SYSTEMES DU SECOND ORDRE a<1 REGIME PSEUDOPERIODIQUE DEPASSEMENTS : QUELQUES ELEMENTS DE CALCULS

Michel Huguet

Préambule :

- Le système est sollicité par un échelon unitaire e(t)=1.u(t)

$$L(e(t)) = E(p) = \frac{1}{p}$$

- La fonction transfert du second ordre possède la forme canonique suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

1) Recherche de la réponse s(t) du système :

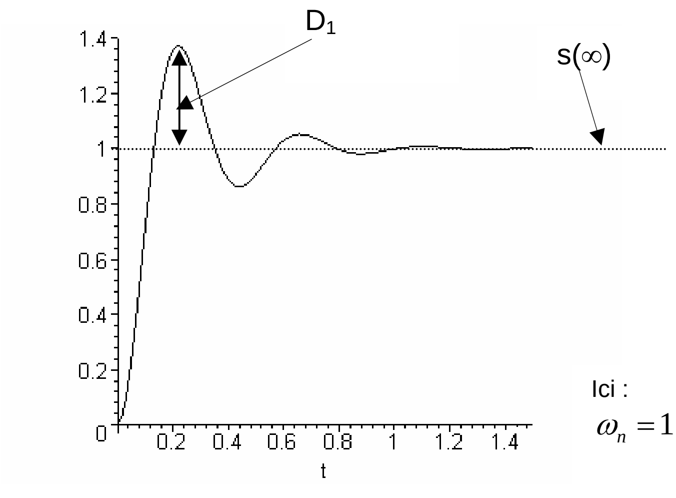
$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

$$S(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p}$$

Après transformée inverse et pour a<1 on obtient :

$$\boxed{s(t) = K\left(1 - \frac{e^{-a \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \sin\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2} \cdot t + \varphi\right)\right)}$$

Avec $\tan\varphi = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ ($\sin\varphi = \sqrt{1-a^2}$ trouvé en posant $s(0) = 0$)



Ici : $\omega_n = 15\,rad/s$, $K = 1$ et $a = 0.3$

2) Recherche sur les extrema de cette fonction dans le but d'identification :

s(t) admet des maxis lorsque $\frac{ds(t)}{dt} = 0$

Pour rechercher l'expression de $\frac{ds(t)}{dt}$ passons par exemple dans le domaine symbolique.

$L\left(\frac{ds(t)}{dt}\right) = p \cdot S(p) - s(0^+)$ ici, et on le voit sur la figure ci-dessus, $s(0^+) = 0$

$$p \cdot S(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

Après transformation inverse il vient (toujours pour a<1) :

$$\boxed{\frac{ds(t)}{dt} = K \cdot \left(\frac{\omega_n \cdot e^{-a \cdot \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \sin\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2} \cdot t\right) \right)}$$

Donc $\frac{ds(t)}{dt} = 0$ a pour racines :

- t=0 et plus généralement lorsque $\sin\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2} \cdot t\right) = k \cdot \pi$ donc lorsque $t = \frac{k \cdot \pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2}}$
- t=+∞

3) Recherche de l'amplitude des dépassements :

Prenons le cas du premier dépassement. Il se produit à l'instant $t_{D1} = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2}}$ (k=1)

$$s(t_{D1}) = K \left(1 - \frac{e^{-a \cdot \omega_n \cdot \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2}}}}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \sin\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2} \cdot \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2}} + \varphi \right) \right)$$

$$s(t_{D1}) = K \left(1 - \frac{e^{-a \cdot \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}}}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \sin(\pi + \varphi) \right)$$

$$s(t_{D1}) = K \left(1 - \frac{e^{-a \cdot \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}}}{\sqrt{1-a^2}} \cdot (\sin \pi . \cos \varphi + \cos \pi . \sin \varphi) \right)$$

$$s(t_{D1}) = K \left(1 - \frac{e^{-a \cdot \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}}}{\sqrt{1-a^2}} \cdot (-\sin \varphi) \right)$$

or comme nous l'avons vu plus haut $\sin \varphi = \sqrt{1-a^2}$,donc :

$$s(t_{D1}) = K \left(1 + e^{\frac{-a \cdot \pi}{\sqrt{1-a^2}}} \right)$$

Donc le premier dépassement dépasse la valeur finale s(∞)=K d'une « hauteur » égale à $D_1 = K \cdot e^{-\frac{a \cdot \pi}{\sqrt{1-a^2}}}$

D'une façon plus générale lorsque $t = \frac{k \cdot \pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2}}$

$$\boxed{s(t_{Dk}) = K \left(1 + e^{\frac{-k \cdot a \cdot \pi}{\sqrt{1-a^2}}} \right)}$$

Donc le k[ième] dépassement à une « hauteur » par rapport à s (∞) de : $D_k = K \cdot e^{-\frac{k \cdot a \cdot \pi}{\sqrt{1-a^2}}}$

Remarque :

Ne pas confondre k le numéro du dépassement avec K le gain de H(p).

Si l'échelon possède une amplitude A : $s(t_{D1}) = A \cdot K\left(1 + e^{\frac{-a \cdot \pi}{\sqrt{1-a^2}}}\right)$ donc : $D_k = A \cdot K \cdot e^{\frac{-k \cdot a \cdot \pi}{\sqrt{1-a^2}}}$