

# Analyse des systèmes asservis

## 6.1 Caractérisation des systèmes asservis

### 6.1.1 Structure des systèmes asservis

Un système asservi linéaire peut se représenter par le schéma 6.1. On y retrouve une chaîne d'action qui agit sur le système pour obtenir la sortie souhaitée en fonction de la consigne, une chaîne d'information qui prélève une image de la sortie, cette image est comparée à la consigne à atteindre.

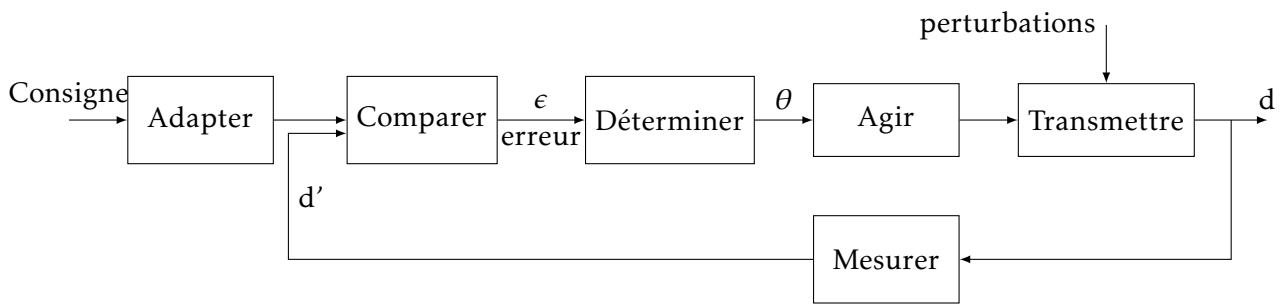


FIGURE 6.1 – Schéma fonctionnel d'un système asservi

### 6.1.2 Caractéristiques attendues d'un système asservi

**Précision** La précision étant l'écart entre la consigne et la sortie du système, il semble évident que l'on souhaite que cet écart soit nul.

Dans le cas d'un asservissement de type régulation, on cherche à avoir une erreur indicielle nulle (pour une entrée de type échelon) et si le système doit suivre une consigne évolutive (suivi de trajectoire), une erreur de traînage nulle.

Il faut aussi vérifier que le système n'est pas sensible aux perturbations extérieures (l'ouverture de la porte d'un four doit être corrigée le plus rapidement possible).

**Stabilité** La stabilité est la qualité la plus importante que doit posséder le système asservi. On ne peut en général se satisfaire de l'information binaire de la stabilité (stable/instable), en effet, un système qui atteint sa position finale après de nombreuses oscillations est stable mais ne peut être considéré comme un système correct. La notion de dépassement, associée aux marges de stabilité, permet de caractériser cette stabilité relative.

**Rapidité** Comme pour la précision, on souhaite que le système soit le plus rapide possible. Souvent après avoir réglé la stabilité du système, avoir obtenu la précision souhaitée, il ne reste plus de possibilité de réglage de la rapidité sans modifier les paramètres précédents.

Le réglage et l'optimisation du comportement d'un système est souvent un compromis entre stabilité (oscillations) précision, et rapidité.

## 6.2 Stabilité

### 6.2.1 Position du problème et définitions

Une manière intuitive de préciser la notion de stabilité est d'imaginer un système que l'on écarte de sa position initiale par une impulsion puis de regarder son évolution ; s'il retrouve sa position initiale, il est stable, s'il s'en écarte, il est instable.

Les petits schémas 6.2 précisent quelques comportements possibles d'un système.



FIGURE 6.2 – Représentation de la stabilité

Plusieurs définitions de la stabilité sont possibles.

**Énoncé (Définition 1)** *Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.*

**Remarque :** Cela revient à solliciter le système avec une entrée bornée (type échelon) et à vérifier que la sortie ne diverge pas.

**Énoncé (Définition 2)** *Un système est stable si la réponse libre du système tend vers zéro à l'infini.*

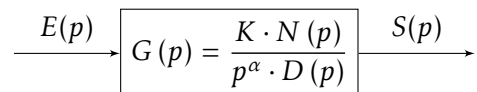
**Remarque 1 :** Étudier la réponse libre d'un système revient à étudier le système lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre et à analyser sa réponse. Un système stable a tendance à revenir dans sa position d'équilibre, un système qui ne revient pas dans sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas est dit juste instable.

**Remarque 2 :** Pour étudier la réponse libre, il suffit de solliciter le système par une impulsion de Dirac et de vérifier que celui-ci revient en position initiale.

Ces deux définitions sont équivalentes dans le cas de systèmes linéaires mais sont parfois mises en défaut.

Un système réel instable oscille ou s'écarte de sa position jusqu'à la destruction. Les oscillations sont dans le cas général limitées par les différentes saturations (limites des amplificateurs opérationnels, butées physiques,...). Ces limitations physiques peuvent laisser croire que la sortie du système est bornée.

**Modèle d'étude de la stabilité** Tout système linéaire (sans retard) peut se mettre sous la forme du schéma bloc ci-contre.



- $K$  le gain  $K > 0$ ;
- $N(p)$  et  $D(p)$  deux polynômes tel que :
  - $N(0) = 1$  et  $D(0) = 1$ ;
  - $N(p)$  de degré  $m$ ,  $N(p) = 1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m$ ;
  - $D(p)$  de degré  $n$ ,  $D(p) = 1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n$ ;
- $\alpha$  la classe du système.

Pour un système physique, en vertu du principe de causalité (l'effet ne peut précéder la cause), le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur.

## 6.2.2 Étude de la stabilité

Afin d'étudier la stabilité du système, on se propose de déterminer l'allure de la réponse temporelle du système écarté de sa position initiale puis relâché.

Abandonner un système avec une condition initiale non nulle revient pour l'étude du comportement à considérer que le système a été soumis à l'instant  $t = 0$  à une impulsion  $e(t) = A_0 \cdot \delta(t)$  avec  $\delta(t)$  l'impulsion de Dirac, si celui-ci revient dans sa position initiale, on considère alors que le système est stable. On rappelle que la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}(e(t)) = A_0$$

Nous avons  $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  d'où  $S(p) = G(p) \cdot E(p)$  finalement  $S(p) = A_0 \cdot G(p)$ .

La réponse temporelle  $s(t)$  se déduit de la transformée inverse de  $S(p)$  :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) = A_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}(G(p)).$$

Étudier la réponse temporelle d'un système linéaire soumis à une impulsion de Dirac revient donc à étudier la transformée inverse de la fonction de transfert du système :

$$\mathcal{L}^{-1}(G(p)) = g(t) \cdot \mathcal{H}(t)$$

avec  $\mathcal{H}(t)$  la fonction de Heaviside telle que  $\begin{cases} t < 0 & \mathcal{H}(t) = 0 \\ t \geq 0 & \mathcal{H}(t) = 1 \end{cases}$ .

Il reste donc à déterminer la transformée inverse de  $G(p)$ , pour cela nous allons décomposer la fonction de transfert en éléments simples et rechercher les racines du dénominateur (les pôles).

$$G(p) = \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)} = \frac{K \cdot (1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m)}{p^\alpha \cdot (1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n)}$$

Tout polynôme possède et/ou :

- des racines nulles ;
- des racines réelles, simples et/ou multiples ;
- des racines complexes, simple et/ou multiples.

Le polynôme du dénominateur peut donc se mettre sous la forme d'un produit de fonctions du premier et du second ordre :

$$G(p) = K' \cdot \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{\prod_j (p - c_j)^{\alpha_j} \cdot \prod_\ell ((p - a_\ell)^2 + b_\ell^2)^{\alpha_\ell} \cdot \prod_k (p^2 + b_k^2)^{\alpha_k}}$$

$p^\alpha$  : racines nulles d'ordre  $\alpha$ ,

$\prod_j (p - c_j)^{\alpha_j}$  : racines réelles multiples d'ordre  $\alpha_j$ ,

avec :  $\prod_\ell ((p - a_\ell)^2 + b_\ell^2)^{\alpha_\ell}$  : racines complexes multiples d'ordre  $\alpha_\ell$ ,

$\prod_k (p^2 + b_k^2)^{\alpha_k}$  : racines imaginaires pures multiples d'ordre  $\alpha_k$ .

On suppose pour simplifier l'étude qui suit que toutes les racines sont simples, le cas des racines multiples sera examiné plus loin.

Si les racines sont simples ( $\alpha = \alpha_j = \alpha_k = \alpha_\ell = 1$ ) alors

$$G(p) = K' \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{\prod_j (p - c_j) \cdot \prod_\ell ((p - a_\ell)^2 + b_\ell^2) \cdot \prod_k (p^2 + b_k^2)}$$

et la décomposition en fractions simples s'écrit :

$$G(p) = \sum_f \frac{C_f}{p} + \sum_j \frac{C_j}{p - c_j} + \sum_\ell \frac{A_\ell \cdot p + B_\ell}{(p - a_\ell)^2 + b_\ell^2} + \sum_k \frac{A_k \cdot p + B_k}{p^2 + b_k^2}$$

on reconnaît :

$$\begin{aligned} \sum_f \frac{C_f}{p} &: \text{décomposition en fraction simple des racines nulles,} \\ \sum_j \frac{C_j}{p - c_j} &: \text{décomposition en fraction simple des racines réelles,} \\ \sum_\ell \frac{A_\ell \cdot p + B_\ell}{(p - a_\ell)^2 + b_\ell^2} &: \text{décomposition en fraction simple des racines complexes conjuguées,} \\ \sum_k \frac{A_k \cdot p + B_k}{p^2 + b_k^2} &: \text{décomposition en fraction simple des racines imaginaires pures.} \end{aligned}$$

La réponse temporelle est donc la somme des réponses temporelles. Le système sera instable si un des termes ne tend pas vers 0 en l'infini, il nous suffit donc d'étudier chacune des transformées inverses pour obtenir les conditions de stabilité du système.

Commençons par les racines réelles et complexes.

**Racines réelles simples**  $\sum_j \frac{C_j}{p - c_j}$  : à partir du tableau des transformées inverses en annexe (page ??)

on déduit

$$\frac{C_j}{p - c_j} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C_j \cdot e^{c_j \cdot t}.$$

Le système est stable si la réponse temporelle tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. L'allure de la réponse temporelle ne dépend donc que du signe de  $c_j$ .

- $c_j > 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{c_j \cdot t}) = +\infty$ , la sortie diverge, le système est instable ;
- $c_j < 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{c_j \cdot t}) = +0$ , la sortie tend vers 0, cette racine ne rend pas le système instable.

**Racines complexes simples**  $\sum_\ell \frac{A_\ell \cdot p + B_\ell}{(p - a_\ell)^2 + b_\ell^2}$  : le tableau des transformées inverses ne donne pas directement la transformée de  $\frac{A_\ell \cdot p + B_\ell}{(p - a_\ell)^2 + b_\ell^2}$  mais il est possible de la déduire à partir des deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{— } \frac{b}{b^2 + (p + a)^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin b \cdot t \text{ et} \\ \text{— } \frac{p + a}{b^2 + (p + a)^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \cos bt. \end{aligned}$$

La transformée inverse est donc de la forme :

$$\frac{A_\ell \cdot p + B_\ell}{(p - a_\ell)^2 + b_\ell^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K_i \cdot e^{a_i \cdot t} \cdot \sin (b_i \cdot t + \varphi_i)$$

Le sinus est toujours borné, la stabilité du système ne dépend donc que du signe de  $a_i$  :

- $a_i > 0$ , comme précédemment  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{a_i \cdot t}) = +\infty$ , la sortie diverge, le système est instable
- $a_i < 0$ , dans ce cas,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{a_i \cdot t}) = 0$ , la sortie tend vers 0, cette racine ne rend pas le système instable.

**Racines réelles multiples**  $\sum_j \frac{C_j}{(p - c_j)^n}$  : à partir du tableau des transformées inverses (page ??) on déduit :

$$\frac{C_j}{(p - c_j)^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C_j \cdot t^{n-1} \cdot e^{c_j \cdot t}.$$

Il ne reste plus qu'à étudier le cas d'une racine nulle, et le cas d'une racine imaginaire pure mais nous allons ici prendre en compte le fait que la racine soit simple ou multiple.

**Racine nulle simple**  $\frac{1}{p}$  : 0 est racine du dénominateur. La transformée inverse est :

$$\frac{1}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 \cdot \mathcal{H}(t).$$

La sortie tend donc vers une constante non nulle. Le système ne revient pas à 0 mais ne s'écarte pas indéfiniment, il reste borné. On dit alors que le système est *juste instable*.

**Remarque** : Si on prend la première définition, c'est-à-dire que l'on soumet le système à une entrée en échelon, la sortie diverge, la sortie tend vers une droite (intégration d'une constante).

**Racine nulle double**  $\frac{1}{p^2}$  : du tableau des transformées, on déduit

$$\frac{1}{p^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t.$$

On constate que la sortie diverge lorsque  $t$  croît. Le système est donc instable.

**Racine imaginaire simple**  $\frac{A_k}{p^2 + \omega_k^2}$ , on a alors  $p_k = \pm j \cdot \omega_k$  qui est racine du dénominateur.

Du tableau des transformées on déduit :

$$\frac{1}{p^2 + \omega^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\omega} \sin \omega \cdot t.$$

La sortie est constamment sinusoïdale, elle ne tend pas vers 0 mais elle reste bornée. On dit alors que le système est *juste instable*.

**Racine imaginaire double**  $\frac{A_k}{(p^2 + \omega_k^2)^2}$  le tableau donne

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2 \cdot \omega^2} (\sin \omega \cdot t - \omega \cdot t \cdot \cos \omega \cdot t).$$

Le second terme tend vers l'infini, le système est donc instable.

## Conclusion

- Si les parties réelles des racines complexes sont toutes négatives et si toutes les racines réelles sont négatives, alors la réponse transitoire du système est composée d'exponentielles amorties et décroissantes, la réponse tend vers zéro pour  $t$  tendant vers l'infini, le système revient à sa position d'équilibre, le système est stable.
- Si un des pôles réels est positif, le système est instable. Le système est de type divergent exponentiel.
- Si un des pôles complexes est à partie réelle positive, le système est instable. Le système est de type oscillatoire divergent.
- Si 0 ou  $\pm j\omega$  est racine simple, le système est juste instable.
- Si 0 ou  $\pm j\omega$  est racine multiple, le système est instable.

### 6.2.3 Condition de stabilité

**Énoncé (condition de stabilité)** Un système est stable si, et seulement si, la fonction de transfert en boucle fermée n'a pas de pôle à partie réelle positive ou nulle.

**Remarque :** On appelle pôles de la fonction de transfert les racines du dénominateur.

### 6.2.4 Position des pôles

La position des pôles dans le plan complexe de la fonction de transfert en boucle fermée nous renseigne sur la stabilité de la fonction de transfert (fig 6.3).

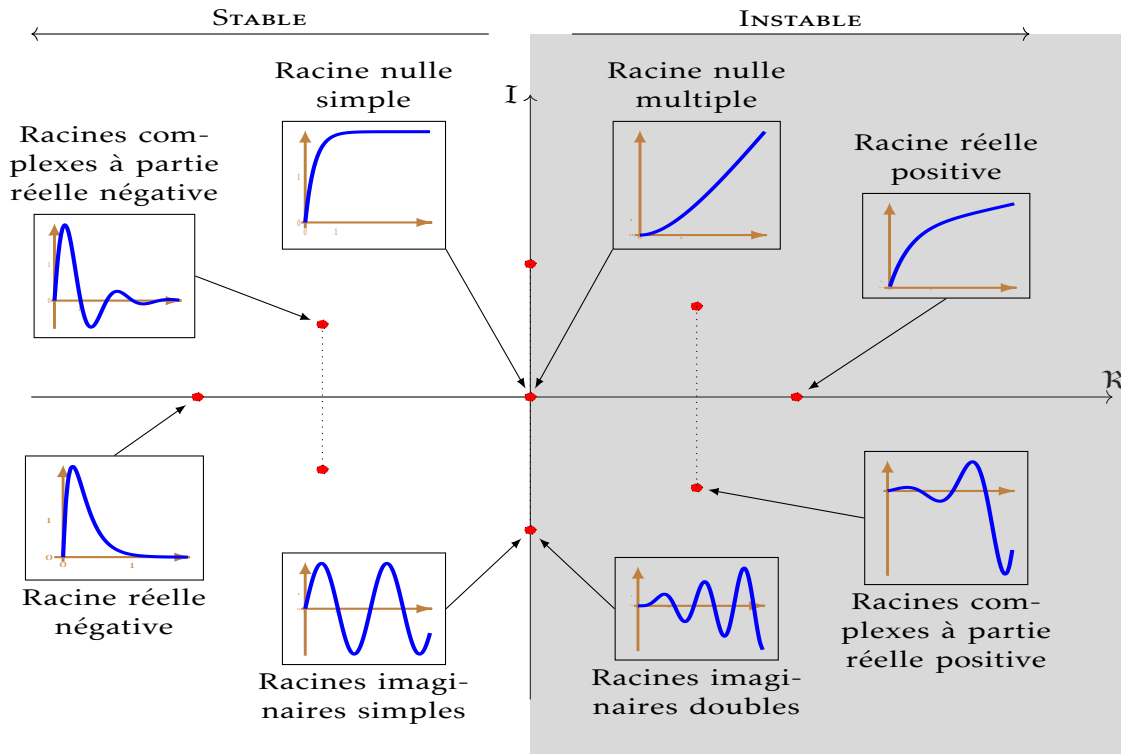


FIGURE 6.3 – Positions des pôles et stabilité et réponse à une impulsion de Dirac

Il suffit donc d'étudier les racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée pour savoir si le système est stable ou instable. Mais si on sait résoudre des polynômes de degré 1, 2, 3 voire 4, on ne sait pas déterminer de manière systématique les racines d'un polynôme de degré supérieur nous verrons plus loin qu'il existe des outils qui, à défaut de nous donner les racines, nous indiquent le signe de celles-ci.

### 6.2.5 Critères de stabilité

La connaissance des racines permet de déduire si le système est stable, mais il n'est pas possible de déterminer analytiquement les racines d'un polynôme de degré élevé. Les critères ci-dessous nous permettent de déterminer le signe des racines sans avoir besoin de déterminer les racines. On distingue les critères algébriques et les critères graphiques.

#### a) Équation caractéristique

Pour une fonction de transfert en boucle fermée s'écrivant,

$$BF(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m \cdot p^m + a_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + a_1 \cdot p^1 + a_0}{b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + b_1 \cdot p^1 + b_0},$$

## 6.2 Stabilité

on appelle équation caractéristique :

$$D(p) = 0$$

$$b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + b_1 \cdot p^1 + b_0 = 0.$$

### b ) Condition nécessaire

**Énoncé (Condition nécessaire de stabilité)** Pour que le système soit stable, il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique soient du même signe que  $b_n$ .

### c ) Systèmes du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre

Pour les systèmes du premier et du second ordre, la condition nécessaire est une condition suffisante.

**Premier ordre :** Soit  $H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$ , pour que le système soit stable, il suffit que  $\tau > 0$ .

**Second ordre :**

$z > 1$  : Soit  $H_2(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$ , pour que le système soit stable, il suffit que  $\tau_1 > 0$  et  $\tau_2 > 0$ .

$z = 1$  :  $H_2(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)^2}$ , il suffit que  $\tau > 0$

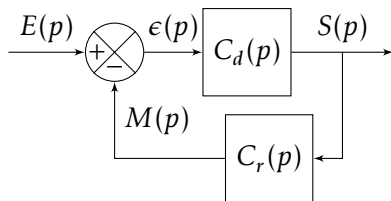
$0 < z < 1$  :  $G(p) = \frac{K}{(p - r_1) \cdot (p - r_2)}$  avec  $r_1 = a + i \cdot b$  et  $r_2 = a - i \cdot b$ , le système est stable si  $a < 0$ .

La fonction de transfert s'écrit donc :  $G(p) = \frac{K}{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot p + b^2 \cdot p^2}$ . Tous les coefficients sont positifs

### d ) Critère graphique du revers

Les critères graphiques permettent d'étudier la stabilité d'un système à partir de la représentation graphique de la fonction de transfert en boucle ouverte. Cette étude peut être conduite à partir des diagrammes de Bode, ou de la représentation dans le plan complexe de la fonction de transfert.

Soit  $G(p)$  la fonction de transfert en boucle fermée du système décrit par le schéma bloc ci-dessous, avec  $BO(p)$  la fonction de transfert en boucle ouverte.



$$BF(p) = \frac{C_d(p)}{1 + C_d(p) \cdot C_r(p)} = \frac{C_d(p)}{1 + BO(p)}$$

Nous savons que l'étude de la stabilité se résume à la recherche du signe des racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée.

$$D(p) = 0$$

$$1 + BO(p) = 0$$

Cette condition peut aussi s'écrire sous la forme

$$BO(p) = -1$$

Étudier  $BO(p) = -1$  revient à étudier le lieu (le tracé de la fonction de transfert) de la fonction  $BO(p)$  par rapport au point  $(-1, 0)$  du plan complexe. Le point  $(-1, 0)$  est appelé *point critique*. La position de ce tracé par rapport au point critique nous renseigne sur la stabilité du système.

L'étude peut être réalisée aussi bien dans le plan complexe que sur les diagrammes de Bode.

**Énoncé (Critère du revers dans le plan complexe)** Un système asservi linéaire est stable si, en parcourant dans le sens des pulsations croissantes le lieu de transfert dans le plan complexe de la FTBO on laisse le point critique  $(-1, 0)$  sur la gauche (figure 6.4). Il est instable dans le cas contraire.

**Remarque :** Ce critère dit *critère du revers dans le plan de Nyquist* n'est plus explicitement au programme, il n'est utilisé ici que pour préciser la problématique graphique.

Ce critère initialement défini dans le plan complexe peut être transposé dans le plan de Bode (diagrammes de Bode) en considérant que le point critique  $(-1, 0)$  du plan complexe devient dans le plan de Bode le point de coordonnées  $(0 \text{ dB}, -180^\circ)$ .

Ce point est représenté :

- sur le diagramme d'amplitude par l'axe des abscisses  $A_{dB} = 0 \text{ dB}$ ,
- sur le diagramme de phase par la droite d'ordonnée  $\phi = -180^\circ$ .

L'énoncé du critère du revers dans le plan de Bode prend deux formes, une pour le diagramme d'amplitude, l'autre pour le diagramme d'argument.

**Énoncé (Critère du revers dans le plan de Bode)** Un système asservi est stable si, pour la pulsation  $\omega_{C0}$  définie par  $|BO(j \cdot \omega_{C0})| = 1$  (soit  $0 \text{ dB}$ ) de la fonction de transfert en boucle ouverte, le déphasage est supérieur à  $-180^\circ$  (figure 6.5).

ou

**Énoncé (Critère du revers dans le plan de Bode)** Un système asservi est stable, si pour la pulsation  $\omega_{180}$  définie par  $\arg BO(j \cdot \omega_{180}) = -180^\circ$  de la fonction de transfert en boucle ouverte, l'amplitude en décibel est négative.

Une seule de ces définitions suffit si les courbes sont monotones décroissantes.

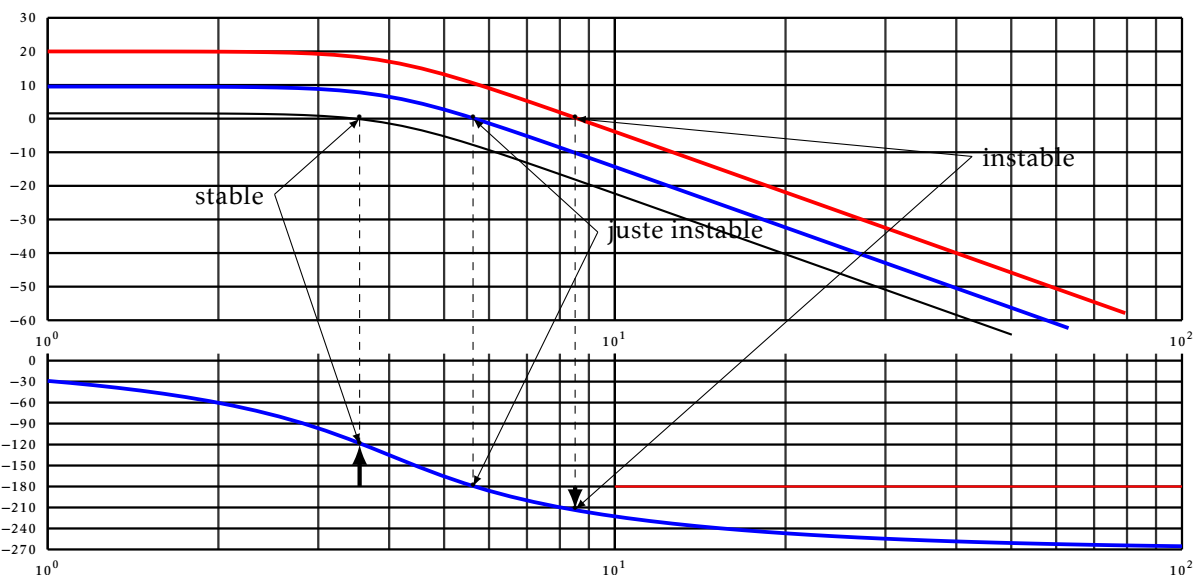


FIGURE 6.5 – Critère du revers à partir des diagrammes de Bode

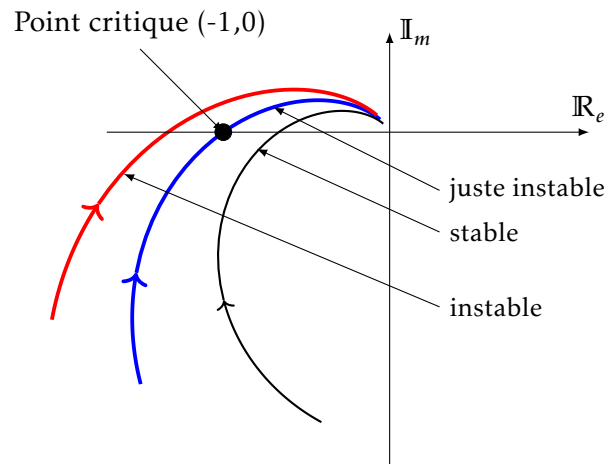


FIGURE 6.4 – Critère du revers dans le plan complexe



## 6.2 Stabilité

Pour les diagrammes qui présentent plusieurs passages autour de  $-180^\circ$  pour l'argument ou autour de  $0\text{ dB}$  pour l'amplitude, il est nécessaire de vérifier pour tous les points particuliers les deux versions du critère.

**Remarque :** L'utilisation du critère de revers dans le plan de Bode est à manipuler avec précaution, en effet, contrairement à son application dans le plan complexe (critère de Nyquist) où l'on a une vision globale du lieu de transfert, sur les diagrammes de Bode, le tracé est décomposé sur deux graphes et il est obligatoire de s'intéresser aux deux pour évaluer la stabilité.

**Les limites du critère du revers** Le critère du revers ne peut s'appliquer avec certitude que sur des fonctions de transfert régulières en boucle ouverte.

Une fonction de transfert régulière est une fonction de transfert qui ne possède pas de pôle (racines du dénominateur) ou de zéro (racines du numérateur) à partie réelle positive.

Ainsi pour le système dont la FTBO s'écrit :

$$BO(p) = \frac{10}{(1 + 2 \cdot p) \cdot (1 - 0,1 \cdot p) \cdot (1 + \frac{p}{3}) \cdot (1 + 10 \cdot p)}$$

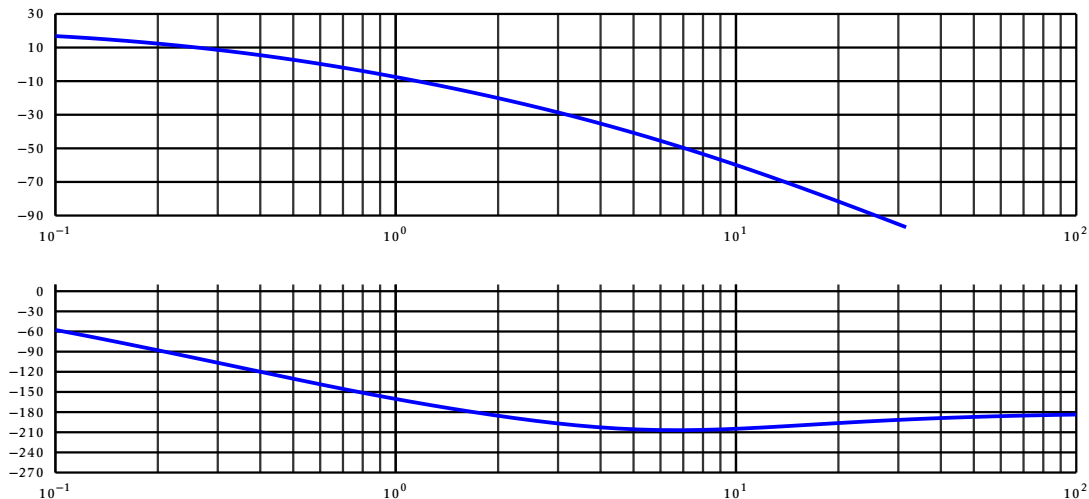


FIGURE 6.6 – Les limites du critère du revers

Le tracé des diagrammes de Bode de la FTBO figure 6.6) semble indiquer que la FTBF est stable, mais le simple calcul des coefficients de la FTBF montre que le système est instable (coefficients négatifs et positifs, la condition nécessaire n'est pas remplie).

$$BF(p) = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)} = -\frac{300}{-330 - 683 \cdot p - 35 \cdot p^2 - 128 \cdot p^3 + 20 \cdot p^4}$$

Le critère du revers est la version limitée aux fonctions de transfert régulières d'un critère graphique plus complet, le critère de Nyquist.

### 6.2.6 Marges de stabilité

Les critères ci-dessus sont des critères de stabilité absolue, ils permettent de répondre à la question binaire : le système est-il stable ou instable ?

La réponse à cette question ne permet pas de régler et d'optimiser le fonctionnement d'un système. Il est nécessaire, pour cela, d'identifier un ou plusieurs paramètres qui permettent de régler le système asservi afin d'avoir le comportement souhaité en terme d'oscillations de la réponse temporelle.

### a ) Influence de la position de la FTBO par rapport au point critique

On se propose d'évaluer l'influence de la distance entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique sur le comportement temporel du système asservi.

Soit le système décrit par le schéma bloc de la figure 6.7a.

Sur la figure 6.7b sont représentée la réponse temporelle à un échelon pour différentes valeurs du gain  $K$  et sur la figure 6.7c les diagrammes de Bode pour ces mêmes valeurs.

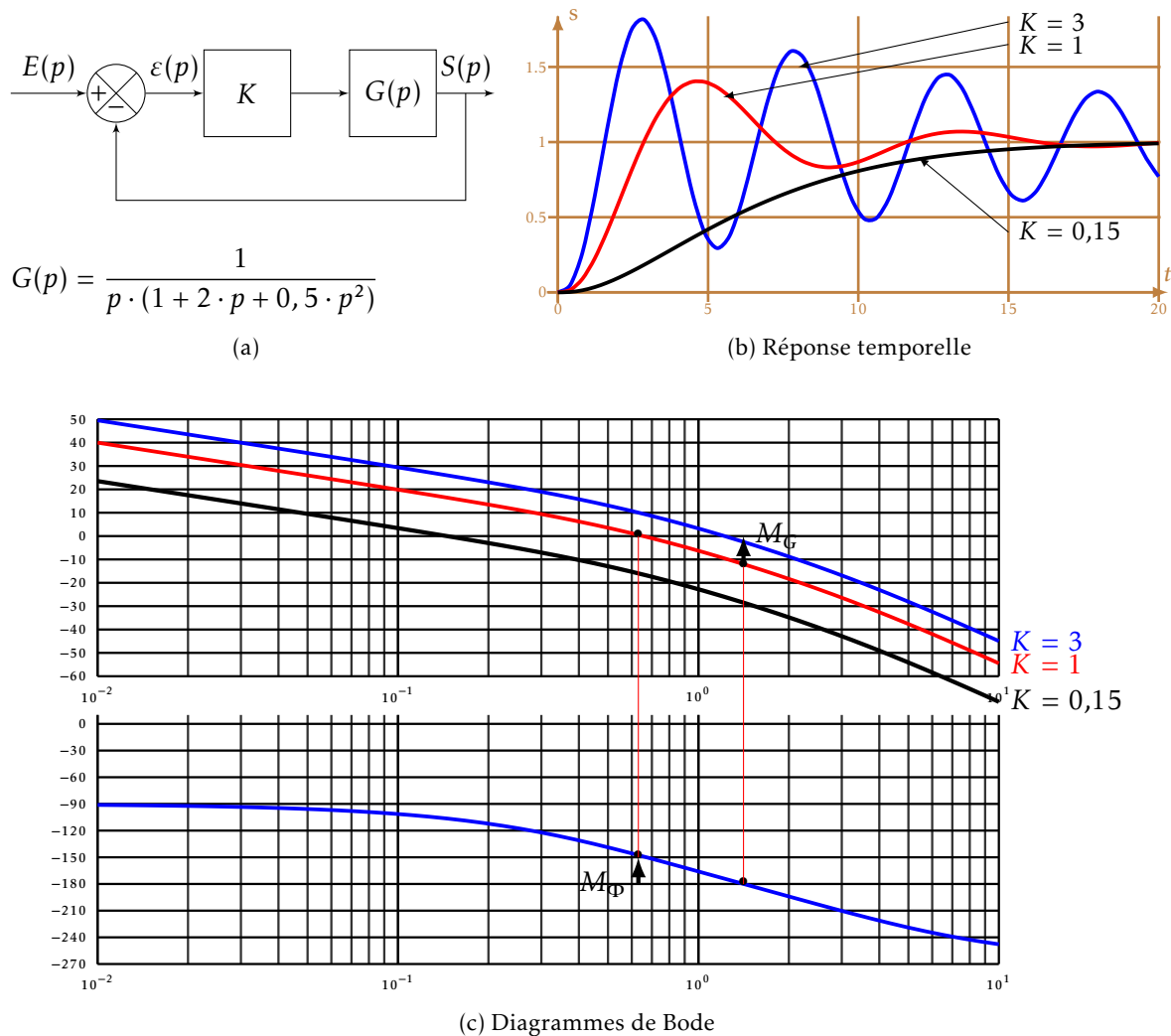


FIGURE 6.7 – Influence de la distance au point critique

Les zooms 6.8 page ci-contre précisent les marges de phase et de gain pour les différentes valeurs de  $K$ .

$K = 1$  : La distance entre la courbe de phase et le point critique ( $0 \text{ dB}$ ,  $-180^\circ$ ) est d'environ  $30^\circ$  et la distance entre la courbe de gain et le point critique est d'environ  $15 \text{ dB}$ . La réponse temporelle oscille mais converge en peu d'oscillations.

$K = 3$  : La distance mesurée en degrés entre la courbe de phase et le point critique est très faible. Il en est de même pour la distance entre la courbe de gain et le point critique. On note qu'alors la réponse temporelle est fortement oscillante.

$K = 0,15$  : La courbe de phase et la courbe de gain sont éloignées du point critique. La réponse temporelle ne présente pas d'oscillations.

Les réponses temporelles sont caractéristiques d'un système stable mais on constate que le comportement temporel est d'autant plus oscillant que la distance entre la courbe de gain et  $0 \text{ dB}$  pour  $\omega_{180}$  est faible et/ou que la distance entre la courbe de phase et  $-180^\circ$  est faible.

## 6.2 Stabilité

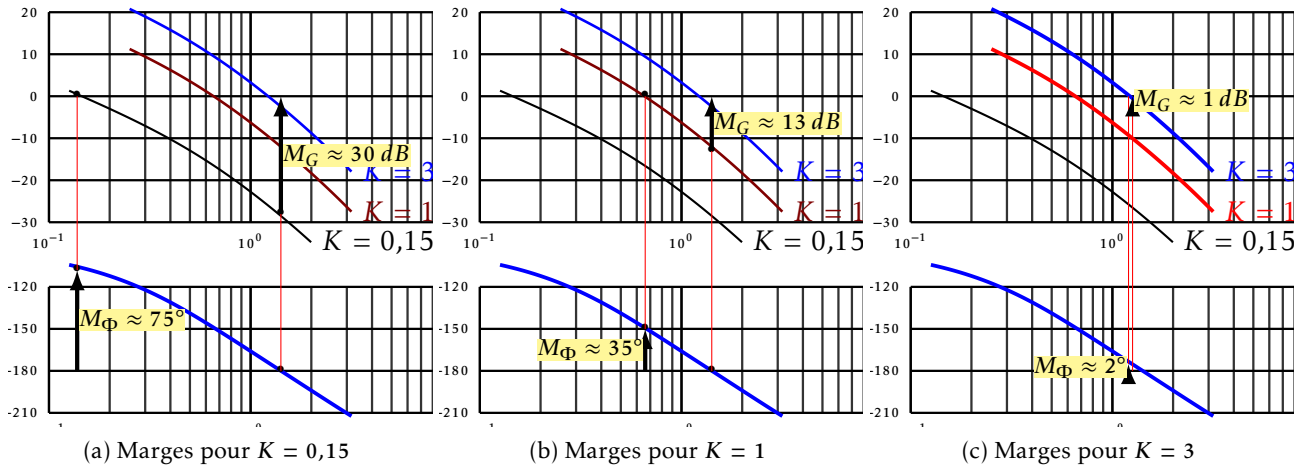


FIGURE 6.8 – Marges de phase et de gain pour différentes valeur de  $K$

### b ) Marges de stabilité sur les diagrammes de Bode

Il est donc possible, à partir de la représentation fréquentielle, de prévoir l'allure de la réponse temporelle et d'ajuster le système pour avoir un comportement correct, il suffit pour cela de régler une « distance » minimale entre le point critique et le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Cette distance est appréciée par les deux marges de stabilité : la *marge de gain*  $M_G$  et la *marge de phase*  $M_\Phi$ .

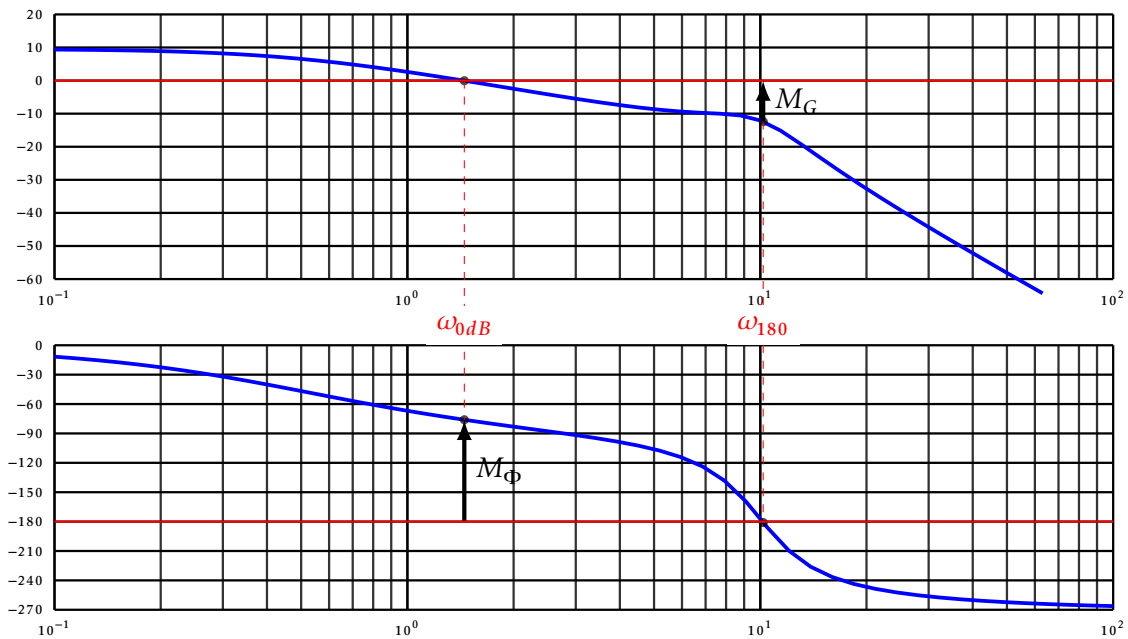


FIGURE 6.9 – Marges de stabilité sur les diagrammes de Bode

**Marge de gain** La marge de gain est mesurée sur le diagramme d'amplitude (figure 6.9), entre la courbe de gain de la FTBO et l'axe des abscisses pour la pulsation  $\omega_{180}$ . Le sens positif est compté de la courbe vers l'axe des abscisses.

On note  $\omega_{180}$ , la pulsation telle que  $\arg(BO(j\omega_{180})) = -180^\circ$ .

$$M_G = -20 \cdot \log(|BO(j \cdot \omega)|)$$

**Marge de phase** La marge de phase est mesurée sur le diagramme de phase entre l'ordonnée  $-180^\circ$  et la courbe de phase de la FTBO pour la pulsation  $\omega_{0dB}$ . Le sens positif est compté de l'ordonnée  $-180^\circ$  à la courbe.

On note  $\omega_{0dB}$ , la pulsation telle que  $20 \log(|BO(j\omega_{0dB})|) = 0dB$

$$M_\Phi = \arg(BO(j\omega_{0dB})) - (-180^\circ)$$

Les valeurs usuelles de réglage des marges de gain et de phase sont :

**Marge de gain**  $M_G$  de 10 dB à 15 dB.

**Marge de phase**  $M_\Phi$  de  $40^\circ$  à de  $50^\circ$ .

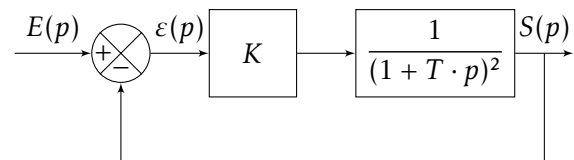
Ces valeurs correspondent à un comportement oscillatoire amorti analogue à celui d'un second ordre avec un coefficient d'amortissement  $\xi \approx 0,5$ .

### c ) Marge de phase et dépassements

Il n'y a pas de relation généralisable entre la marge de phase (mesurée sur la FTBO) et les dépassements de la réponse temporelle à un échelon de la FTBF, mais il est possible dans le cas d'un second ordre d'évaluer l'influence de la marge de phase.

Soit le système du second ordre avec une racine double décrit par le schéma bloc ci-contre.

La FTBO s'écrit :



$$BO(p) = \frac{K}{(1 + T \cdot p)^2}$$

et la FTBF

$$BF(p) = \frac{K}{1 + K} \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot T}{1 + K} \cdot p + \frac{T^2}{1 + K} \cdot p^2}$$

avec

— pulsation propre :  $\omega_{nf} = \frac{\sqrt{1 + K}}{T}$

— coefficient d'amortissement :  $\xi_f = \frac{1}{\sqrt{1 + K}}$

— gain :  $K_f = \frac{K}{1 + K}$

On peut en déduire le premier dépassement relatif :

$$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi \cdot \xi_f}{\sqrt{1 - \xi_f^2}}} = e^{\frac{-\pi}{\sqrt{K}}}$$

Le module et l'argument de la fonction de transfert complexe  $BO(j \cdot \omega)$  s'écrivent :

$$A(\omega) = |BO(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot T^2 \cdot \omega^2}}$$

$$\Phi(\omega) = \arg(BO(j \cdot \omega)) = -\arctan\left(\frac{2 \cdot T \cdot \omega}{1 - T^2 \cdot \omega^2}\right)$$

## 6.2 Stabilité

On cherche la pulsation  $\omega_{0dB}$  pour laquelle  $A(\omega) = 1$ , on trouve :

$$\omega_{0dB} = \frac{\sqrt{K-1}}{T} \quad \text{avec } K > 1$$

d'où la marge de phase

$$M_{\Phi} = \Phi(\omega_{0dB}) + 180^{\circ} = -\arctan\left(\frac{2 \cdot \sqrt{K-1}}{2-K}\right) + 180$$

On peut donc tracer l'évolution du dépassement  $D_{1\%}$  en fonction de la marge de phase (figure 6.10).

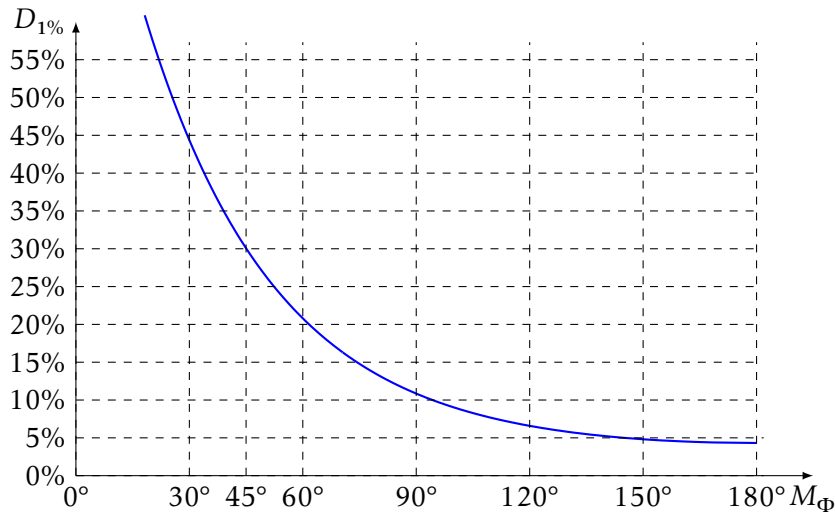


FIGURE 6.10 – Dépassement en fonction de la marge de phase

On remarque que le premier dépassement relatif est d'autant plus important que la marge de phase est petite.

Les réglages usuels pour la marge de phase,  $M_{\Phi}$  de  $40^{\circ}$  à  $50^{\circ}$  correspondent à des dépassements variant de 35% à 25%.

Un dépassement inférieur à 5% nécessite une marge de phase supérieure  $140^{\circ}$ .

Ce comportement n'est pas généralisable à toutes les fonctions de transfert, mais chaque fois que l'on peut modéliser le comportement d'un système par un second ordre, on peut s'inspirer de ces résultats pour régler le système.