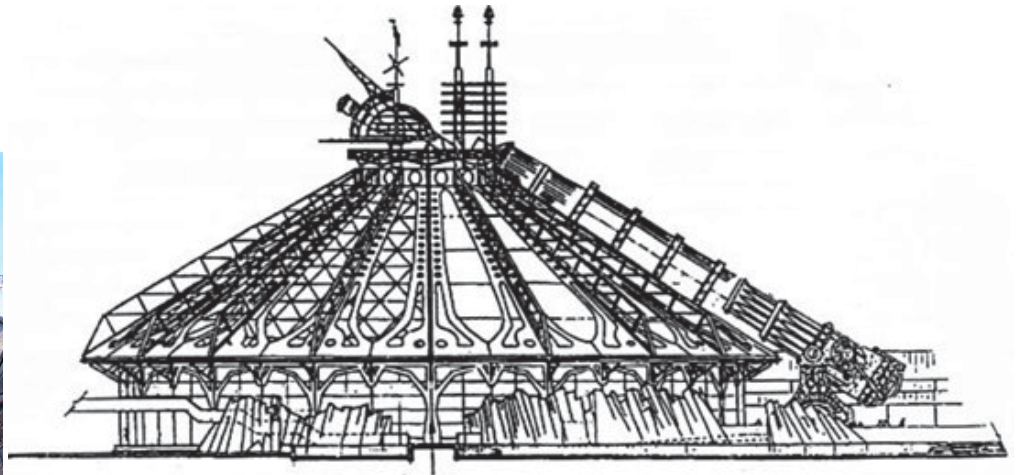
Annexes

$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
Dirac : $\delta(t)$	1
$\delta(t - \tau)$	$e^{-\tau \cdot p}$
Heaviside : $\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p}$
$a \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p}$
$a \cdot \mathcal{H}(t - \tau)$	$\frac{a}{p} \cdot e^{-\tau \cdot p}$
$a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p^2}$
$t^n \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-a \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p + a}$
$\frac{1 - e^{-a \cdot t}}{a} \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p \cdot (p + a)}$

TABLE 1.1 – Transformées de Laplace usuelles

Présentation

Cette attraction est installée au parc EuroDisney. Elle se présente sous la forme d'un chapiteau renfermant une montagne russe à grande vitesse. Les passagers peuvent faire l'expérience d'un voyage évoquant l'histoire du roman de JULES VERNES « de la terre à la lune », grâce à de somptueux décors spatiaux. Les voitures sont sonorisées en synchronisation avec le circuit qui comporte trois renversements complets. Le système de lancement, évoquant un canon, est en fait une catapulte à propulsion électrique de type porte-avions. Un poussoir vient en contact avec le train afin de le propulser. La motorisation de ce dispositif fait l'objet de ce devoir.



.1. Objectifs

Il s'agit de :

- Modéliser le comportement du système de motorisation de la catapulte
- Quantifier des performances du système
- Conclure quand au respect du cahier des charges de la catapulte

.2. Extrait du cahier des charges

	Exigence	Critères	Niveau
id1	Propulser en toute sécurité un train de passagers vers le point d'entrée de la montagne russe	Durée du cycle de lancement Fréquence de lancement Masse propulsée Inclinaison de la voie Maintien en position Vitesse de propulsion accélération	30 secondes maxi 1 toute les 36 s 7 500 kg maxi 34° frein de parking 14 m/s ⁻¹ maxi 8 m/s ² mini ±1 m/s ²

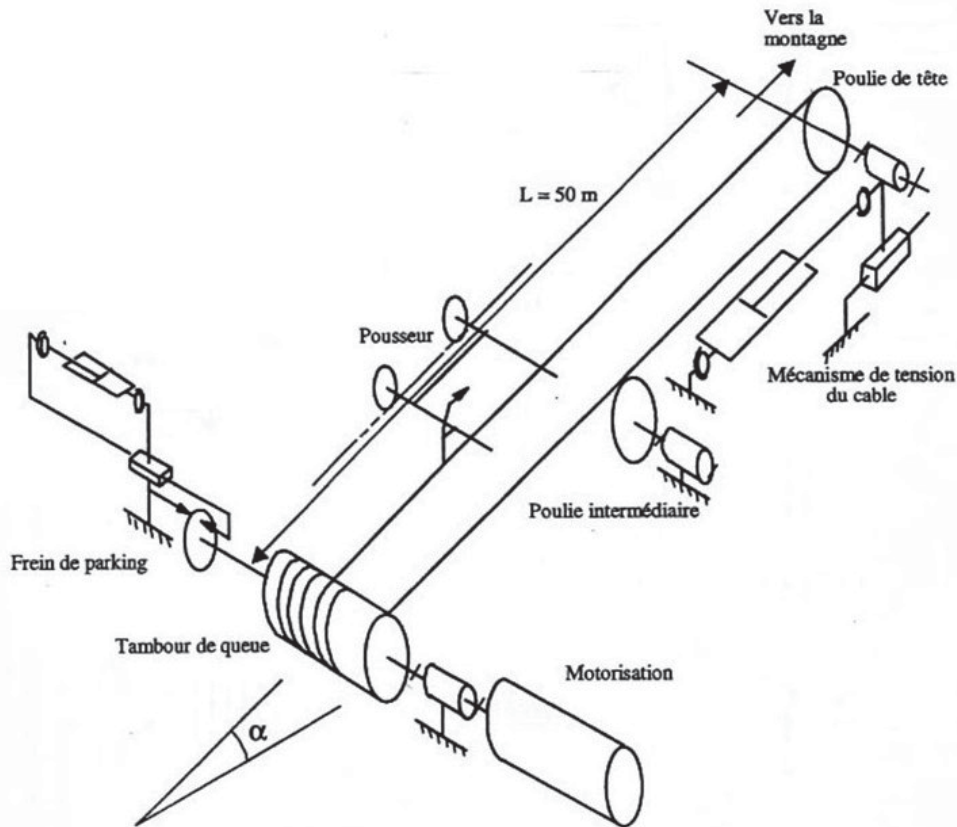


FIGURE 4 – Schéma du lanceur

A. Étude de l'asservissement de la motorisation de la catapulte

A.1. Étude préliminaire : Moteur à courant continu

Les équations d'un moteur à courant continu classique sont donnés ci-après :

— Équation électrique

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

— Équation mécanique

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t)$$

— Relations caractéristiques de comportement

$$c_m(t) = K_t \cdot i(t)$$

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t)$$

— $u(t)$: la tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du système)

— $e(t)$: force contre-électromotrice (en V)

— $i(t)$: intensité (en A)

— $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s) (sortie du système)

— $C_m(t)$: couple moteur (en N.m)

— $C_r(t)$: couple résistant (en N.m) (perturbation du système)

— J_{eq} : inertie en rotation de l'arbre moteur (en kg.m²)

— R : résistance électrique du moteur

— L : inductance du moteur

— K_e : constante de la force contre-électromotrice

— K_t : constante de couple

Avec

On rappelle les formes canoniques des systèmes linéaires :

$$\text{système du premier ordre : } \frac{K}{1 + T \cdot p}$$

$$\text{système du second ordre : } \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

On se place dans les conditions de Heaviside

Q1. Appliquer les transformées de Laplace aux équations précédentes.

Q2. Compléter le schéma bloc du document réponse.

Q3. Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ en la mettant sous la forme canonique (on supposera $C_r(p)$ nul pour cette question). Préciser l'ordre.

Q4. Déterminer la fonction de transfert $G_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$ en la mettant sous la forme canonique (on supposera $U(p)$ nul pour cette question).

Q5. En déduire $\Omega_m(p)$ en fonction de $U(p)$, $C_r(p)$, $H_1(p)$ et $G_1(p)$.

A.2. Réponse temporelle

Afin d'identifier le comportement du moteur, on a réalisé un essai temporel à vide ($c_r(t) = 0$, en appliquant, un échelon de tension $u(t) = U_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $U_0 = 700 \text{ V}$, le résultat de l'essai est présenté sur la figure 20 page 32.

Q6. Déterminer le temps de réponse à $T_{5\%}$

On propose de réaliser un modèle simplifié du moteur, on propose un modèle du premier ordre :

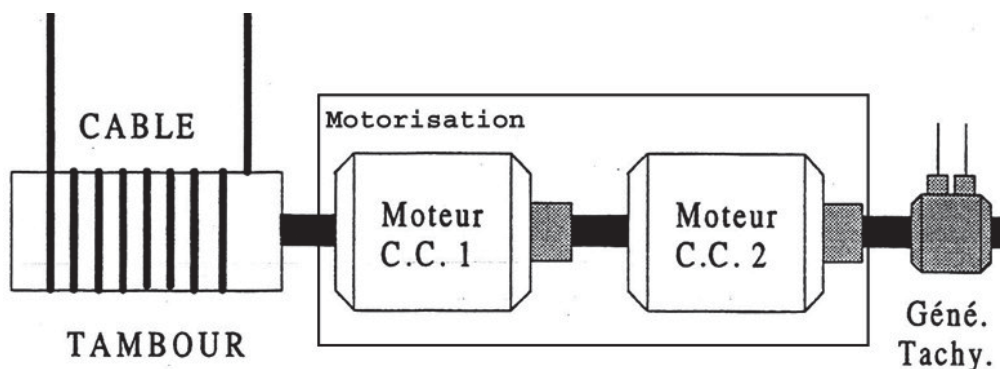
$$H_{\text{simp}}(p) = \frac{K_m}{1 + T_m \cdot p}$$

Q7. À partir de la réponse temporelle, déterminer les termes du modèle simplifié K_m et T_m (préciser les tracés nécessaires sur la courbe de la figure 20).

Q8. Déterminer $\omega(t)$, la réponse temporelle pour l'échelon de tension $u(t) = U_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $U_0 = 700 \text{ V}$. Tracer l'allure de la réponse temporelle sur le graphe précédent. Préciser les points particuliers.

A.3. Présentation de la motorisation de la catapulte

L'entraînement du tambour est obtenu par l'association de deux moteurs montés en tandem selon le schéma ci-dessous.



M_1 et M_2 sont des moteurs à courant continu à excitation séparée. Pour chacun des moteurs, on utilisera le modèle classique, linéaire et continu du moteur à courant continu introduit partie précédente. La vitesse est contrôlée par une génératrice tachymétrique.

On note :

- u_1 et u_2 les tensions respectives des moteurs M_1 et M_2 ; i_1 et i_2 les courants respectifs;
- C_{m1} et C_{m2} les couples moteurs
- e_1 et e_2 les forces contre-électromotrices (fcem); K_{e1} et K_{e2} les constantes des fcem et K_{t1} et K_{t2} les constantes de couple;
- R_1 , R_2 les résistances et L_1 , L_2 les inductances des moteurs M_1 et M_2 ;
- J_{eq} l'inertie équivalente de l'ensemble de la transmission ramenée à l'arbre moteur $J_{eq} = 3600 \text{ kgm}^2$
- C_R le couple résistant $C_R = 22200 \text{ Nm}$

A.4. Modélisation de la motorisation

La motorisation complète peut donc être décrite par le schéma bloc de la figure 6.

Q9. Monter, par la méthode de votre choix, que $\Omega_m(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\Omega_m(p) = H_1(p) \cdot U_1(p) + H_2(p) \cdot U_2(p) - H_3(p) \cdot C_r(p)$$

$$\text{avec } H_1(p) = \frac{K_{t1} \cdot (R_2 + L_2 \cdot p)}{D(p)}; H_2(p) = \frac{K_{t2} \cdot (R_1 + L_1 \cdot p)}{D(p)}; H_3(p) = \frac{(R_1 + L_1 \cdot p) \cdot (R_2 + L_2 \cdot p)}{D(p)}$$

et où $D(p) = J_{eq} \cdot (R_1 + L_1 \cdot p) \cdot (R_2 + L_2 \cdot p) + K_{t1} \cdot K_{e1} \cdot (R_2 + L_2 \cdot p) + K_{t2} \cdot K_{e2} \cdot (R_1 + L_1 \cdot p)$

On suppose dans la suite du sujet que les deux moteurs sont strictement identiques et commandés par une même tension commune $U = U_1 = U_2$. On repartira des expressions fournis ci-dessus.

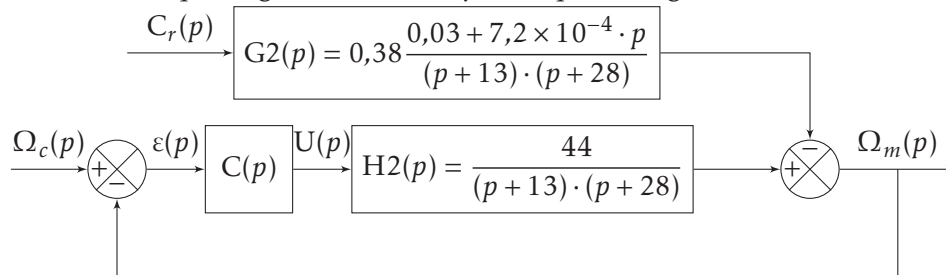
On donne : $K_{e1} = K_{e2} = 22 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$, $K_{t1} = K_{t2} = 22 \text{ Nm}$, $R_1 = R_2 = 0,03 \Omega$, $L_1 = L_2 = 7,2 \times 10^{-4} \text{ H}$,
 $U_{1max} = U_{2max} = 700 \text{ V}$, $J_{eq} = 3600 \text{ kgm}^2$.

Q10. Montrer que la relation de transfert se simplifie.

Q11. En comparant cette fonction de transfert avec celle trouvée à la question Q5 (fonction de transfert d'un moteur à courant continu seul), montrer que cette motorisation est équivalente à un moteur unique dont on précisera les paramètres K_{Eq} , K_{teq} , R_{eq} , L_{eq} .

B. Asservissement de vitesse

Pour la suite, compte tenu des valeurs numériques, on admet que que l'asservissement de vitesse se met sous la forme suivante. On considère que la génératrice tachymétrique a un gain unitaire.



Q12. Déterminer $\Omega(p)$ en fonction de $\Omega_c(p)$, $C_r(p)$, $H_2(p)$, $G_2(p)$ et $C(p)$ (ne pas développer).

Pour la suite, on considère que $c_r(t) = 0$.

On choisit pour le correcteur, la fonction $C(p) = K_p \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$, avec $T_i = \frac{1}{13}$.

Q13. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $B_o(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\varepsilon(p)}$ en fonction de K_p , montrer que l'on peut la mettre sous la forme $B_o(p) = \frac{K_o}{p \cdot (p + a)}$

Q14. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $B_F(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$. Préciser l'ordre de la fonction de transfert.

Q15. Déterminer K_p afin que $B_F(p) = \frac{K_F}{(p + b)^2}$. Quel est l'intérêt de ce choix ?

On applique une consigne $\omega_c(t) = \Omega_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\Omega_0 = 30 \text{ rad s}^{-1}$.

Q16. Déterminer $\Omega_c(p)$, montrer que $\Omega_m(p) = \frac{K_F \cdot \Omega_0}{p \cdot (p + b)^2}$

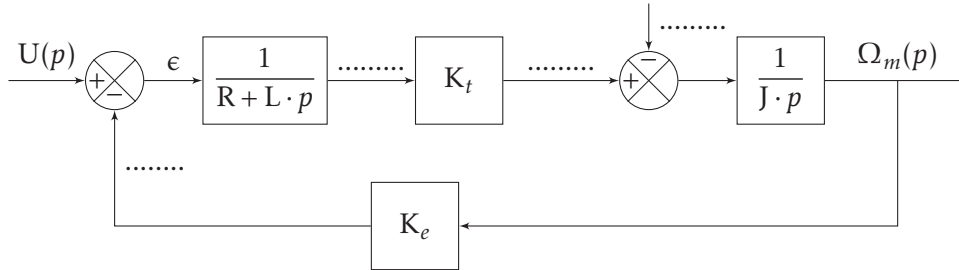
Q17. Justifier que l'on peut écrire $\Omega_m(p) = \frac{A}{(p + b)^2} + \frac{B}{(p + b)} + \frac{C}{p}$, en déduire $\omega_m(t)$.

Q18. Tracer l'allure de la réponse temporelle, pour $\Omega_0 = 30 \text{ rad s}^{-1}$. On calculera quelques valeurs simples ($t = k \cdot \frac{1}{b}$, avec $k \in [1, 3, 5]$). Déterminer le temps de réponse à 5%. Conclure.

C. Document réponse

Q1. Appliquer les transformées de Laplace aux équations précédentes.

Q2. Compléter le schéma bloc suivant :



Q3. Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ en la mettant sous la forme canonique (on supposera $C_r(p)$ nul pour cette question). Préciser l'ordre.

Q4. Déterminer la fonction de transfert $G_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$ en la mettant sous la forme canonique (on supposera $U(p)$ nul pour cette question).

Q5. En déduire $\Omega_m(p)$ en fonction de $U(p)$, $C_r(p)$, $H_1(p)$ et $G_1(p)$.

Q6. Déterminer le temps de réponse à $T_{5\%}$

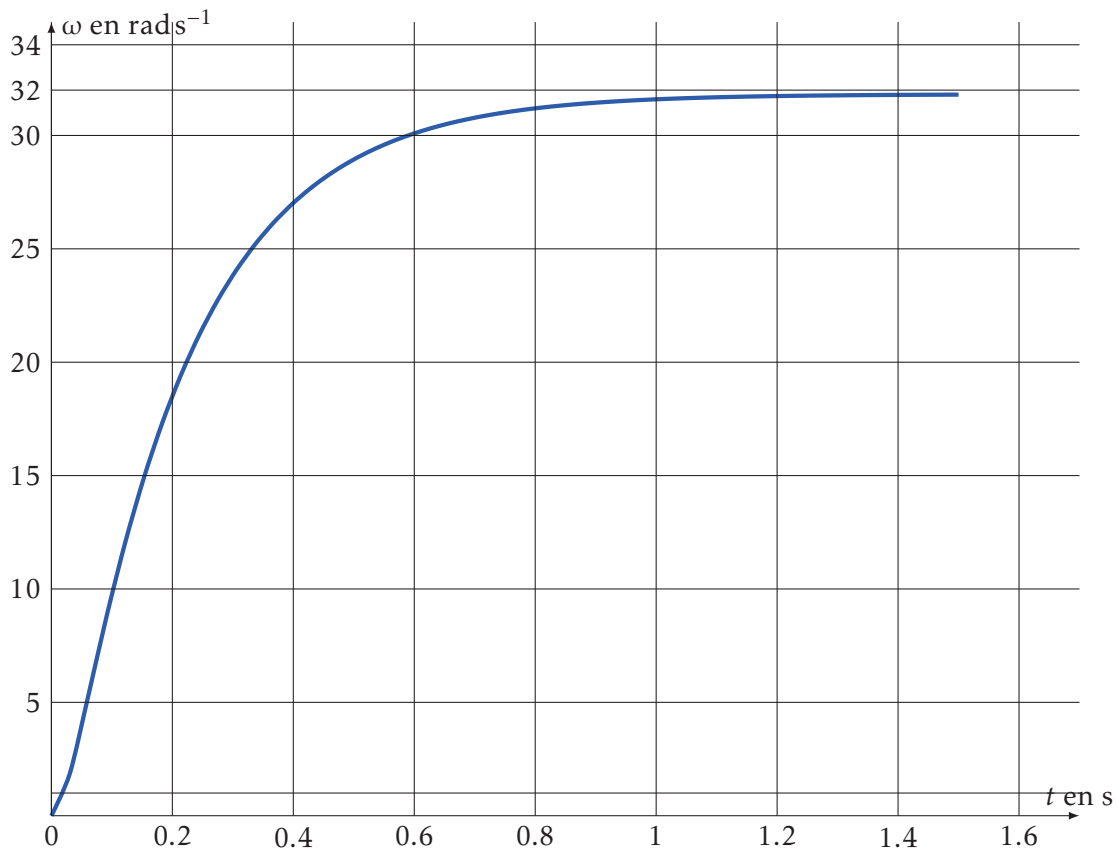


FIGURE 5 – Réponse temporelle du moteur seul

Q7. À partir de la réponse temporelle, déterminer les termes du modèle simplifié K_m et T_m (préciser les tracés nécessaires sur la courbe de la figure 20).

Q8. Déterminer $\omega(t)$, la réponse temporelle pour l'échelon de tension $u(t) = U_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $U_0 = 700V$. Tracer l'allure de la réponse temporelle sur le graphe précédent. Préciser les points particuliers.

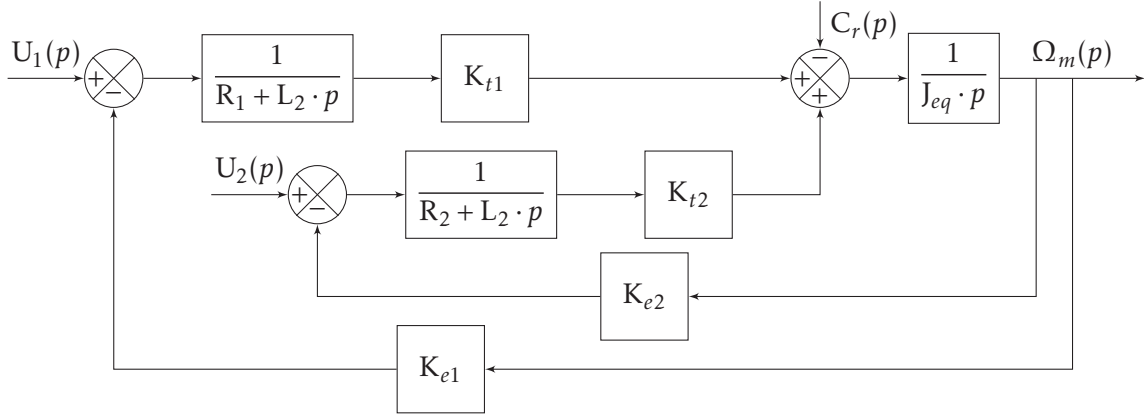


FIGURE 6 – Modèle complet de la motorisation du Space Mountain

Q9. Monter, par la méthode de votre choix, que $\Omega_m(p)$ peut s'écrire sous la forme :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q10. Montrer que la relation de transfert se simplifie.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q11. En comparant cette fonction de transfert avec celle trouvée à la question Q5 (fonction de transfert d'un moteur à courant continu seul), montrer que cette motorisation est équivalente à un moteur unique dont on précisera les paramètres K_{Eq} , K_{teq} , R_{eq} , L_{eq} .

.....

.....

.....

.....

.....

Q12. Déterminer $\Omega(p)$ en fonction de $\Omega_c(p)$, $C_r(p)$, $H_2(p)$, $G_2(p)$ et $C(p)$ (ne pas développer).

.....

.....

.....

Q13. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $B_o(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\varepsilon(p)}$ en fonction de K_p , montrer que l'on peut la mettre sous la forme $B_o(p) = \frac{K_o}{p \cdot (p + a)}$

Q14. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $B_F(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$.

Q15. Déterminer K_p afin que $B_F(p) = \frac{K_F}{(p + b)^2}$

Q16. Déterminer $\Omega_c(p)$, montrer que $\Omega_m(p) = \frac{K_F \cdot \Omega_0}{p \cdot (p + b)^2}$

Q17. Justifier que l'on peut écrire $\Omega_m(p) = \frac{A}{(p + b)^2} + \frac{B}{(p + b)} + \frac{C}{p}$, en déduire $\omega_m(t)$.

Q18. Tracer l'allure de la réponse temporelle, pour $\Omega_0 = 30 \text{ rad s}^{-1}$. On calculera quelques valeurs simples ($t = k \cdot \frac{1}{b}$, avec $k \in [1, 3, 5]$). Déterminer le temps de réponse à 5%. Conclure.

Devoir 3- Actionneur de pas cyclique de rotor d'hélicoptère

adapté du sujet mines ponts 1998

Corrigé page 32

A. Mise en situation

Pour déplacer un hélicoptère dans le plan horizontal le pilote agit sur un manche dit de « Pas cyclique ». Ce manche permet l'inclinaison du plateau fixe du rotor (1) sur lequel tourne avec le rotor l'autre plateau mobile (2). L'inclinaison variable sur une rotation du plateau mobile permet une variation cyclique de l'incidence des pales et donc du pas d'hélice.

Cette variation cyclique de l'inclinaison des pales permet une portance des pales différenciée entre les pales se situant à l'avant de l'appareil et celles se situant à l'arrière (ou entre gauche et droite). Ainsi l'hélicoptère peut de déplacer vers l'avant ou l'arrière (ou vers la gauche ou la droite).

A.1. Présentation du système

Notre étude se limite à l'actionneur de pas cyclique (3) qui assure l'inclinaison du plateau fixe. Il s'agit d'un système d'asservissement en position à entrée mécanique. Le pilote agit sur le manche de commande du pas cyclique (figure 8), l'inclinaison du levier est transmise à la servo-commande de pas cyclique, grâce à la tringlerie.

Le tiroir du distributeur (figure 22) reçoit la consigne Z_e . Celle-ci provient de la tringlerie de commande. Ce tiroir coulisse dans le corps du distributeur et met en communication chacune des deux conduites a et b avec la pression d'alimentation p_1 ou la pression de retour p_0 .

Les deux chambres C_a et C_b sont alimentées avec deux pressions différentes, ce qui a pour conséquence de déplacer le corps et générer la sortie Z_s . La figure est représentée dans la position médiane, dans cette position, les deux chambres sont fermées, et l'ensemble est immobile.

A.2. Cahier des charges

- exigence 1** : le système doit être précis pour une entrée en échelon,
- exigence 2** : le système doit avoir un temps de réponse à 5% inférieur à 0,01 s,
- exigence 3** : le système ne doit pas présenter de dépassement relatif supérieur à 5%.

B. Étude du comportement

B.1. Modélisation

On montre, à partir d'une étude dynamique en appliquant la deuxième loi de Newton au corps du vérin et par une étude des débits dans le vérin et le distributeur, les deux équations ci-contre :

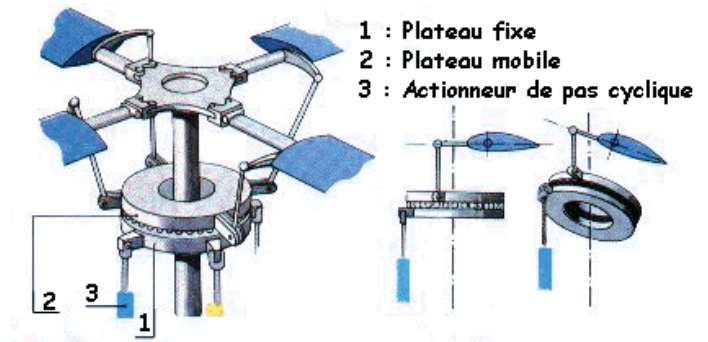


FIGURE 7 – Présentation des constituants

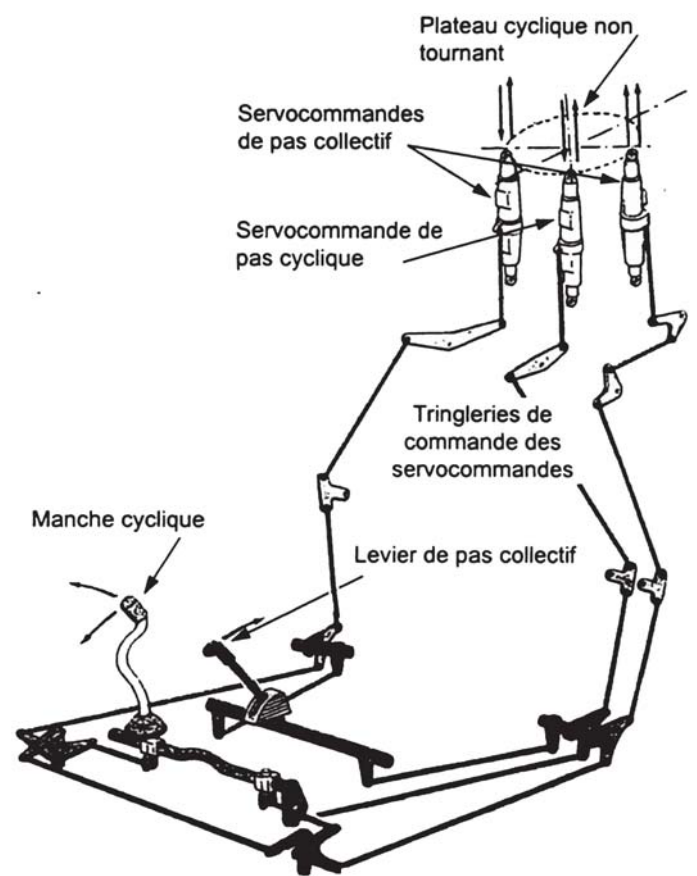


FIGURE 8 – Tringlerie de commande

équation de débit :

$$K_d \cdot (z_e(t) - z_s(t)) = S \frac{dz_s(t)}{dt} + \frac{V_t}{2 \cdot B} \cdot \frac{d(p_a(t) - p_b(t))}{dt}$$

équation de dynamique :

$$(p_a(t) - p_b(t)) \cdot S = r_c \cdot z_s(t) + f \cdot \frac{dz_s(t)}{dt} + m \cdot \frac{d^2 z_s(t)}{dt^2}$$

avec :

- $z_e(t)$ la consigne d'entrée ;
- $z_s(t)$ la réponse en sortie ;
- $p - 1$ la pression d'alimentation ;
- p_0 la pression de retour ;
- $p_a(t)$ et $p_b(t)$ les pressions dans les chambres C_a et C_b de volumes $v_a(t)$ et $v_b(t)$;
- $\Delta_p(t) = p_a(t) - p_b(t)$

- $v_t(t) = \frac{v_a(t) + v_b(t)}{2}$;
- r_c , f et m les raideurs, coefficient de frottement visqueux et masse de l'ensemble vérin plus charge ;
- K_d le gain du distributeur ;
- B le module de compressibilité de l'huile ;
- S la section utile du vérin.

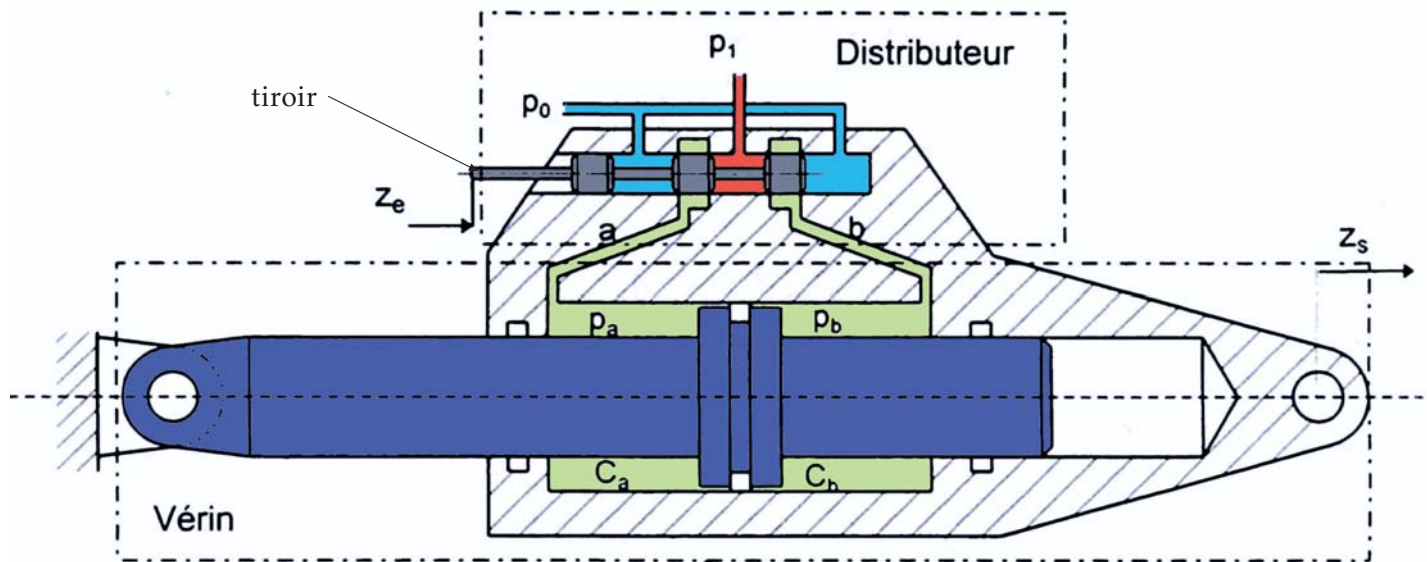


FIGURE 9 – Servo commande du rotor

En considérant que toutes les conditions initiales sont nulles.

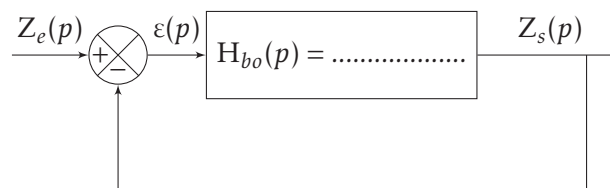
Q1. Écrire l'image de la première équation par la transformation de Laplace.

Q2. Écrire l'image de la seconde équation par la transformation de Laplace, en déduire $\frac{Z_s(p)}{\Delta_p(p)}$

Remarque :: pour une fonction scalaire f de la variable temporelle t , on notera F sa transformée de Laplace, dont la variable complexe sera notée p .

Q3. Compléter le schéma bloc du document réponse (figure 21).

Q4. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte, $H_{bo}(p) = \frac{Z_s(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{Z_s(p)}{Z_e(p) - Z_s(p)}$, puis compléter la chaîne fonctionnelle représentée ci-dessous



Q5. En posant $r_h = \frac{2 \cdot B \cdot S^2}{V_t}$ et $\omega = \frac{K_d}{S}$, exprimer $H_{bo}(p)$ en fonction de r_c , r_h , f , m et ω .

Valeurs numériques : $r_c = r_h = 2 \times 10^7 \text{ Nm}^{-1}$, $f = 10^5 \text{ Nsm}^{-1}$, $m = 250 \text{ kg}$, $\omega = 200 \text{ rad s}^{-1}$.

En considérant, que $\frac{m}{r_h}$ est négligeable devant 1 dans le domaine de fréquence d'utilisation du rotor.

Q6. Montrer que $H_{bo}(p) = \frac{200}{p \cdot \left(2 + \frac{1}{200} \cdot p\right)^2}$

Q7. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{bf}(p) = \frac{Z_s(p)}{Z_e(p)}$.

On soumet le système à une entrée en échelon, $z_e(t) = Z_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$, la fonction de Heaviside.

Q8. Donner la transformée de Laplace de $z_e(t)$, puis montrer que $Z_s(p) = Z_0 \cdot \frac{200^2}{p \cdot (p + 200)^2}$

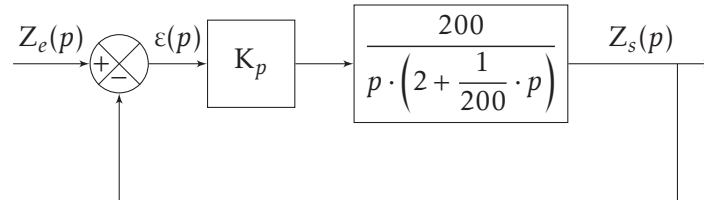
Q9. Montrer que $Z_s(p)$ peut s'écrire $Z_s(p) = Z_0 \cdot \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p+200} + \frac{C}{(p+200)^2} \right)$, en déduire, à partir du tableau des transformées inverses, $z_s(t)$.

La figure 22 présente la réponse temporelle normalisée (le rapport $\frac{z_s(t)}{Z_0}$) pour un échelon.

Q10. Déterminer le temps de réponse à 5%, répondre sur le document réponse.

B.2. Correction proportionnelle

Afin d'améliorer le comportement, on modifie le système asservi en augmentant le gain de la boucle ouverte, le schéma bloc devient.



Q11. Déterminer la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée $H_{bf}(p) = \frac{Z_s(p)}{Z_e(p)}$ en fonction de K_p .

La réponse temporelle pour les valeurs $K_p = 12.5$ et $K_p = 2$ sont représentées sur les figures 23 et 24.

Q12. Que peut-on dire en terme de temps de réponse, précision et dépassement relatif de ces réponses deux temporelles corrigées (répondre sur le document réponse).

B.3. Correction par retour de pression

La servocommande est munie d'un dispositif de correction dit « à retour de pression » (figure 10).

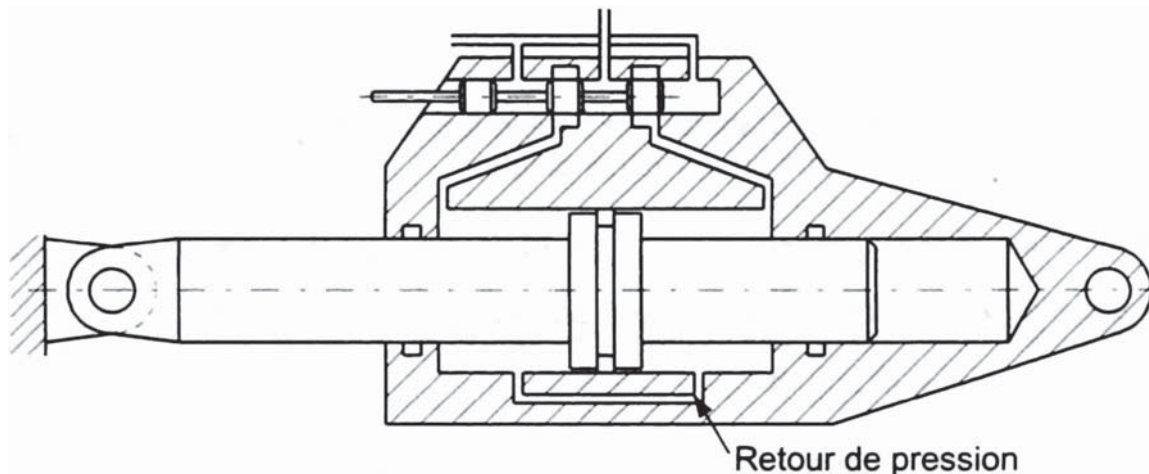


FIGURE 10 – Servo commande du rotor, avec retour de pression

Ce dispositif est constitué d'une canalisation de petite section qui relie les deux chambres du vérin. Il permet de « compenser » le débit d'huile introduit par le distributeur au cours d'un dépassement de position (oscillation).

La fonction de transfert en boucle ouverte du système devient :

$$H_{bo}(p) = \frac{2 \times 10^5}{(400 + p) \cdot (500 + p) + p}$$

On se propose d'étudier l'effet du retour de pression sur le comportement de la servo commande.

Q13. Déterminer $\varepsilon(p) = Z_s(p) - Z_e(p)$

Comme précédemment, le système est soumis à une entrée en échelon $z_e(t) = Z_0 \cdot \mathcal{H}(t)$.

Q14. En déduire l'erreur indicielle ε_i correspondante.

La réponse temporelle est présentée sur la figure 25 du document réponse. L'échelle des ordonnées n'est pas précisée sur la figure.

Q15. Préciser sur la figure, l'échelle des ordonnées, évaluer le temps de réponse et le dépassement relatif

Q16. Conclure sur les corrections proposées pour répondre au cahier des charges

Transformées de Laplace

$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$a \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p}$
$a \cdot \mathcal{H}(t - \tau)$	$\frac{a}{p} \cdot e^{-\tau \cdot p}$
$a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p^2}$

$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$e^{-a \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p + a}$
$\frac{1 - e^{-a \cdot t}}{a} \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p \cdot (p + a)}$
$(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p(1 + \tau \cdot p)}$
$e^{-a \cdot t} \cdot t^n \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{n!}{(p + a)^{n+1}}$

C. Documents réponse

Nom :

Classe :

Q1. Écrire l'image de la première équation par la transformation de Laplace.

.....

.....

.....

.....

Q2. Écrire l'image de la seconde équation par la transformation de Laplace, en déduire $\frac{Z_s(p)}{\Delta_p(p)}$

.....

.....

.....

.....

Q3. Compléter le schéma bloc du document réponse (figure 21).

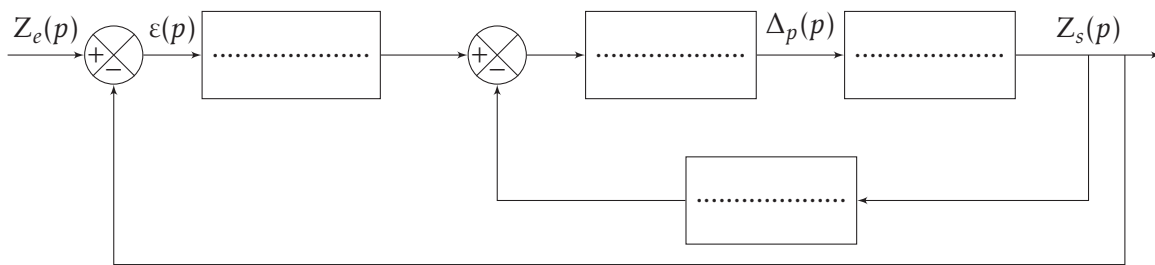


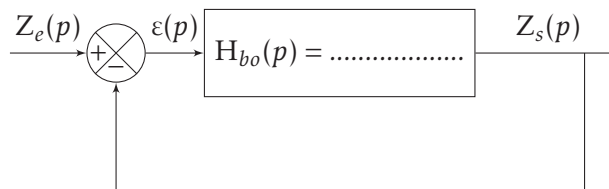
FIGURE 11 – Schéma bloc à compléter

Q4. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte, $H_{bo}(p) = \frac{Z_s(p)}{\epsilon(p)} = \frac{Z_s(p)}{Z_e(p) - Z_s(p)}$, puis compléter la chaîne fonctionnelle représentée ci-dessous

.....

.....

.....



Q5. En posant $r_h = \frac{2 \cdot B \cdot S^2}{V_t}$ et $\omega = \frac{K_d}{S}$, exprimer $H_{bo}(p)$ en fonction de r_c, r_h, f, m et ω .

.....

.....

.....

Q6. Montrer que $H_{bo}(p) = \frac{200}{p \cdot \left(2 + \frac{1}{200} \cdot p\right)}$

Q7. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{bf}(p) = \frac{Z_s(p)}{Z_e(p)}$.

Q8. Donner la transformée de Laplace de $z_e(t)$, puis montrer que $Z_s(p) = Z_0 \cdot \frac{200^2}{p \cdot (p + 200)^2}$

Q9. Montrer que $Z_s(p)$ peut s'écrire $Z_s(p) = Z_0 \cdot \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p + 200} + \frac{C}{(p + 200)^2}\right)$, en déduire, à partir du tableau des transformées inverses, $z_s(t)$.

Q10. Déterminer le temps de réponse à 5%, répondre sur le document réponse.

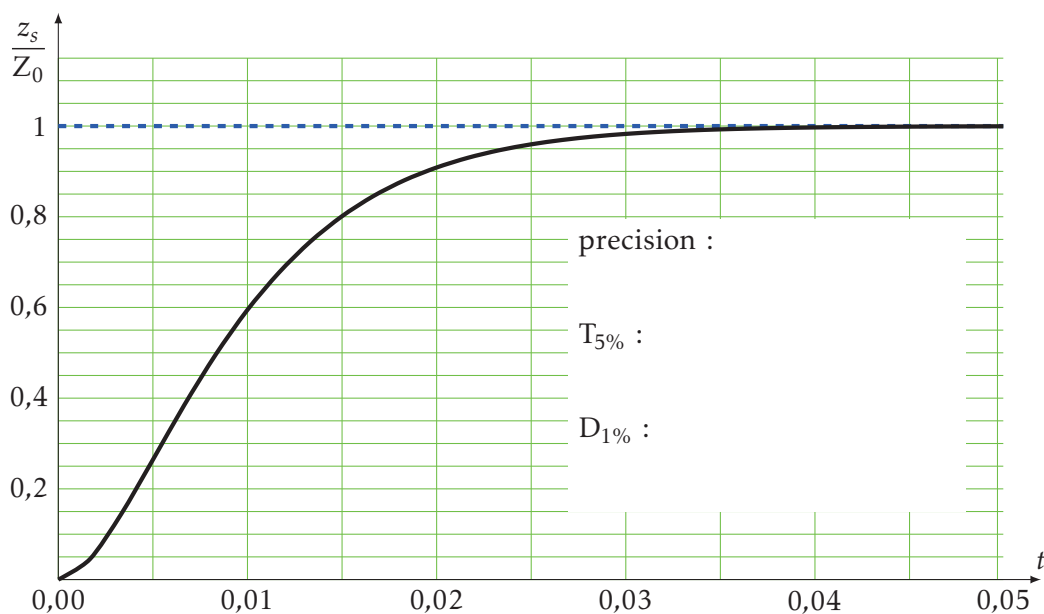


FIGURE 12 – Réponse temporelle à un échelon $z_e(t) = Z_0 \mathcal{H}(t)$

Q11. Déterminer la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée $H_{bf}(p) = \frac{Z_s(p)}{Z_e(p)}$ en fonction de K_p .

Q12. Que peut-on dire en terme de temps de réponse, précision et dépassement relatif de ces réponses deux temporelles corrigées (répondre sur le document réponse).

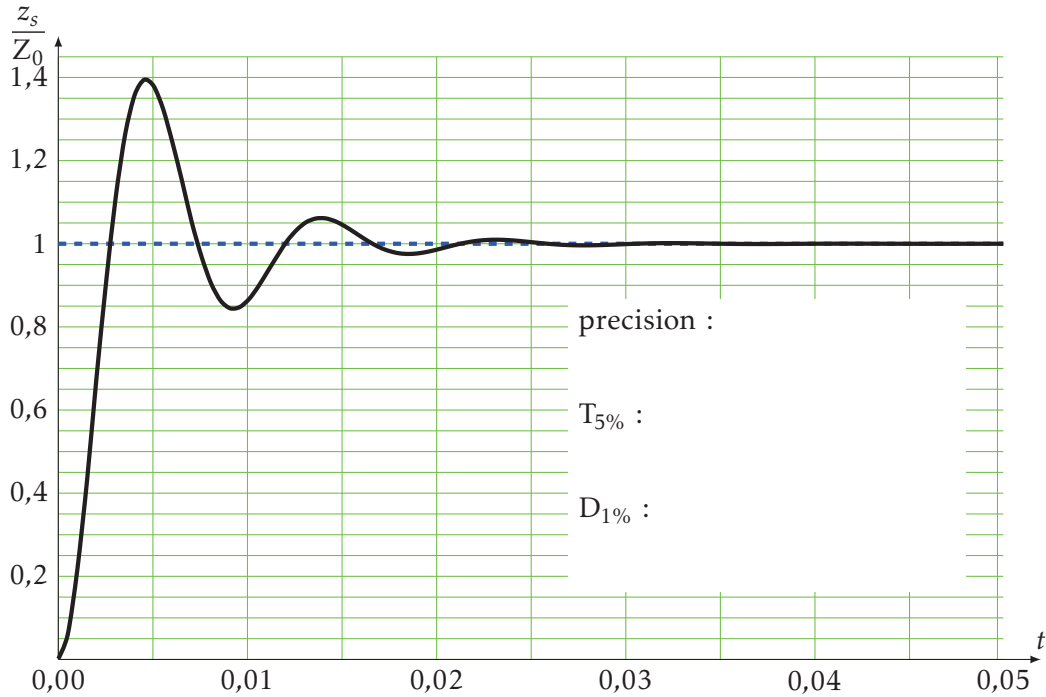


FIGURE 13 – Réponse temporelle corrigée avec $K_p = 12.5$ à un échelon $z_e(t) = Z_0\mathcal{H}(t)$

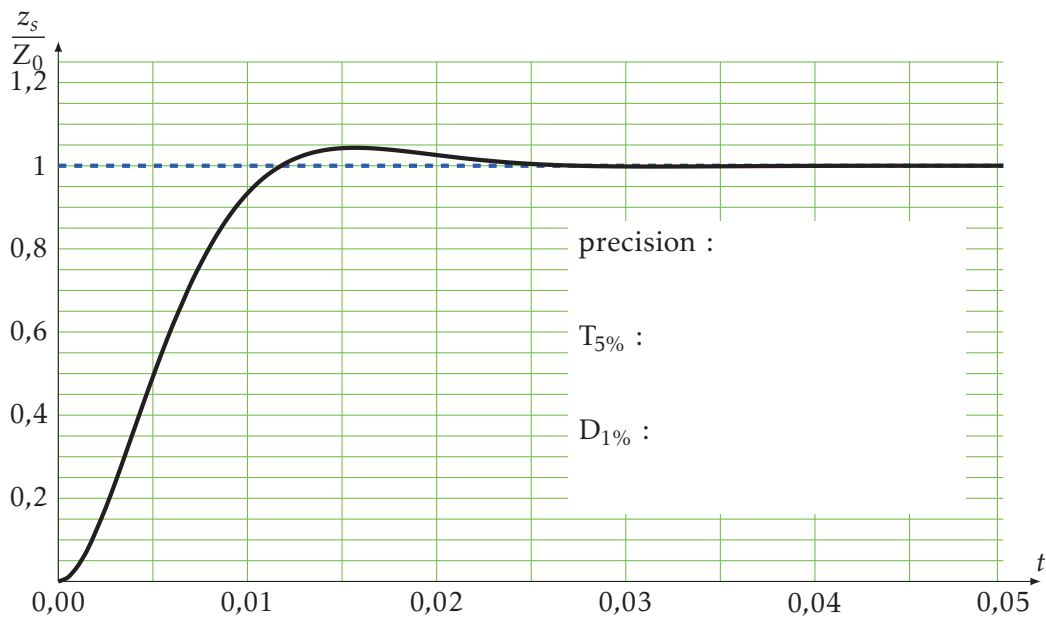


FIGURE 14 – Réponse temporelle corrigée avec $K_p = 2$ à un échelon $z_e(t) = Z_0\mathcal{H}(t)$

Q13. Déterminer $\varepsilon(p) = Z_s(p) - Z_e(p)$

Q14. En déduire l'erreur indicielle ε_i correspondante.

Q15. Préciser sur la figure, l'échelle des ordonnées, évaluer le temps de réponse et le dépassement relatif

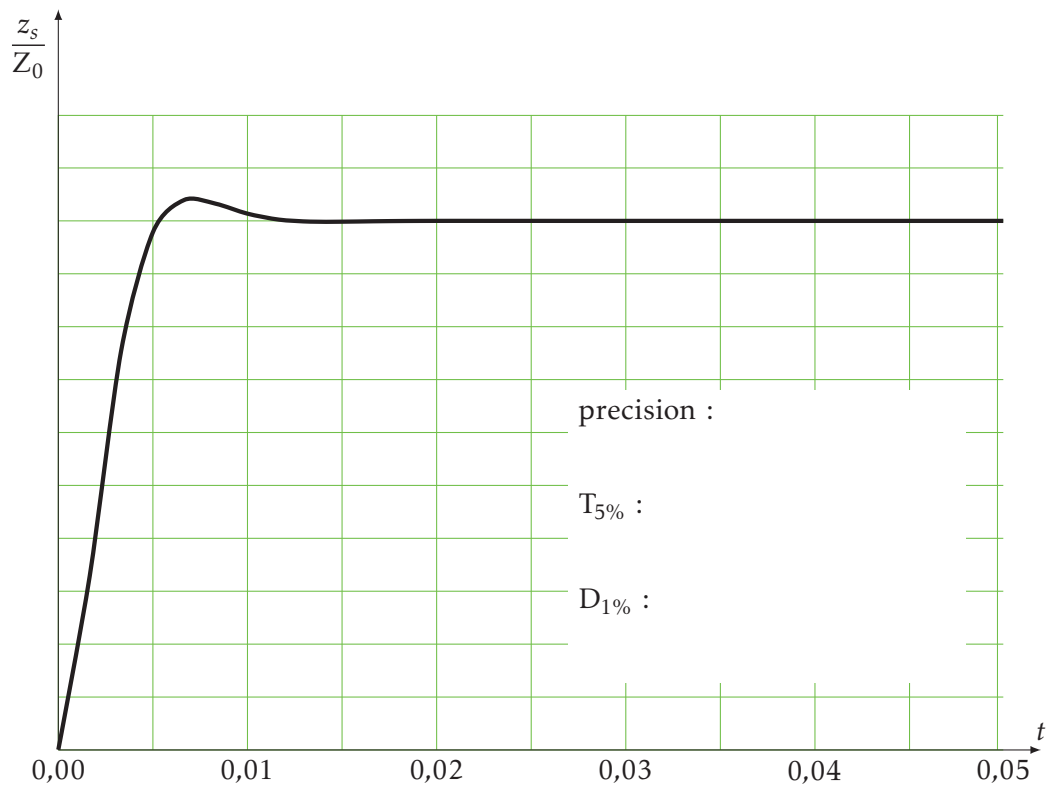


FIGURE 15 – Réponse temporelle à un échelon avec prise en compte du retour de pression $z_e(t) = Z_0\mathcal{H}(t)$

Q16. Conclure sur les corrections proposées pour répondre au cahier des charges