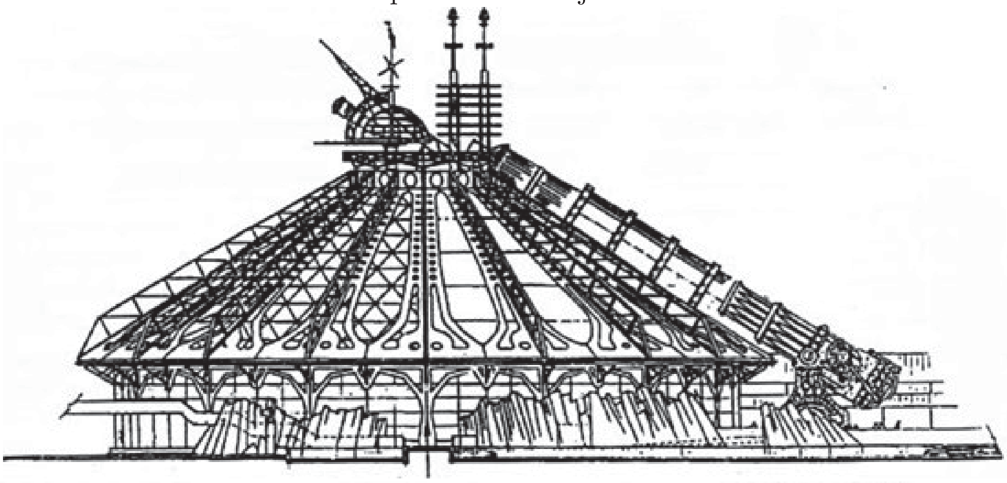
Modélisation des systèmes linéaires et asservis

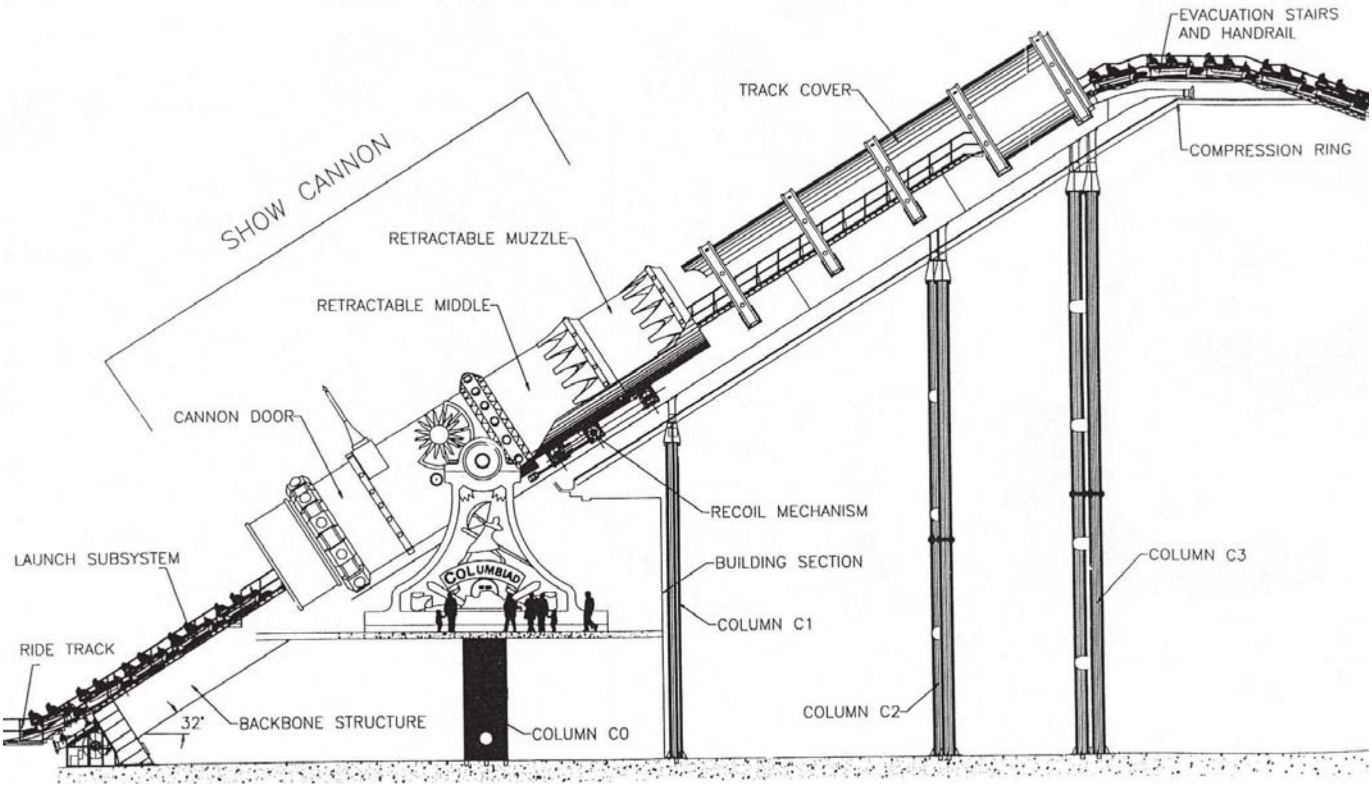
Devoir à la maison 1- Space Mountain

Corrigé page 7

A. Présentation

Cette attraction est installée au parc EuroDisney. Elle se présente sous la forme d'un chapiteau renfermant une montagne russe à grande vitesse. Les passagers peuvent faire l'expérience d'un voyage évoquant l'histoire du roman de JULES VERNES « de la terre à la lune », grâce à de somptueux décors spatiaux. Les voitures sont sonorisées en synchronisation avec le circuit qui comporte trois renversements complets. Le système de lancement, évoquant un canon, est en fait une catapulte à propulsion électrique de type porte-avions. Un pousseur vient en contact avec le train afin de le propulser. La motorisation de ce dispositif fait l'objet de ce devoir.





A.1. Objectifs

Il s'agit de :

— Modéliser le comportement du système de motorisation de la catapulte
— Quantifier des performances du système
— Conclure quand au respect du cahier des charges de la catapulte

A.2. Extrait du cahier des charges

	Exigence	Critères	Niveau
id1	Propulser en toute sécurité un train de passagers vers le point d'entrée de la montagne russe	Durée du cycle de lancement Fréquence de lancement Masse propulsée Inclinaison de la voie Maintien en position Vitesse de propulsion accélération	30 secondes maxi 1 toute les 36 s 7 500 kg maxi 34° frein de parking $14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ maxi $8\,\mathrm{m/s^2}$ mini $\pm 1\,\mathrm{m/s^2}$

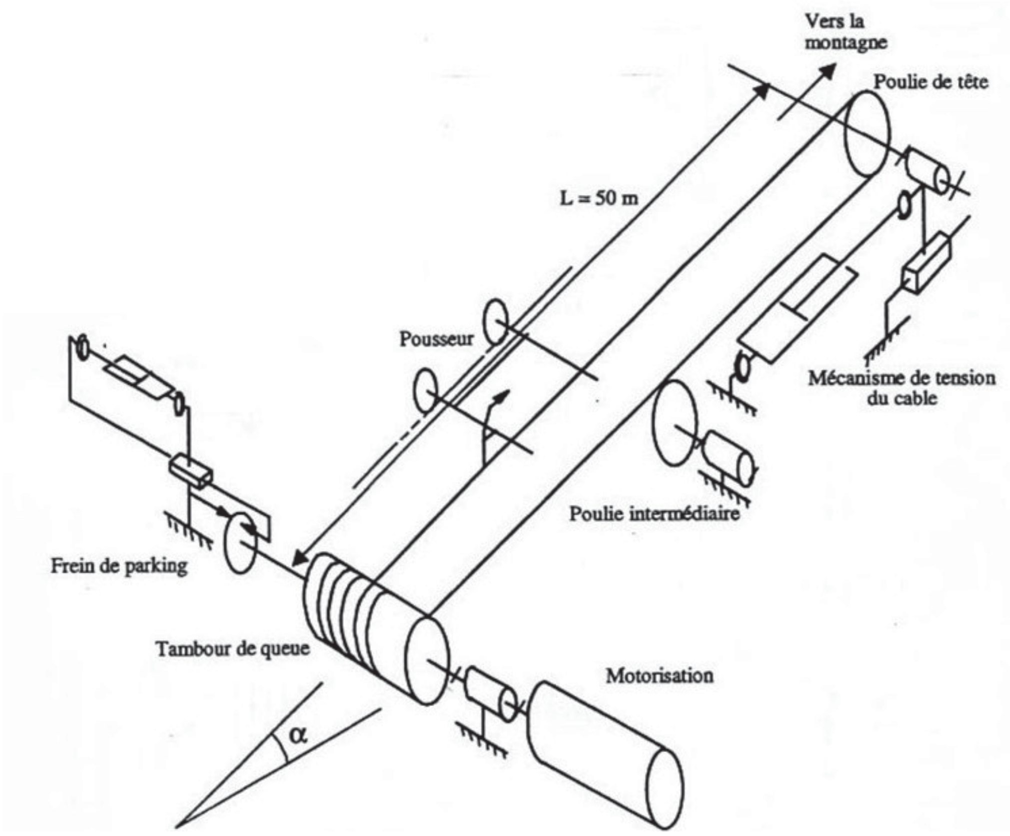


Figure 1 – Schéma du lanceur

B. Étude de l'asservissement de la motorisation de la catapulte

B.1. Étude préliminaire : Moteur à courant continu

Les équations d'un moteur à courant continu classique sont donnés ci-après :

— Équation électrique

$$u(t) = \mathrm{R}\cdot i(t) + \mathrm{L}\cdot\frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{dt}} + e(t)$$

— Équation mécanique

$$\mathrm{J}_{eq}\frac{\mathrm{d}\,\omega_m(t)}{\mathrm{dt}} = c_m(t) - c_r(t)$$

— Relations caractéristiques de comportement

$$c_m(t) = \mathrm{K}_t\cdot i(t)$$
$$e(t) = \mathrm{K}_e\cdot\omega_m(t)$$

Avec

— $u(t)$: la tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du système)
— $e(t)$: force contre-électromotrice (en V)
— $i(t)$: intensité (en A)

— $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s) (sortie du système)
— $C_m(t)$: couple moteur (en N.m)
— $C_r(t)$: couple résistant (en N.m) (perturbation du système)
— $J_e q$: inertie en rotation de l'arbre moteur (en kg.m2)
— R : résistance électrique du moteur
— L : inductance du moteur
— K_e : constante de la force contre-électromotrice
— K_t : constante de couple

On rappelle les formes canoniques des systèmes linéaires :

système du premier ordre : $\dfrac{K}{1+T\cdot p}$

système du second ordre : $\dfrac{K}{1+\dfrac{2\cdot\xi}{\omega_n}\cdot p+\dfrac{p^2}{\omega_n^2}}$

On se place dans les conditions de Heaviside.

Q1. Appliquer les transformées de Laplace aux équations précédentes.

Q2. Compléter le schéma bloc du document réponse.

Q3. Déterminer la fonction de transfert $H_1(p)=\dfrac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ en la mettant sous la forme canonique (on supposera $C_r(p)$ nul pour cette question). Préciser l'ordre.

Q4. Déterminer la fonction de transfert $G_1(p)=\dfrac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$ en la mettant sous la forme canonique (on supposera $U(p)$ nul pour cette question).

Q5. En déduire $\Omega_m(p)$ en fonction de $U(p)$, $C_r(p)$, $H_1(p)$ et $G_1(p)$.

B.2. Réponse temporelle

Afin d'identifier le comportement du moteur, on a réalisé un essai temporel à vide ($c_r(t)=0$, en appliquant, un échelon de tension $u(t)=U_0\cdot\mathcal{H}(t)$ avec $U_0=700\,V$, le résultat de l'essai est présenté sur la figure 5 page 9.

Q6. Déterminer le temps de réponse à $T_{5\%}$ et la valeur finale.

Compte tenu de la réponse temporelle obtenue expérimentalement, on propose de modéliser le comportement du moteur par un système du premier ordre, soit décrit par l'équation différentielle suivante :

$$T_m\cdot\frac{d\,\omega_m(t)}{dt}+\omega_m(t)=K_m\cdot u(t)$$

ce qui nous permet d'écrire la fonction de transfert simplifiée suivante :

$$H_{simp}(p)=\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}=\frac{K_m}{1+T_m\cdot p}$$

Q7. Déterminer $\Omega_m(p)$ pour $u(t)=U_0\cdot\mathcal{H}(t)$ puisd éterminer $\omega(t)$, la réponse temporelle.Tracer l'allure de la réponse temporelle sur le graphe précédent.

Q8. Déterminer $\omega_m(t)$ pour les valeurs particulières suivantes de $t=T_m$, $t=3\cdot T_m$. Déterminer la tangente en $t=0$ de $\omega_m(t)$. Préciser les points particuliers.

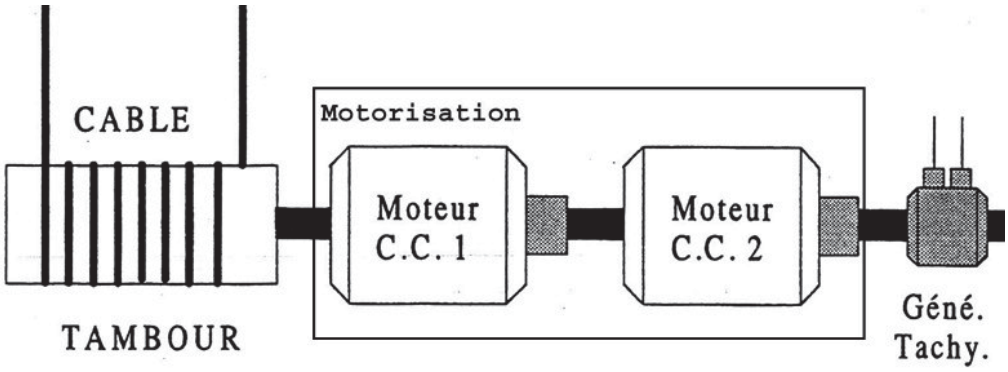
Q9. À partir de la réponse temporelle, déterminer les termes du modèle simplifié K_m et T_m (préciser les tracés nécessaires sur la courbe de la figure 5).

Q10. Le modèle du premier ordre est-il pertinent ?

B.3. Présentation de la motorisation de la catapulte

L'entraînement du tambour est obtenu par l'association de deux moteurs montés en tandem selon le schéma ci-dessous.

M_1 et M_2 sont des moteurs à courant continu à excitation séparée. Pour chacun des moteurs, on utilisera le modèle classique, linéaire et continu du moteur à courant continu introduit partie précédente. La vitesse est mesurée par une génératrice tachymétrique.



On note :

— u_1 et u_2 les tensions respectives des moteurs M_1 et M_2 ; i_1 et i_2 les courants respectifs ;
— C_{m1} et C_{m2} les couples moteurs
— e_1 et e_2 les forces contre-électromotrices (fcem) ; K_{e1} et K_{e2} les constantes des fcem et K_{t1} et K_{t2} les constantes de couple ;
— R_1, R_2 les résistances et L_1, L_2 les inductances des moteurs M_1 et M_2 ;
— J_{eq} l'inertie équivalente de l'ensemble de la transmission ramenée à l'arbre moteur $J_{eq} = 3\,600\,\text{kgm}^2$
— C_R le couple résistant $CR = 22\,200\,\text{Nm}$

B.4. Modélisation de la motorisation

La motorisation complète peut donc être décrite par le schéma bloc de la figure ??.

Q11. Monter que $\Omega_m(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\Omega_m(p) = H_1(p)\cdot U_1(p) + H_2(p)\cdot U_2(p) - H_3(p)\cdot C_r(p)$$

avec $H_1(p) = \dfrac{K_{t1}\cdot(R_2+L_2\cdot p)}{D(p)}$; $H_2(p) = \dfrac{K_{t2}\cdot(R_1+L_1\cdot p)}{D(p)}$; $H_3(p) = \dfrac{(R_1+L_1\cdot p)\cdot(R_2+L_2\cdot p)}{D(p)}$.

et où $D(p) = J_{eq}\cdot(R_1+L_1\cdot p)\cdot(R_2+L_2\cdot p) + K_{t1}\cdot K_{e1}\cdot(R_2+L_2\cdot p) + K_{t2}\cdot K_{e2}\cdot(R_1+L_1\cdot p)$

Pour cela on posera successivement :

— $C_r(p)=0$, $U_2(p)=0$ en déduire $H_1(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{[}U_1(p)$.
— $C_r(p)=0$, $U_1(p)=0$ en déduire $H_2(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{[}U_2(p)$.
— $U_1(p)=0$, $U_2(p)=0$ en déduire $H_3(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{[}C_r(p)$.

On suppose dans la suite du sujet que les deux moteurs sont strictement identiques et commandés par une même tension commune $U = U_1 = U2$. On repartira des expressions fournis ci-dessus.

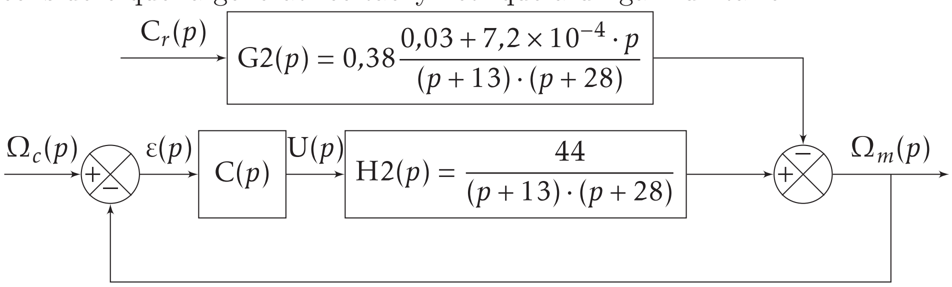
On donne : $K_{e1} = K_{e2} = 22\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}\,\text{s}$, $K_{t1} = K_{t2} = 22\,\text{Nm}$, $R_1 = R_2 = 0{,}03$, $L_1 = L_2 = 7{,}2\times10^{-4}\,\text{H}$, $U_{1max} = U_{2max} = 700\,\text{V}$, $J_{eq} = 3\,600\,\text{kgm}^2$.

Q12. Montrer que la relation de transfert se simplifie.

Q13. En comparant cette fonction de transfert avec celle trouvée à la question Q5 (fonction de transfert d'un moteur à courant continu seul), montrer que cette motorisation est équivalente à un monteur unique dont on précisera les paramètres K_{Eeq}, K_{teq}, R_{eq}, L_{eq}.

C. Asservissement de vitesse

Pour la suite, compte tenu des valeurs numériques, on admet que que l'asservissement de vitesse se met sous la forme suivante. On considère que la génératrice tachymétrique a un gain unitaire.



Q14. Déterminer $\Omega_(p)$ en fonction de $\Omega_c(p)$, $C_r(p)$, $H2(p)$, $G_2(p)$ et $C(p)$ (ne pas développer).

Pour la suite, on considère que $c_r(t) = 0$.

On choisit pour le correcteur, la fonction $C(p) = K_p \cdot \dfrac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$, avec $T_i = \dfrac{1}{13}$.

Q15. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $B_o(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\varepsilon(p)}$ en fonction de K_p, montrer que l'on peut la mettre sous la forme $B_o(p) = \dfrac{K_o}{p \cdot (p+a)}$

Q16. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $B_F(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$. Préciser l'ordre de la fonction de transfert.

Q17. Déterminer K_p afin que $B_F(p) = \dfrac{K_F}{(p+b)^2}$. Quel est l'intérêt de ce choix ?

On applique une consigne $\omega_c(t) = \Omega_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\Omega_0 = 30\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

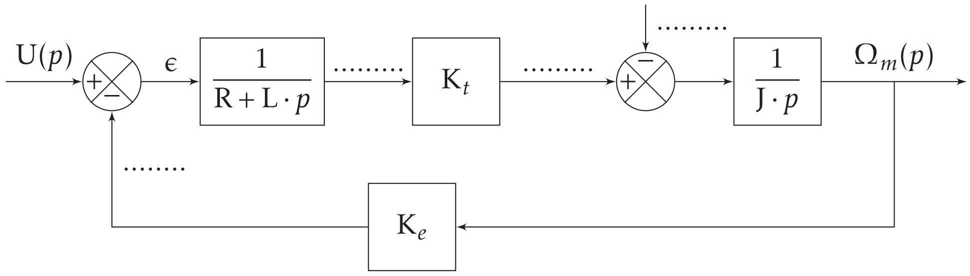
Q18. Déterminer $\Omega_c(p)$, montrer que $\Omega_m(p) = \dfrac{K_F \cdot \Omega_0}{p \cdot (p+b)^2}$

Q19. Justifier que l'on peut écrire $\Omega_m(p) = \dfrac{A}{(p+b)^2} + \dfrac{B}{(p+b)} + \dfrac{C}{p}$, en déduire $\omega_m(t)$.

Q20. Tracer l'allure de la réponse temporelle, pour $\Omega_0 = 30\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. On calculera quelques valeurs simples ($t = k \cdot \dfrac{1}{b}$, avec $k \in [1, 3, 5]$). Déterminer le temps de réponse à 5%. Conclure.

D. Document réponse

DR-1. Compléter le schéma bloc suivant



DR-2. Déterminer le temps de réponse à $T_{5\%}$

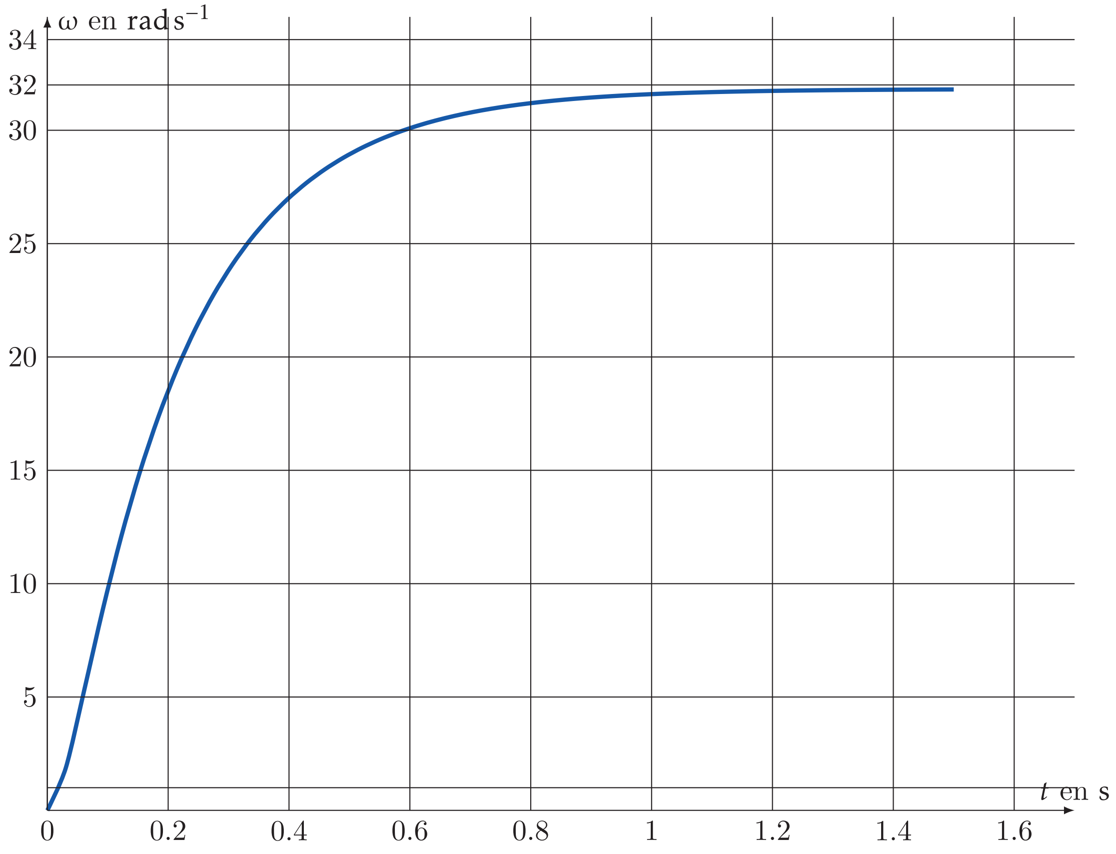


Figure 2 – Réponse temporelle du moteur seul