

# Modélisation des systèmes linéaires et asservis

## MPSI

Devoir 1- Actionneur de pas cyclique de rotor d'hélicoptère  
adapté du sujet mines ponts 1998

Corrigé page 10

### A. Mise en situation

Pour déplacer un hélicoptère dans le plan horizontal le pilote agit sur un manche dit de « Pas cyclique ». Ce manche permet l'inclinaison du plateau fixe du rotor (1) sur lequel tourne avec le rotor l'autre plateau mobile (2). L'inclinaison variable sur une rotation du plateau mobile permet une variation cyclique de l'incidence des pales et donc du pas d'hélice.

Cette variation cyclique de l'inclinaison des pales permet une portance des pales différenciée entre les pales se situant à l'avant de l'appareil et celles se situant à l'arrière (ou entre gauche et droite). Ainsi l'hélicoptère peut de déplacer vers l'avant ou l'arrière (ou vers la gauche ou la droite).

#### A.1. Présentation du système

Notre étude se limite à l'actionneur de pas cyclique (3) qui assure l'inclinaison du plateau fixe. Il s'agit d'un système d'asservissement en position à entrée mécanique. Le pilote agit sur le manche de commande du pas cyclique (figure 2), l'inclinaison du levier est transmise à la servo-commande de pas cyclique, grâce à la tringlerie.

Le tiroir du distributeur (figure 5) reçoit la consigne  $Z_e$ . Celle-ci provient de la tringlerie de commande. Ce tiroir coulisse dans le corps du distributeur et met en communication chacune des deux conduites a et b avec la pression d'alimentation  $p_1$  ou la pression de retour  $p_0$ .

Les deux chambres  $C_a$  et  $C_b$  sont alimentées avec deux pressions différentes, ce qui a pour conséquence de déplacer le corps et générer la sortie  $Z_s$ . La figure est représentée dans la position médiane, dans cette position, les deux chambres sont fermées, et l'ensemble est immobile.

#### A.2. Cahier des charges

- exigence 1 : le système doit être précis pour une entrée en échelon,
- exigence 2 : le système doit avoir un temps de réponse à 5% inférieur à 0,01 s,
- exigence 3 : le système ne doit pas présenter de dépassement relatif supérieur à 5%.

### B. Étude du comportement

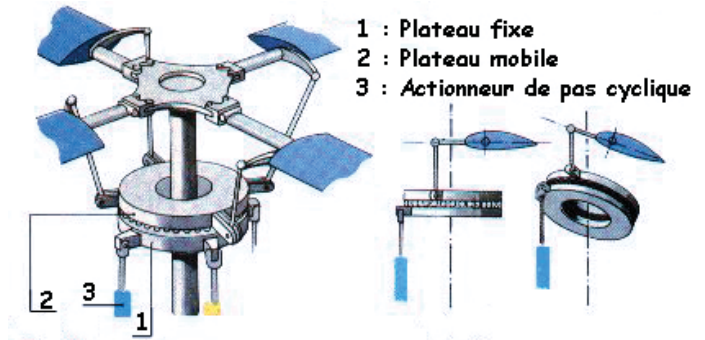


Figure 1 – Présentation des constituants



Figure 2 – Tringlerie de commande

### B.1. Modélisation

On montre, à partir d'une étude dynamique en appliquant la deuxième loi de Newton au corps du vérin et par une étude des débits dans le vérin et le distributeur, les deux équations ci-contre :

équation de débit :

$$K_d \cdot (z_e(t) - z_s(t)) = S \frac{dz_s(t)}{dt} + \frac{V_t}{2 \cdot B} \cdot \frac{d(p_a(t) - p_b(t))}{dt}$$

équation de dynamique :

$$(p_a(t) - p_b(t)) \cdot S = r_c \cdot z_s(t) + f \cdot \frac{dz_s(t)}{dt} + m \cdot \frac{d^2 z_s(t)}{dt^2}$$

avec :

- $z_e(t)$  la consigne d'entrée ;
- $z_s(t)$  la réponse en sortie ;
- $p_1$  la pression d'alimentation ;
- $p_0$  la pression de retour ;
- $p_a(t)$  et  $p_b(t)$  les pressions dans les chambres  $C_a$  et  $C_b$  ;
- $v_a(t)$  et  $v_b(t)$  : volume des chambres  $C_a$  et  $C_b$  ;
- $\Delta_p(t) = p_a(t) - p_b(t)$  : différence des pressions entre les deux chambres ;
- $v_t(t) = \frac{v_a(t) + v_b(t)}{2}$  : volume moyen des chambres ;
- $r_c$ ,  $f$  et  $m$  les raideurs, coefficient de frottement visqueux et masse de l'ensemble vérin plus charge ;
- $K_d$  le gain du distributeur ;
- $B$  le module de compressibilité de l'huile ;
- $S$  la section (surface) utile du vérin.

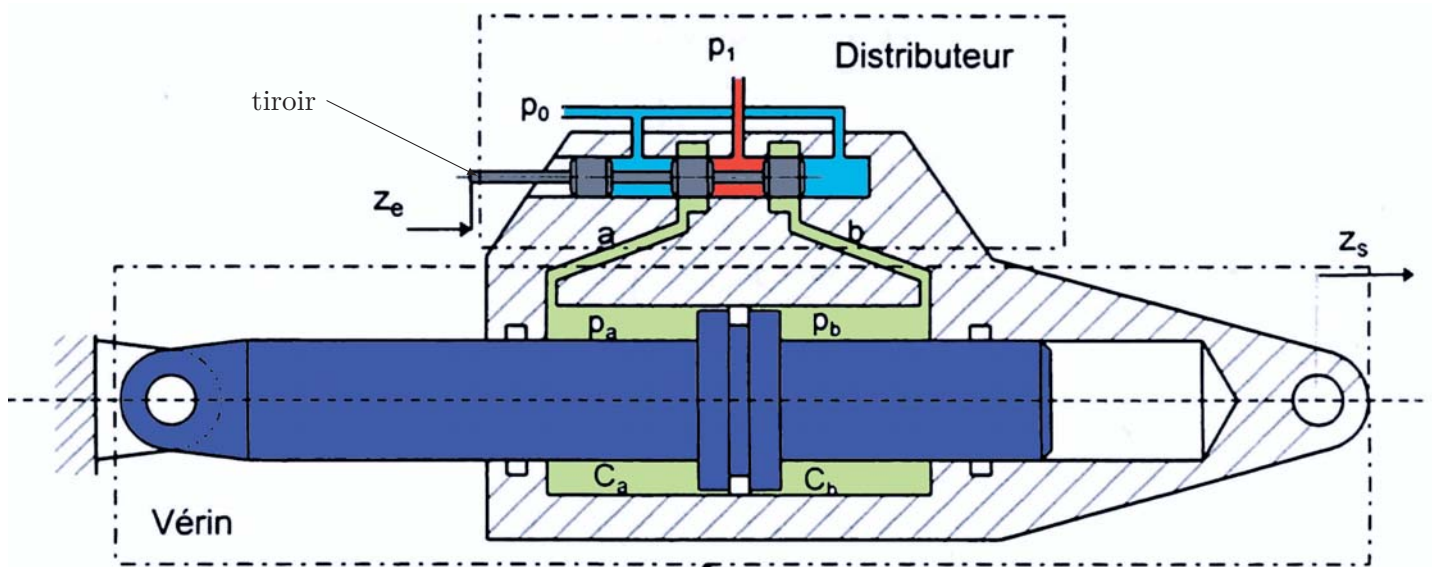


Figure 3 – Servo commande du rotor

En considérant que toutes les conditions initiales sont nulles.

Remarque : : pour une fonction scalaire  $f$  de la variable temporelle  $t$ , on notera  $F$  sa transformée de Laplace, dont la variable complexe sera notée  $p$ .

Q1. Écrire l'image de la première équation par la transformation de Laplace.

.....

.....

.....

.....

.....

Q2. Écrire l'image de la seconde équation par la transformation de Laplace, en déduire  $\frac{Z_s(p)}{\Delta_p(p)}$

Q3. Compléter le schéma bloc du document (figure 4).

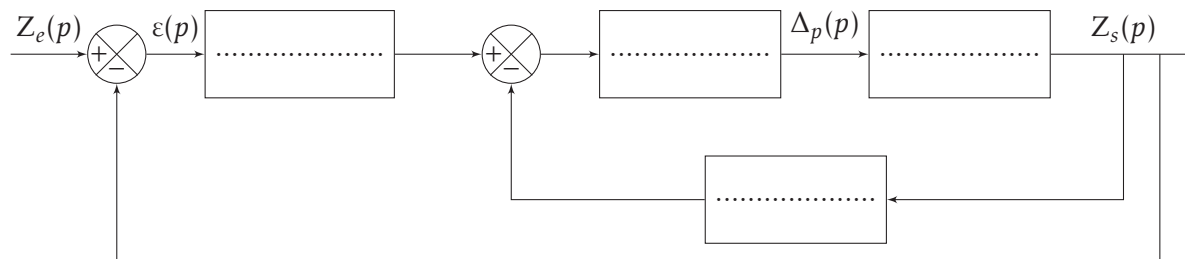
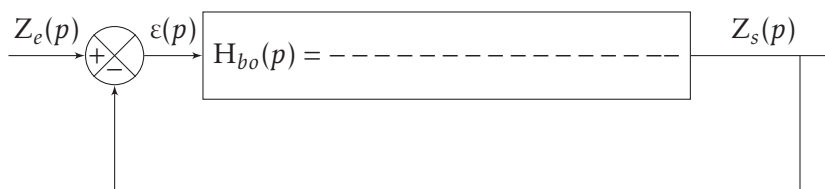


Figure 4 – Schéma bloc à compléter

Q4. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte,  $H_{bo}(p) = \frac{Z_s(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{Z_s(p)}{Z_e(p) - Z_s(p)}$ , puis compléter la chaîne fonctionnelle représentée ci-dessous



Q5. En posant  $r_h = \frac{2 \cdot B \cdot S^2}{V_t}$  et  $\omega = \frac{K_d}{S}$ , exprimer  $H_{bo}(p)$  en fonction de  $r_c$ ,  $r_h$ ,  $f$ ,  $m$  et  $\omega$ .

Valeurs numériques :  $r_c = r_h = 2 \times 10^7 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $f = 10^5 \text{ N s m}^{-1}$ ,  $m = 250 \text{ kg}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad s}^{-1}$ .

En considérant, que  $\frac{m}{r_h}$  est négligeable devant 1 dans le domaine de fréquence d'utilisation du rotor.

Q6. Montrer que  $H_{bo}(p) = \frac{200}{p \cdot \left(2 + \frac{1}{200} \cdot p\right)}$

Q7. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{bf}(p) = \frac{Z_s(p)}{Z_e(p)}$ .

-----

-----

-----

-----

-----

On soumet le système a une entrée en échelon,  $z_e(t) = Z_0 \cdot \mathcal{H}(t)$  avec  $\mathcal{H}(t)$ , la fonction de Heaviside.

Q8. Donner la transformée de Laplace de  $z_e(t)$ , puis montrer que  $Z_s(p) = Z_0 \cdot \frac{200^2}{p \cdot (p + 200)^2}$

-----

-----

-----

-----

-----

Q9. Montrer que  $Z_s(p)$  peut s'écrire  $Z_s(p) = Z_0 \cdot \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 200} + \frac{C}{(p + 200)^2} \right)$ , en déduire, à partir du tableau des transformées inverses,  $z_s(t)$ .

-----

-----

-----

-----

-----

La figure 5 présente la réponse temporelle normalisée (le rapport  $\frac{z_s(t)}{Z_0}$ ) pour un échelon.

Q10. Déterminer le temps de réponse à 5%, le dépassement s'il existe et l'erreur. Répondre sur le document.

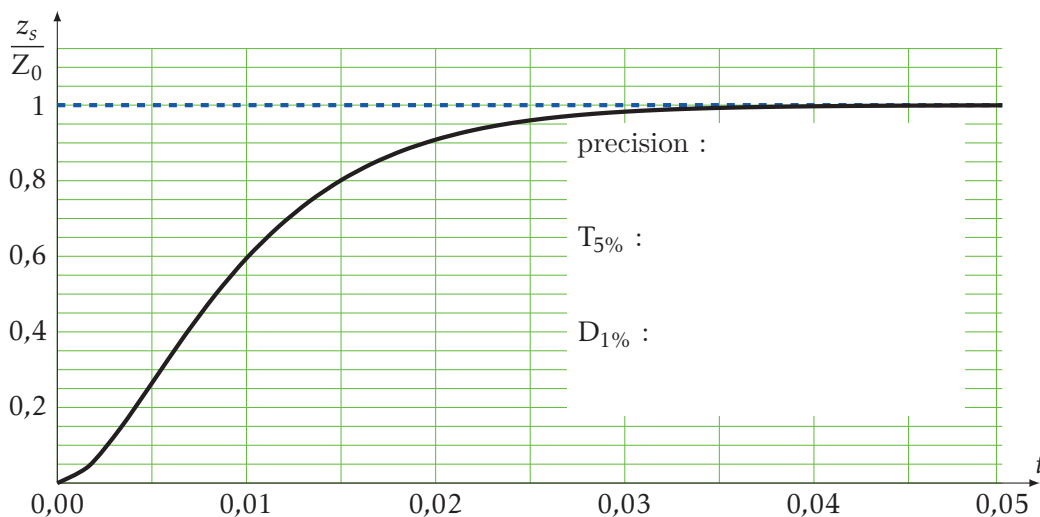
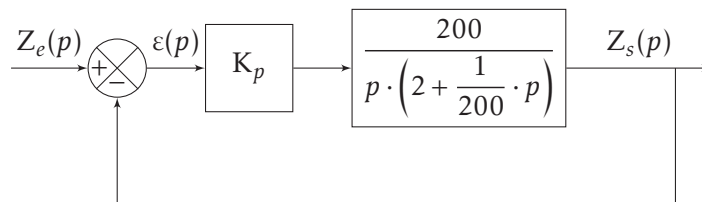


Figure 5 – Réponse temporelle à un échelon  $z_e(t) = Z_0 \mathcal{H}(t)$

### B.2. Correction proportionnelle

Afin d'améliorer le comportement, on modifie le système asservi en augmentant le gain de la boucle ouverte, le schéma bloc devient.



Q11. Déterminer la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée  $H_{bf}(p) = \frac{Z_s(p)}{Z_e(p)}$  en fonction de  $K_p$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

La réponse temporelle pour les valeur  $K_p = 12.5$  est représentée sur la figure 6.

Q12. Que peut-on dire en terme de temps de réponse, précision et dépassement relatif de cette réponse temporelle corrigée (répondre sur le document ) ?

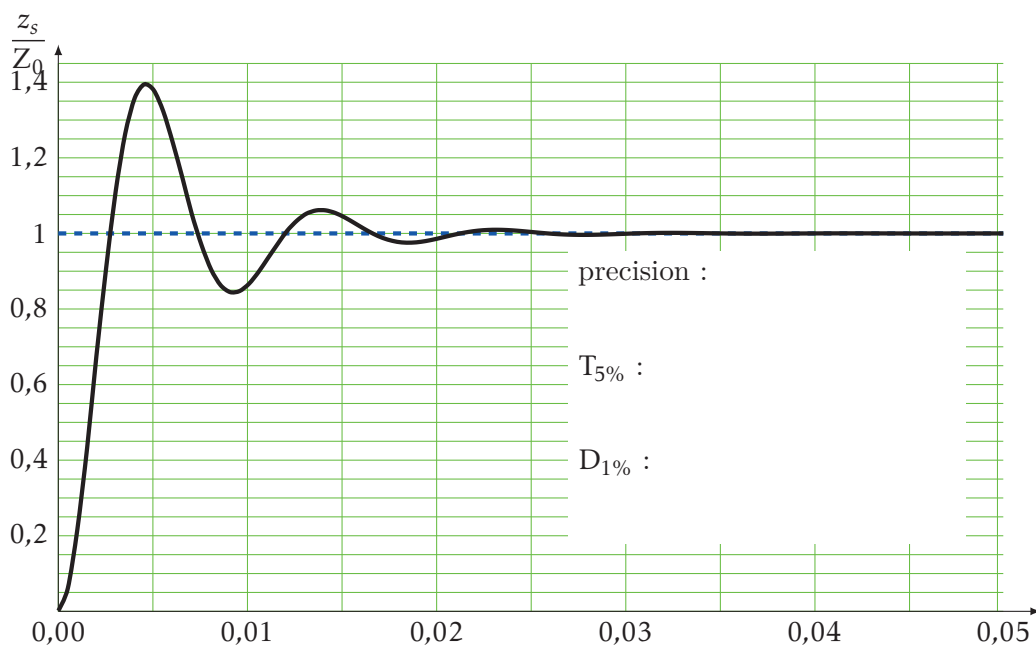


Figure 6 – Réponse temporelle corrigée avec  $K_p = 12.5$  à un échelon  $z_e(t) = Z_0 \mathcal{H}(t)$

Q13. Déterminer la valeur de  $K_p$  qui assure un temps de réponse minimal ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q14. Tracer l'allure de la réponse temporelle normalisée ( $\frac{z_s(t)}{Z_0}$  en ordonnée). Préciser sur cette figure, l'amplitude du 1<sup>er</sup> dépassement, l'instant du premier dépassement et le temps de réponse à 5%

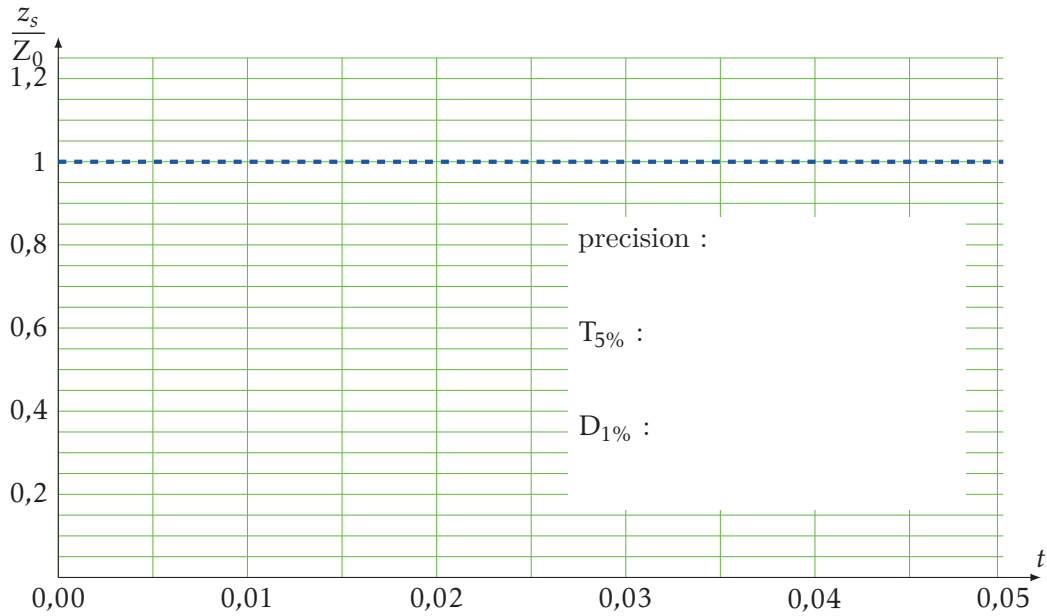


Figure 7 – Réponse temporelle corrigée à tracer

Q15. Conclure sur le cahier des charges.

-----

-----

-----

-----

-----

-----

### B.3. Correction par retour de pression

La servocommande est munie d'un dispositif de correction dit « à retour de pression » (figure 14).

Ce dispositif est constitué d'une canalisation de petite section qui relie les deux chambres du vérin. Il permet de « compenser » le débit d'huile introduit par le distributeur au cours d'un dépassement de position (oscillation).

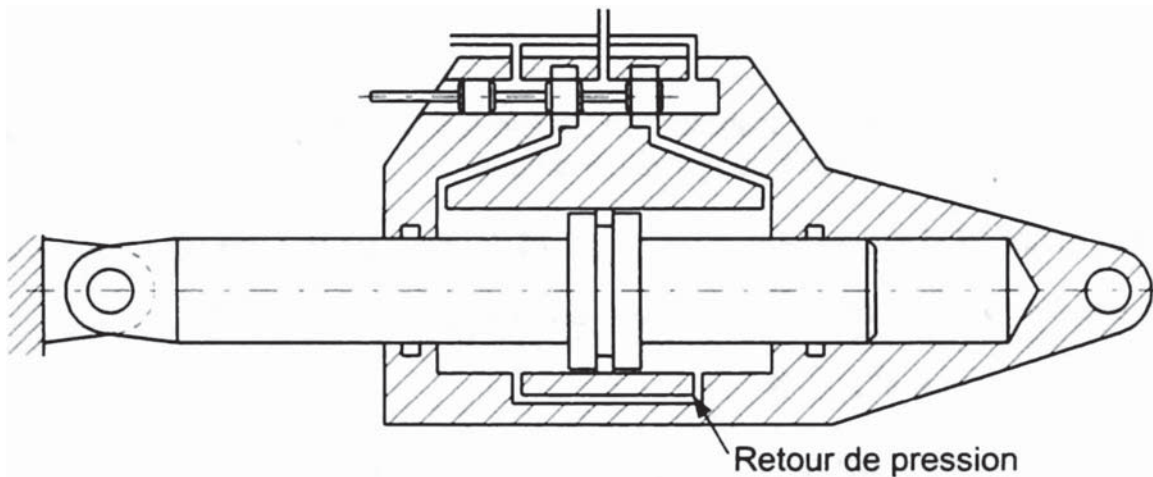


Figure 8 – Servo commande du rotor, avec retour de pression

La fonction de transfert en boucle ouverte du système devient :

$$H_{bo}(p) = \frac{2 \times 10^5}{(400 + p) \cdot (500 + p) + p}$$

On se propose d'étudier l'effet du retour de pression sur le comportement de la servo commande.

Q16. Déterminer la valeur finale de  $z_s(t)$  pour une entrée en échelon  $z_e(t) = Z_0 \cdot \mathcal{H}(t)$

-----

-----

-----

-----

-----

Q17. En déduire l'erreur indicielle  $\varepsilon_i$  correspondante.

-----

-----

-----

-----

-----

La réponse temporelle est présentée sur la figure 17 du document réponse. L'échelle des ordonnées n'est pas précisée sur la figure.

Q18. Préciser sur la figure, l'échelle des ordonnées, évaluer le temps de réponse et le dépassement relatif.

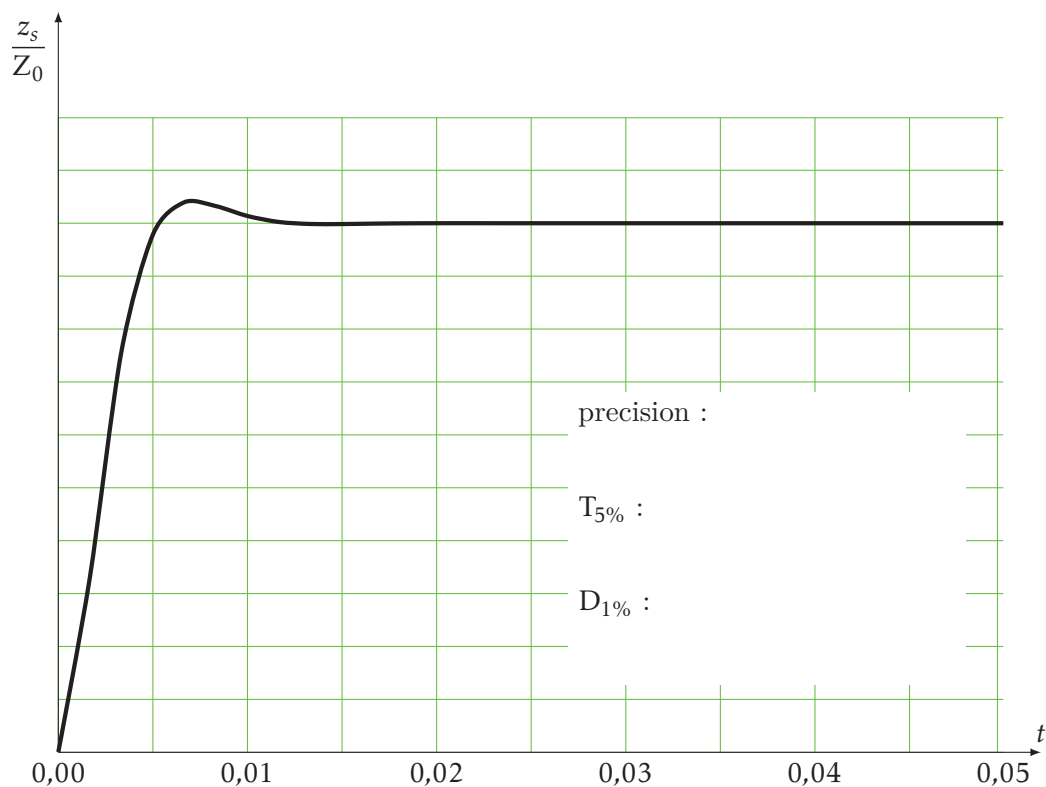


Figure 9 – Réponse temporelle à un échelon avec prise en compte du retour de pression  $z_e(t) = Z_0 \mathcal{H}(t)$

Q19. Conclure sur les corrections proposées pour répondre au cahier des charges

-----

-----

-----

-----

-----

