0.1 DM automne - Systèmes linéaires et asservis

Devoir 1 - Chaudière à bois déchiqueté

Corrigé page 10

A. Présentation générale

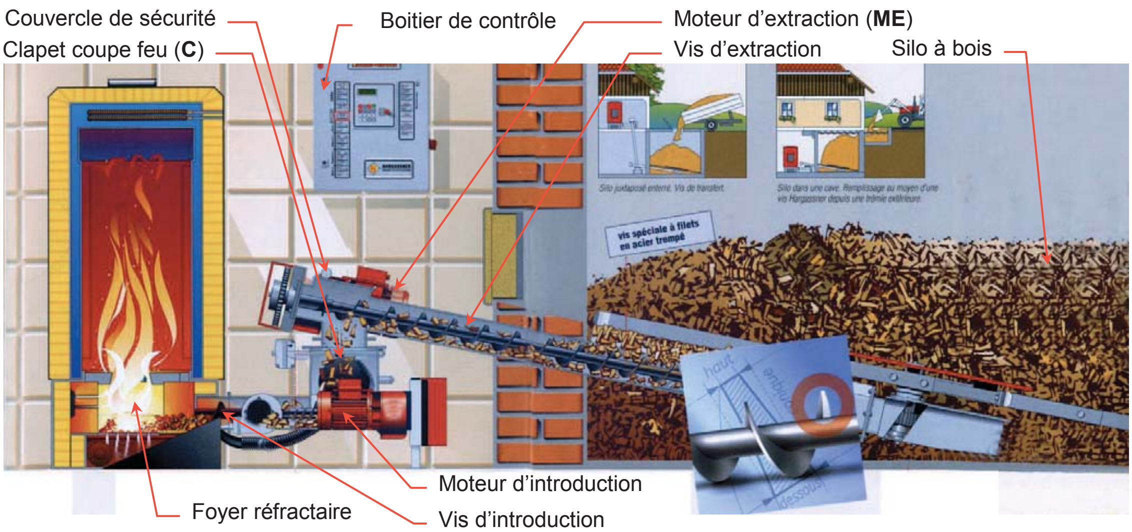


FIGURE 0.1.1 – Mise en situation

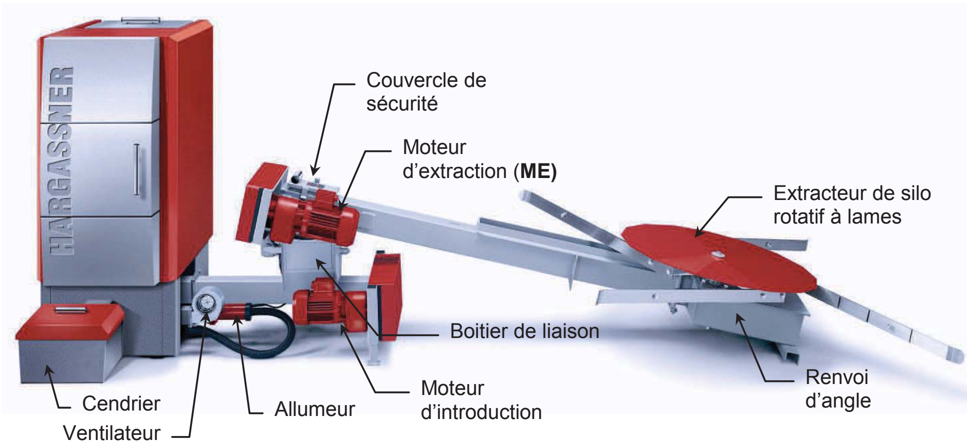


FIGURE 0.1.2 – Mise en situation

(Voir figures 0.1.2 et 0.1.1) Dans le cadre du « Grenelle de l'environnement » et de la mise en place de la « taxe carbone », l'avenir du chauffage est conditionné au fait que la biomasse est neutre en dégagement de CO2. HARGASSNER développe la technologie du chauffage au bois déchiqueté et aux granulés de bois dans le but de concilier un chauffage à la fois écologique et confortable d'utilisation. L'entreprise est devenue un leader en matière de technique innovante, de développement, de service, de qualité et de longévité dans le domaine du chauffage au bois.

L'étude porte sur la chaudière HSV 30, alimentée en bois déchiqueté, qui développe une puissance de chauffe de 25 à 35 kW.

Le bois déchiqueté est amené jusqu'à la chaudière dans un premier temps à l'aide d'un extracteur à lames puis de la vis d'extraction et enfin par la vis d'introduction. Il est alors brûlé au sein d'un foyer réfractaire développant des gaz dans la chambre de combustion. Les gaz sont dépoussiérés dans la chambre de détente avant de passer dans un échangeur tubulaire équipé de turbulateurs. Ces turbulateurs augmentent l'efficacité de l'échangeur et permettent son nettoyage automatique. L'échangeur permet le chauffage de l'eau à partir des fumées. Une vis de dépoussiérage et une vis de décendrage, associées aux turbulateurs évacuent automatiquement les cendres et les suies dans un cendrier.

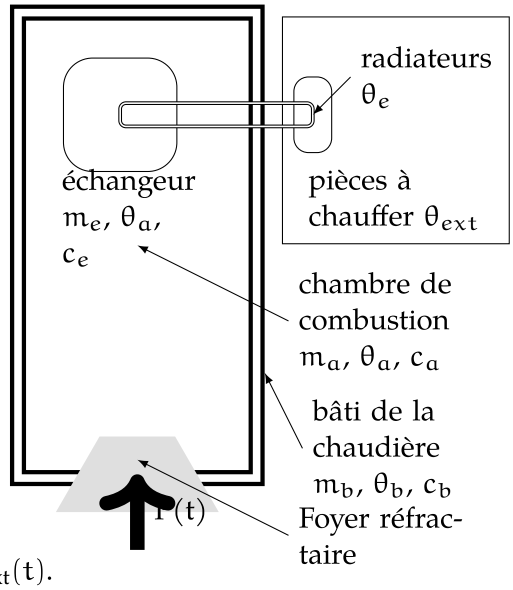
Dans cette étude, on ne s'intéresse qu'au fonctionnement de la chaudière.

B. Étude de la fonction « Chauffer l'eau »

B.1. Modélisation

Par l'intermédiaire d'un échangeur thermique, la combustion des granules de bois permet de chauffer de l'eau.

L'étude porte sur la montée en température de l'eau qui sert à chauffer les pièces au travers de radiateurs. Cette température est obtenue à partir d'une puissance calorifique fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire de la chaudière.



On considère que :

— $p(t)$ est la puissance calorifique en Watt fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire. Elle permet la montée en température du bâti de la chaudière ;

— l'air situé dans la chambre de combustion permet de monter à la température $\theta_e(t)$ l'eau située dans l'échangeur ;

— l'eau chaude, au travers des radiateurs permet de chauffer les pièces à une température $\theta_{ext}(t)$.

— $\theta_b(t)$ la température du bâti de la chaudière ;

— $\theta_a(t)$ la température de l'air dans la chambre de combustion ;

— θ_{ext} la température ambiante des pièces à chauffer.

avec les données suivantes

— m_b la masse du bâti à monter en température ; $m_b = 200\,\text{kg}$;

— c_b la capacité calorifique massique du bâti ; $c_b = 500\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;

— m_a la masse de l'air à monter en température ; $m_a = 2\,\text{kg}$;

— c_a la capacité calorifique massique de l'air ; $c_a = 700\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;

— $\theta_e(t)$ la température de l'eau dans l'échangeur et les radiateurs ; $m_e = 50\,\text{kg}$;

— c_e la capacité calorifique massique de l'eau $c_e = 4\,000\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;

— K_{ab} la conductance thermique entre le bâti et l'air dans la chambre de combustion ; K_{ab} la conductance thermique entre le bâti et l'air dans la chambre de combustion ; $K_{ab} = 40\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;

— K_{ae} la conductance thermique entre l'air et l'eau au travers de l'échangeur ou des radiateurs ; $K_{ae} = 400\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

On suppose que le corps de chauffe est parfaitement isolé de l'extérieur.

Les principes de conservation de l'énergie conduit à une modélisation par les équations différentielles ci-dessous.

Les transformées de Laplace sont notées :
$\mathcal{L}\left[\theta_i(t)\right] = T_i(p)$ et $\mathcal{L}\left[p(t)\right] = P(p)$.

$$m_b c_b \frac{d\theta_b(t)}{dt} + K_{ab}\left(\theta_b(t) - \theta_a(t)\right) = p(t) \qquad (1)$$

$$m_a c_a \frac{d\theta_a(t)}{dt} + K_{ae}\left(\theta_a(t) - \theta_e(t)\right) = K_{ab}\left[\theta_b(t) - \theta_a(t)\right] \qquad (2)$$

$$m_e c_e \frac{d\theta_e(t)}{dt} + K_{ae}\left(\theta_e(t) - \theta_{ext}(t)\right) = K_{ae}\left[\theta_a(t) - \theta_e(t)\right] \qquad (3)$$

C. Identification expérimentale

À la première mise en route de la chaudière, l'installateur a réalisé un relevé de la température de l'eau circulant dans les radiateurs dans les conditions réelles de fonctionnement (la température extérieure était proche de $0\,°C$), afin d'évaluer le temps de réponse du système installé. L'installateur a fait fonctionner la chaudière avec un chargement de bois tel que la puissance de chauffe soit maximale $p(t) = P_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ ($\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside) avec $P_0 = 10\,kW$.

La figure 0.1.3 présente ce relevé.

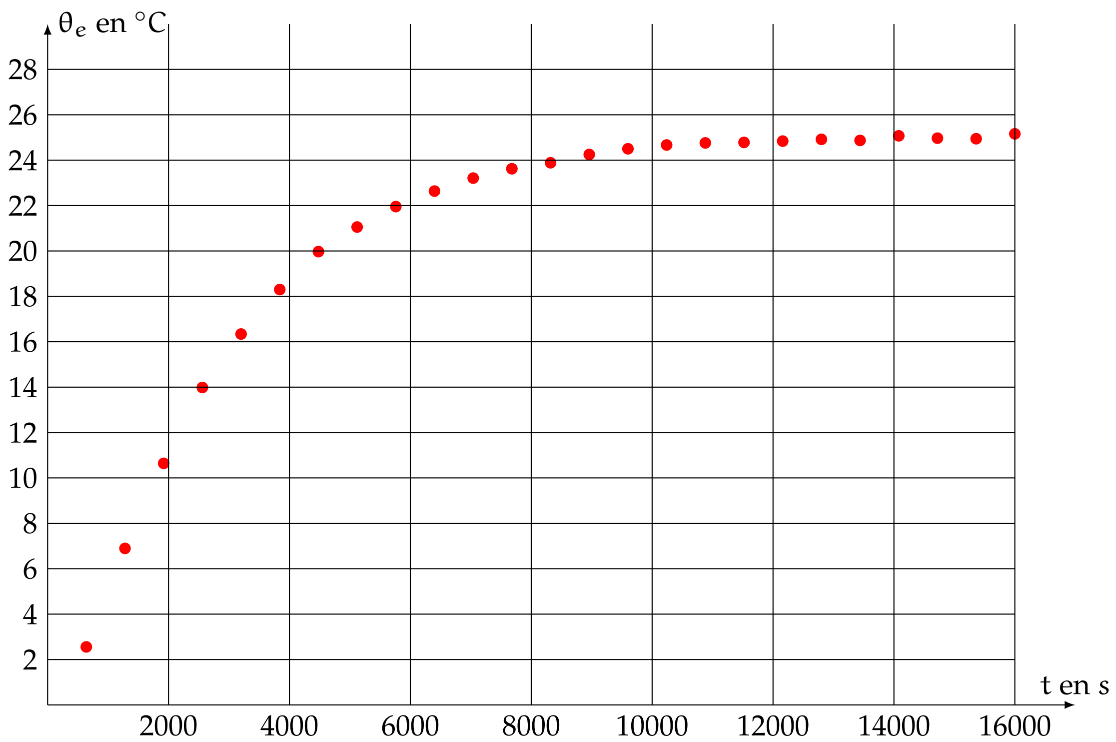


FIGURE 0.1.3 – Relevé temporel de la montée en température pour $p(t) = P_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ et $P_0 = 10\,kW$

Q1. Déterminer $T_{5\%}$, le temps de réponse à 5%, la valeur finale.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

n se propose d'identifier le comportement du système par un modèle plus simple du premier ordre :

$$H(p) = \frac{T_e(p)}{P(p)} = \frac{K}{1 + T \cdot p}$$

avec $T_e(p)$ la transformée de Laplace de $\theta_e(t)$ et $P(p)$, la transformée de Laplace de $p(t)$.

On considère que l'entrée est un échelon de puissance $p(t) = P_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ ($\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside) avec $P_0 = 10\,\text{kW}$.

Q2. Déterminer la transformée de Laplace de $p(t)$ en déduire $T_e(p)$.

Q3. À partir du tableau des transformées, justifier que $\theta_e(t) = K \cdot P_0 \cdot \left(1 - e^{\frac{t}{T}}\right) \cdot \mathcal{H}(t)$.

Q4. Déterminer la valeur finale de la température $\theta_e(t)$, en déduire la valeur de K.

Q5. Déterminer par identification avec un point particulier de la courbe la valeur de T (préciser les tracés nécessaires sur la courbe de la figure 0.1.3).

Q6. Tracer l'allure de la réponse temporelle sur le graphe précédent. Préciser les points et éléments particuliers.

Q7. La modélisation simplifiée du premier ordre est-elle pertinente ?

D. Modélisation de connaissance

On se propose maintenant d'établir le modèle de connaissance du système à partir des équations différentielles qui décrivent le comportement.

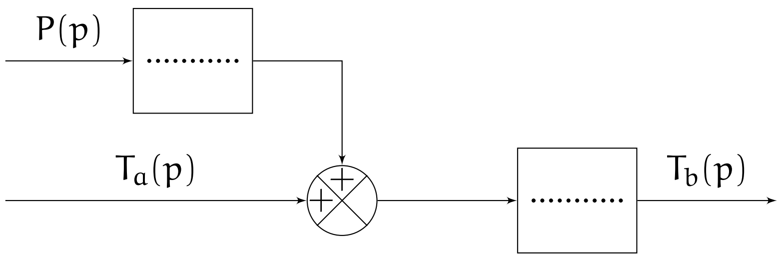
Q8. En supposant que les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), donner dans le domaine de Laplace, la transformée des équations différentielles (1), (2) et (3).

Q9. Exprimer $T_b(p)$ en fonction de $T_a(p)$ et de $P(p)$ en faisant apparaître les variables m_b, c_b et K_{ab} et mettre $T_b(p)$ sous la forme $T_b(p) = H_1(p)T_a(p) + H_2(p)P(p)$. avec $H_1(p)$ et $H_2(p)$ deux fractions rationnelles en p.

Q10. Montrer que $H_1(p)$ peut s'écrire $H_1(p) = \dfrac{K_1}{1+\tau_1 \cdot p}$. Préciser l'ordre du système définit par la fonction de transfert $H_1(p)$, ainsi que, littéralement, ses caractéristiques. Calculer la valeur numérique approchée de τ_1, la constante de temps de ce système.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

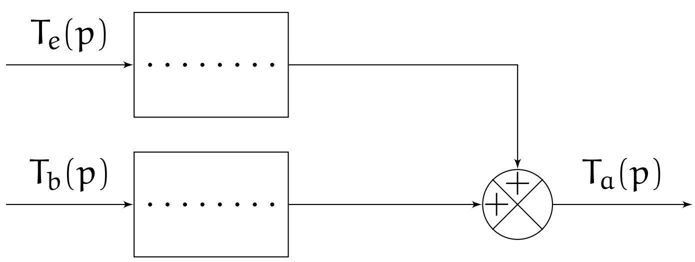
Q11. Compléter le schéma-bloc associé à l'expression de $T_b(p)$ en utilisant les variables K_{ab} et τ_1.



Q12. Exprimer $T_a(p)$ en fonction de $T_e(p)$ et de $T_b(p)$ en faisant apparaître les variables m_a, c_a, K_{ae} et K_{ab}. Mettre $T_a(p)$ sous la forme $T_a(p) = H_3(p)T_e(p) + H_4(p)T_b(p)$. Montrer que les fonctions de transfert respectives $H_3(p)$, $H_4(p)$ peuvent s'écrire :
$H_3(p) = \dfrac{K_3}{1+\tau_3 \cdot p}$ et $H_4(p) = \dfrac{K_4}{1+\tau_4 \cdot p}$. Calculer la valeur numérique approchée de τ_3, la constante de temps de ces systèmes.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Q13. Compléter le schéma-bloc associé à l'expression de $T_a(p)$.



Q14. Exprimer $T_e(p)$ en fonction de $T_a(p)$ et de $T_{ext}(p)$.

Q14a. Préciser l'ordre du système définit ainsi que, littéralement, ses caractéristiques.

Q14b. Calculer la valeur numérique approchée de τ_5, la constante de temps de ce système.

Q14c. Tracer le schéma bloc ayant pour entrées $T_a(p)$ et $T_{ext}(p)$ et pour sortie $T_e(p)$ et comme perturbation $T_{ext}(p)$.

Finalement, le schéma bloc global de la chaudière peut se mettre sous la forme de la figure 0.1.6.

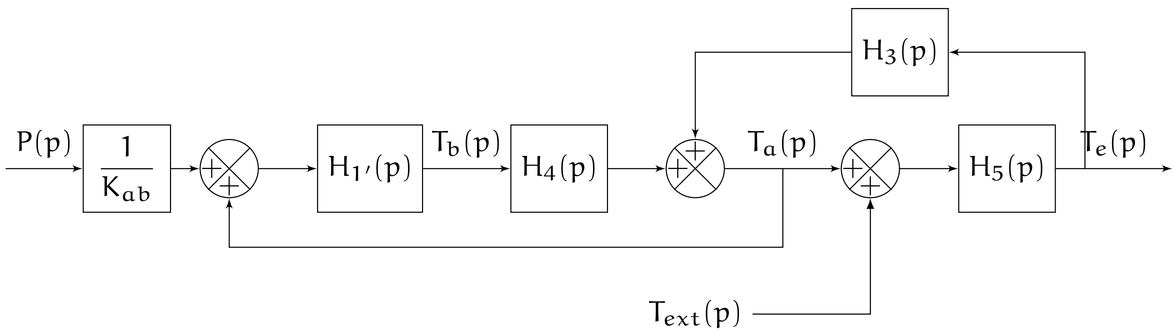


FIGURE 0.1.4 – Schéma bloc global

Dans un premier temps, on considère que $T_{ext}(p) = 0$

Q15. Par la méthode de votre choix, exprimer $\dfrac{T_e(p)}{P(p)}$ en fonction de $H_{1'}(p)$, $H_4(p)$, $H_5(p)$, $H_3(p)$ et K_{ab}. Vous simplifierez l'écriture en notant les fonctions de transfert $H_i(p)$ sous la forme H_i.

E. Prévision de l'allure de la réponse temporelle

L'étude porte sur la montée en température de l'eau qui sert à chauffer les pièces au travers de radiateurs. Cette température est obtenue à partir d'une puissance calorifique fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire de la chaudière.

Suite à la simplification des équations de la thermodynamique, le système peut se modéliser par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{T_e(p)}{P(p)} = \frac{0{,}0025}{1 + 3\,000 \cdot p + 1\,250\,000 \cdot p^2}$$

T_e représente la température de l'eau à atteindre dans les radiateurs de la maison, $P(p)$ représente la puissance calorifique en Watt, fournie par le bois brûlé.

On considère que le corps de chauffe de la chaudière est soumis à un échelon de puissance de $p(t) = P_0 \cdot \mathcal{H}(t))$ où $\mathcal{H}(t)$ est la fonction de Heaviside, avec $P_0 = 10\,\mathrm{kW}$.

Q16. Déterminer la transformée de Laplace de $p(t)$, en déduire que

$$T_e(p) = \frac{P_0}{400 \cdot p\,(1 + 2\,500p)\,(1 + 500p)}$$

Donner les valeurs initiales et les valeurs finales prévisibles pour la température de l'eau $\theta_e(t)$. et la tangente à l'origine.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Q17. Préciser la forme de la décomposition en éléments simples de $T_e(p)$, déterminer les différents coefficients.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Q18. À partir du tableau des transformées inverses, déterminer $\theta_e(t)$. Tracer l'allure de $\theta_c(t)$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

On reprend le schéma de la figure 0.1.6, on considère maintenant que $P(p) = 0$.

Q19. Déterminer $\dfrac{T_e(p)}{T_{ext}(p)}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Annexes

$f(t) \cdot \mathcal{H}(t)$	$F(p)$
Dirac : $\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau \cdot p}$
Heaviside : $\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p}$
$a \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p}$
$a \cdot \mathcal{H}(t-\tau)$	$\frac{a}{p} \cdot e^{-\tau \cdot p}$
$a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{a}{p^2}$
$t^n \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-a \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\frac{1-e^{-a \cdot t}}{a} \cdot \mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p \cdot (p+a)}$

Table 0.1.4 – Transformées de Laplace usuelles