

En complément à ce devoir, je vous propose de regarder le DM de Noël des MPSI (sur mon site) sur les diagrammes de Bode.

### Exercice 1 - Étude d'un accéléromètre

Adapté du concours d'entrée en 3<sup>e</sup> année de l'ENS Cachan

Corrigé page 4

Les capteurs d'accélération permettent des mesures statiques de gravité comme des mesures dynamiques de vibration. On les retrouve comme élément sensible des Airbags et désormais ils sont intégrés dans les manettes des dernières consoles de jeux vidéo (prise en compte des mouvements du joueur et de l'inclinaison de la manette). Ces capteurs sont désormais miniaturisés, ils tiennent dans des dimensions typiques de  $(3 \times 3 \times 1 \text{ mm}^3)$  et sont utilisés de plus en plus en mode asservi.

Nous nous intéressons ici à un accéléromètre associé à un mouvement purement rectiligne dont on notera l'accélération  $\gamma$ . L'accéléromètre est constitué d'une masse sismique  $m$ , retenue par un ressort de rappel de raideur  $k$  et soumise à un amortissement, du type frottement visqueux, de coefficient  $\lambda$  (Fig.1.1). Dans le cadre de capteurs miniaturisés, on mesure le déplacement de la masse sismique par une détection capacitive, on obtient ainsi un signal tension  $V$  qui est proportionnel au déplacement de la masse sismique au sein du capteur via un gain  $K_V$ .

L'accéléromètre sera utilisé en mode asservi par l'application d'une force  $F$  qui permet de ramener la masse à sa position d'équilibre (obtenue sans accélération) lorsqu'elle subit une accélération  $\gamma$ . La commande de cette force  $F$  se fait à partir de la tension de mesure  $V$ .

Cette force est considérée comme directement proportionnelle à la tension de mesure, on lui associe alors un gain  $K_F$ . Elle vient s'opposer à l'effet de l'accélération  $\gamma$  qui s'applique sur la masse.

On note  $\mathcal{R}_B$  le repère associé au boîtier,  $\mathcal{R}_g$  le repère galiléen.

On notera, dans le domaine de Laplace,  $\Gamma(p)$  l'accélération du boîtier par rapport au repère galiléen que l'on cherche à mesurer,  $X(p)$  la position de la masse sismique,  $F(p)$  la force de contre-réaction et  $V(p)$  la tension permettant d'avoir une image électrique du déplacement de la masse.

#### A. Mise en équation et modèle

**Q1.** Établir, le bilan des actions extérieures à la masse sismique.

**Q2.** Montrer que l'équation différentielle du mouvement de la masse sismique en fonction de  $m$ ,  $k$ ,  $\lambda$  et  $\gamma$  et  $F$  autour de la position d'équilibre  $x(0) = 0$  au repos s'écrit

$$\gamma(t) - \frac{F(t)}{m} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x(t) + \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

Le schéma bloc figure 1.4 représente le fonctionnement du capteur en boucle fermée avec en entrée

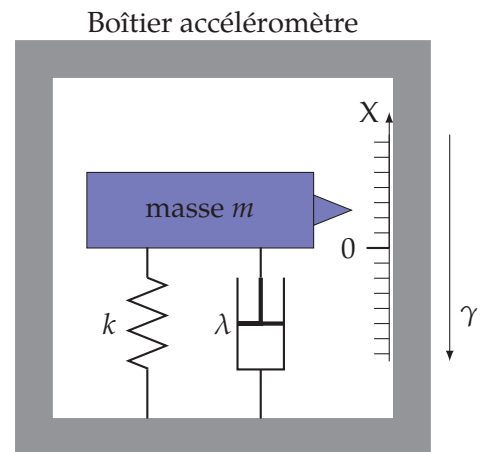


FIGURE 1.1 – Accéléromètre

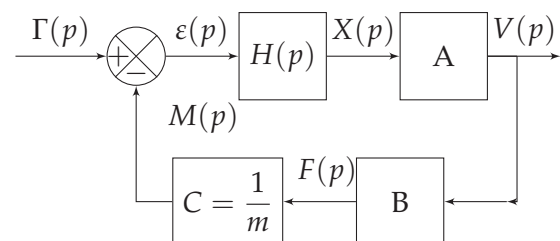


FIGURE 1.2 – Schéma bloc de l'accéléromètre asservi

l'accélération  $\Gamma(p)$  et en sortie la tension de mesure  $V(p)$ .

**Q3.** Préciser les blocs  $A$  et  $B$

**Q4.** Montrez que  $H(p)$  peut se mettre sous la forme d'un second ordre

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \frac{2 \cdot \zeta}{\omega} \cdot p + \frac{p^2}{\omega^2}}$$

Donner l'expression et la signification de  $H_0$ ,  $\zeta$ , et  $\omega_0$ .

L'effet de la miniaturisation a comme conséquence des valeurs pour les paramètres ( $m$ ,  $k$ ,  $\lambda$ ) peu conventionnelles ce qui fait ici la particularité du sujet. On prendra pour les calculs les valeurs suivantes :  $m = 165 \text{ g}$ ,  $k = 0,3 \text{ N m}^{-1}$ ,  $\lambda = 42 \times 10^{-6} \text{ kg s}^{-1}$ .

**Q5.** En déduire les valeurs de  $H_0$ ,  $\zeta$ , et  $\omega_0$ , commentez.

**Q6.** Sous une accélération continue  $\lambda$  de  $1\text{g}$ , ( $g=9,81 \text{ m s}^{-2}$ ), quelle serait la valeur du déplacement de la masse sismique au sein du capteur s'il n'y avait pas d'asservissement ?

On prendra pour toute la suite du sujet :  $\zeta = 0,1$ ,  $\omega_0 = 1,5 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$  et  $H_0 = 5 \times 10^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

**Q7.** Que peut on dire de ces valeurs pour un deuxième ordre ?

## B. Étude en boucle ouverte de l'accéléromètre

**Q8.**

**Q8a.** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte, du système complet, que l'on notera  $G(p)$  et que l'on exprimera sous la forme :

$$G(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{G_0}{1 + \frac{2 \cdot \zeta}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On donne :  $K_V = 0,5 \text{ V m}^{-1}$  et  $K_F = 0,6 \text{ N V}^{-1}$ .

**Q8b.** Calculer  $G_0$

Pour la suite du problème on prendra  $G_0 = 1$ .

**Remarque :** Pour la suite des calculs, au regard de la valeur de  $\zeta$ , on pourra considérer que le terme ( $\zeta^2$ ) est fortement négligeable devant 1.

**Q9.** Déterminer par le calcul, l'expression de la pulsation  $\omega_r$  pour laquelle le module de la fonction complexe  $G(j \cdot \omega)$  est maximum. Faire l'application numérique.

**Q10.** Déterminer l'expression de la marge de phase et de la pulsation associée  $\omega_{m\phi}$  pour laquelle le module de  $G(p)$  en dB est nul. Faire l'application numérique.

**Q11.** Tracer les diagrammes de Bode associés à  $G(p)$ . Vous y indiquerez les pulsations qui vous semblent pertinentes.

**Q12.** Que vaut la marge de gain ?

**Q13.** Au regard de ce tracé, que peut-on prédire du comportement en boucle fermée du système ?

## C. Étude en boucle fermée

On se place en boucle fermée. On s'intéresse désormais à la fonction de transfert suivante :

$$T(p) = \frac{V(p)}{\Gamma(p)}$$

**Q14.** Déterminer l'expression de la fonction de transfert  $T(p)$ .

**Q15.** Quelles sont la nature et les caractéristiques de  $T(p)$ .

**Q16.** Le système est-il stable ?

**Q17.** Déterminer la valeur finale de l'erreur en accélération  $\varepsilon_i$  avec  $\varepsilon(t) = \gamma(t) - \frac{F(t)}{m}$ .

**Q18.** Tracer l'allure de l'évolution temporelle de la tension  $V(t)$  lors de la réponse à un échelon d'accélération unitaire  $\gamma(t)$ .

**Q19.** On considère maintenant une rampe d'accélération  $\gamma(t) = a \cdot t\mathcal{H}(t)$ . Déterminer  $\varepsilon(t)$ . Que peut-on en déduire?

**Q20.** Conclure sur les performances obtenues.

#### D. Mise en place d'un correcteur

Afin d'améliorer les performances de l'accéléromètre, on insère en série dans la chaîne directe un correcteur du type P.I.D. dont la fonction de transfert théorique s'écrit :

$$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p} + \tau_d \cdot p \right)$$

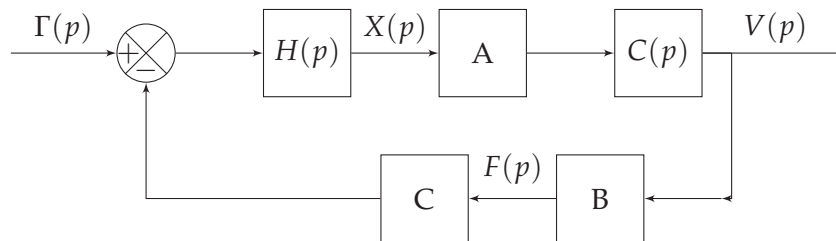


FIGURE 1.3 – Schéma bloc de l'accéléromètre corrigé

**Q21.** Justifier la place du correcteur dans se schéma.

Afin de mettre en place le correcteur de manière simple, on pose  $\tau_i = 4 \cdot \tau_d$ .

**Q22.** Montrer alors que l'on peut exprimer  $C(p)$  sous la forme :

$$C(p) = C_0 \cdot \frac{(1 + T_1 \cdot p)^2}{T_1 \cdot p}$$

Exprimer  $T_1$  et  $C_0$ .

On souhaite trouver les paramètres  $C_0$  et  $T_1$  pour que la fonction de transfert ainsi corrigée présente une marge de phase de  $45^\circ$  en boucle ouverte pour la pulsation  $\omega_{45} = 2120 \text{ rad s}^{-1}$ . Pour cette pulsation, on considérera que la fonction  $G(p)$  présente un gain de 1 et un déphasage de  $-165^\circ$ .

**Q23.** Déterminer le module et l'argument de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé en fonction de  $C_0$  et  $T_1$ .

**Q24.** Déterminer l'expression de  $C_0$  et  $T_1$  et faire l'application numérique.

**Q25.** Tracer les diagrammes de Bode associé à  $C(p)$ , quelles que soient les valeurs trouvées à la question précédentes sur le même diagramme que précédemment, on prendra  $T_1 = 0,90 \text{ ms}$  et  $C_0 = 0,43$ .

**Q26.** Tracer l'allure du diagramme de Bode de la fonction de transfert ainsi corrigée en boucle ouverte. Faire ce tracé sur le même document (d'une couleur différente).

**Q27.** Calculer l'erreur statique du système ainsi corrigé.

**Q28.** Calculer l'erreur dynamique (erreur de traînage) du système ainsi corrigé.

**Q29.** Que peut-on espérer sur les performances dynamiques en boucle fermée?