DM1 - Automne - Systèmes linéaires et asservis

QCM 1 - Mise en équation d'un réacteur chimique

Corrigé page **??**

Le schéma de la figure 1 décrit un réacteur chimique de volume V alimenté en continu par un produit A de concentration c_{in} à un débit Q.

Afin de garder le niveau constant dans le réacteur, on soutire le milieu de réaction au même débit Q. De plus, un agitateur mélange parfaitement les produits à l'intérieur du réacteur (par exemple le produit A venant de l'alimentation, est instantanément et parfaitement réparti dans le réacteur).

À l'intérieur du réacteur a lieu une réaction chimique qui transforme le produit A (concentration c_A) en un nouveau produit B (concentration c_B), selon la réaction suivante :

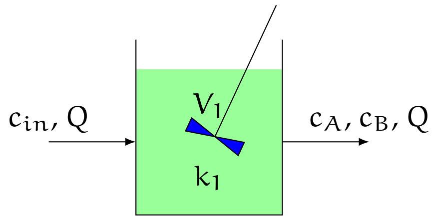


FIGURE 1 – Réacteur chimique

$$A \xrightarrow{k} B$$

La réaction chimique est du premier ordre, c'est à dire que la cinétique est proportionnelle à la concentration c_A, et la constante de proportionnalité (aussi appelée vitesse spécifique) est noté k.

À partir d'un bilan de concentration, on peut écrire les deux équations différentielles :

— pour le produit A

$$\frac{d\,c_A(t)}{dt} = \frac{Q}{V} \cdot c_{in}(t) - \frac{Q}{V} \cdot c_A(t) - k \cdot c_A(t)$$

— pour le produit B

$$\frac{d\,c_B(t)}{dt} = +k \cdot c_A(t) - \frac{Q}{V} \cdot c_B(t)$$

Pour les applications numériques : $V = 100\,m^3$.

On se place dans les conditions de Heaviside autour du point de fonctionnement nominal. On suppose que le débit d'alimentation du réactif reste constant ($Q = Q_0 = 100\,m^3/min$).

On note $C_{in}(p)$, $C_A(p)$ et $C_B(p)$ les transformées de Laplace de $c_{in}(t)$, $c_A(t)$ et $c_B(t)$.

Q1. Écrire les équations dans le domaine de Laplace

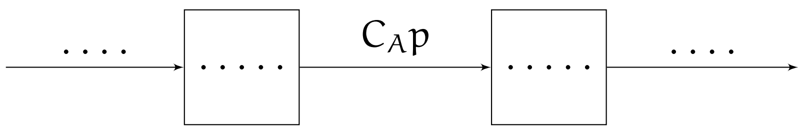
On rappelle que la forme canonique d'un premier ordre est $H_1(p) = \dfrac{K_1}{1+\tau_1 \cdot p}$.

Q2. Déterminer les deux fonctions de transfert
$H_A(p) = \dfrac{C_A(p)}{C_{in}(p)}$ et $H_B(p) = \dfrac{C_B(p)}{C_A(p)}$, les mettre sous forme canonique.

On note τ_A, K_A et τ_B , K_b respectivement la contante de temps et le gain des fonctions de transfert $H_A(p)$ et $H_B(p)$

Q3. Préciser le gain et la constante de temps pour chacune des fonctions de transfert en fonction de Q, V et k.

Q4. Compléter le schéma bloc



Q5. En déduire $H(p) = \dfrac{C_B(p)}{C_{in}(p)}$.

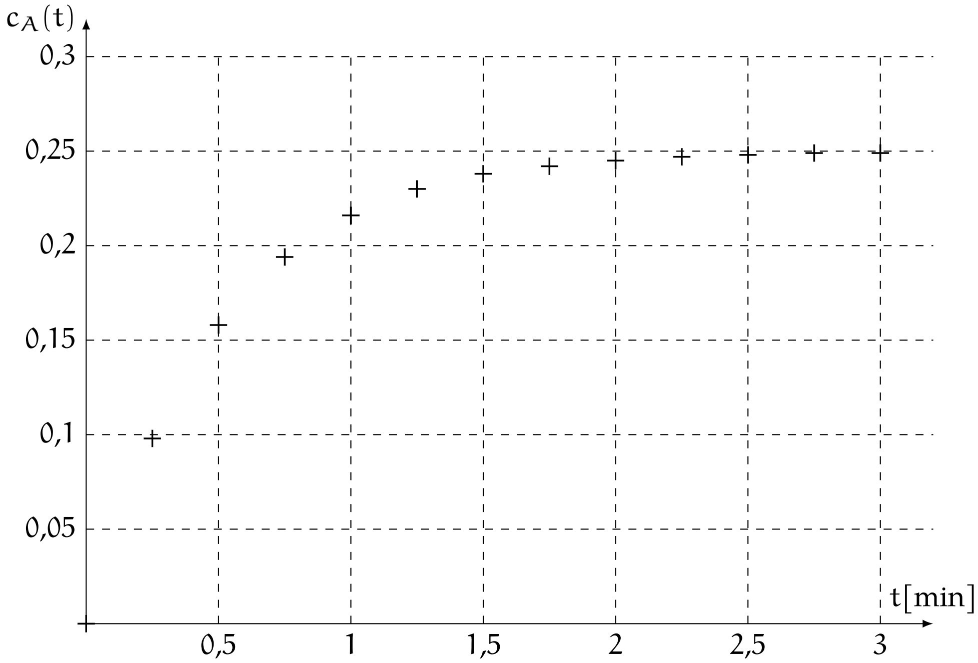
Un essai a permis de relever l'évolution de la concentration en produit A à la sortie du réacteur pour une évolution en échelon de la concentration du produit A à l'entrée du réacteur.

Cette évolution est modélisée par un échelon : $c_{in}(t) = C_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $C_0 = 0{,}5\,\mathrm{mol \cdot m^{-3}}$ et $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

Le tableau et la caractéristique de la figure 2 montre l'évolution de cette concentration.

t min	$c_A(t)$ $\mathrm{mol \cdot m^{-3}}$
0	0.
0.25	0.98e-1
0.50	0 .158
0.75	0.194
1.00	0.216
1.25	0.230
1.50	0.238
1.75	0.242
2.00	0.245
2.25	0.247
2.50	0.248
2.75	0.249
3.00	0.249

(a) relevé



(b)

FIGURE 2 – relevé expérimental de l'évolution de la concentration en produit A pour une évolution de la concentration à l'entrée en échelon $C_0 = 0{,}5\,\mathrm{mol \cdot m^{-3}}$

On se propose de modéliser cette réponse par une fonction de transfert du premier ordre : $H_1(p) = \dfrac{S(p)}{E(p} = \dfrac{K_1}{1 + \tau_1 \cdot p}$.

On sait que la réponse d'un système du premier ordre à un échelon de consigne $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ s'écrit :

$$s(t) = K_1 \cdot E_0 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)\right) \mathcal{H}(t)$$

Q6. Justifier cette forme.

Q7. Déterminer $s(\tau)$ et $s(3 \cdot \tau)$ et la tangente pour $t = 0$.

Q8. À partir du relevé de la figure 2, justifier que l'on peut modéliser ce système comme un premier ordre, déterminer alors, le temps de réponse à 5% ($T_{5\%}$) et le gain K_2 et la constante de temps τ_2. En déduire la valeur de la vitesse spécifique k.

Pour la suite, quelle que soit la valeur trouvée précédemment, on prendra pour $H(p)$

$$H(p) = \frac{1}{2 + 3 \cdot p + p^2}$$

Q9. Mettre $H(p)$ sous forme canonique. préciser le gain le coefficient d'amortissement et la pulsation propre.

Q10. Déterminer la transformée de Laplace de l'échelon de concentration $c_{in}(t) = C_0 \cdot \mathcal{H}(t)$. En déduire $C_B(p)$

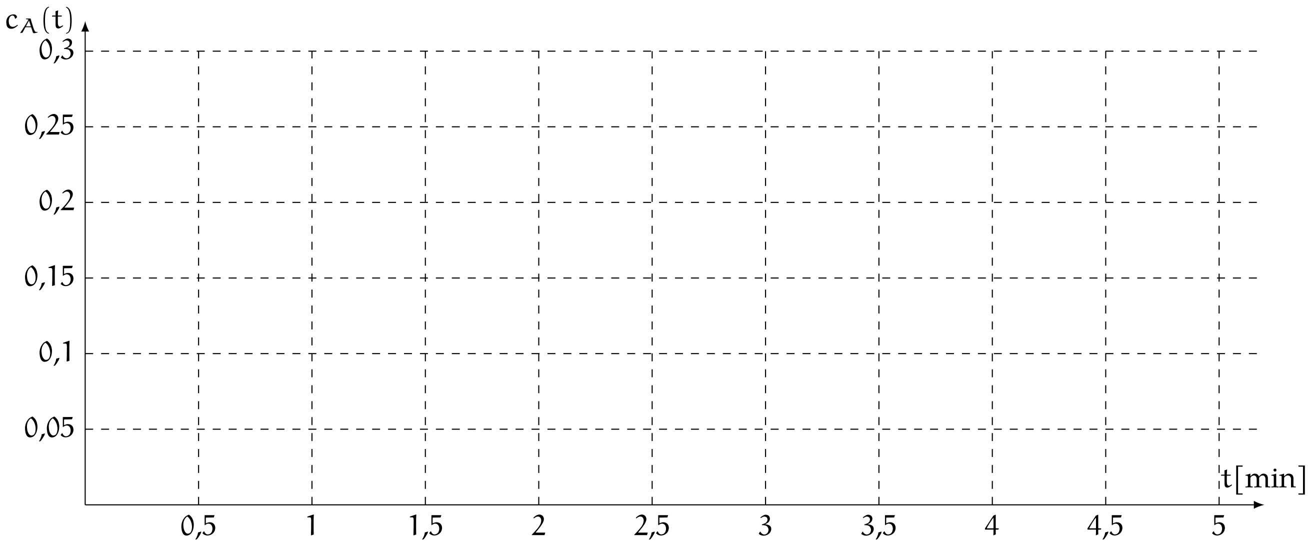
Q11. Déterminer la valeur finale $\lim_{t\to\infty}(c_B(t))$, la valeur initiale, et la tangente initiale.

Q12. Montrer que $C_B(p)$ peut s'écrire sous la forme $C_B(p) = \dfrac{A}{p+1} + \dfrac{B}{p+2} + \dfrac{C}{p}$, déterminer A, B, C.

Q13. Déterminer $c_B(t)$, à partir du tableau des transformées.

$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau \cdot p}$
$a \cdot \mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p}$
$a \cdot u(t-\tau)$	$\dfrac{a}{p} \cdot e^{-\tau \cdot p}$
$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p^2}$
$t^n \cdot \mathcal{H}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-a \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$

Q14. Tracer $c_2(t)$, préciser le temps de réponse à 5%. Conclure,



Exercice 2 - Borne motorisée rétractable
ATS-2010 *Corrigé page* **??**

Le dispositif étudié est un système permettant de limiter ou d'interdire la circulation dans des zones à accès réservé. Ce dispositif comporte :

— un caisson intégrant la partie opérative, à savoir une borne motorisée rétractable dans le sol,

— un caisson intégrant la partie commande comportant :

  — une platine électronique de gestion,

  — une batterie d'alimentation électrique du système,

  — des cellules photovoltaïques assurant la charge de la batterie.

A. Modélisation du moteur

Le système est équipé d'un motoréducteur à courant continu. Celui-ci est l'association d'un moteur à aimants permanents de tension nominale 12V et d'un réducteur de rapport 1/60.

Les équations de fonctionnement du moteur peuvent s'écrire en utilisant le formalisme de Laplace :

(a) Vue d'ensemble

(b) Moto-réducteur

FIGURE 3 – Borne rétractable

— Équation électrique :
$U_m(p) = K_m \cdot W_m(p) + R_m \cdot I_m(p) + L_m \cdot p \cdot I_m(p)$

— Équation mécanique :
$J \cdot p \cdot W_m(p) = K_m \cdot Im(p) - F \cdot W_m(p) - C_R(p)$

avec

— $U_m(p)$: transformée de Laplace de $u_m(t)$ la tension de commande du moteur,

— $I_m(p)$: transformée de Laplace de $i_m(t)$ le courant circulant dans l'induit du moteur,

— $W_m(p)$: transformée de Laplace de $w_m(t)$ la vitesse de rotation du moteur,

— $C_R(p)$: transformée de Laplace du couple résistant $c_r(t)$ sur l'arbre moteur (charge et frottements secs),

— $F = 57 \times 10^{-6}\,\mathrm{N \cdot m \cdot rad^{-1} \cdot s}$: coefficient de frottement visqueux,

— $J = 72{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$: inertie totale ramenée sur l'arbre moteur,

— $R_m = 0{,}93\,\Omega$: résistance de l'induit,

— $L_m = 0{,}9\,\mathrm{mH}$: inductance,

— $K_m = 0{,}046\,\mathrm{V \cdot rad^{-1} \cdot s}$

Q1. On considère dans un premier temps que $C_r(p) = 0$.

Q1a. Déterminer la fonction de transfert $H_u(p) = \dfrac{W_m(p)}{U_m(p)}$ en fonction de différents paramètres.

Q1b. Faire l'application numérique.

Q1c. Mettre sous forme canonique, préciser les coefficients caractéristiques.

Q2. On considère maintenant que $U_m(p) = 0$:

Q2a. Déterminer la fonction de transfert $H_c(p) = \dfrac{W_m(p)}{C_r(p)}$.

Q2b. Faire l'application numérique.

quel que soit vos résultats, on considère que la fonction de transfert $H_u(p)$ s'écrit :

$$H_u(p) = \frac{21{,}20}{\left(1 + \dfrac{p}{33{,}2}\right)\left(1 + \dfrac{p}{1\,001}\right)}$$

La tension de commande du moteur est $u_m(t) = U_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $U_0 = 12\,\mathrm{V}$.

Q3. Déterminer $U_m(p)$ puis $W_m(p)$.

Q4. Montrer que $W_m(p)$ peut s'écrire $W_m(p) = \dfrac{A}{1 + \dfrac{p}{33{,}2}} + \dfrac{B}{1 + \dfrac{p}{1\,001}} + \dfrac{C}{p}$, déterminer A, B et C.

Q5. Déterminer alors, à partir du tableau des transformées inverse, $w_m(t)$. Tracer l'allure de la réponse temporelle. Préciser la valeur finale, initial, et la tangente à l'origine.